DOI 10.37539/2949-1991.2025.33.10.020

**Машунин Юрий Константинович,**
Доктор экономических наук, к.т.н., профессор,
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия
ORCID id: 0000-0001-7071-8729
Mashunin Yu. K.,
Doctor of Economics, Ph.D., Professor,
Far Eastern Federal University, Russia, Vladivostok,
ORCID id: 0000-0001-7071-8729

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА СИСТЕМНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СИСТЕМ. МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА
# MATHEMATICAL AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE SOFTWARE FOR SYSTEM DESIGN OF ENGINEERING SYSTEMS. MULTIDIMENSIONAL MATHEMATIC

**Аннотация.** Цель работы представить теорию и методы многомерной математики, включающей аксиоматику, принципы оптимальности и методы для решения векторных задач оптимизации в моделировании промышленных процессов. Теория и методы векторной оптимизации могут являться математическим аппаратом вычислительного интеллекта в рамках искусственного интеллекта. В рамках теория векторной оптимизации представлены принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия https://rdcu.be/bhZ8i. (Работа "Vector optimization with equivalent and priority criteria" Springer Nature распространяется бесплатно.). В работе разработана теория и конструктивные методы решения векторных (многокритериальных) задач математического программирования, *во-первых*, при равнозначных критериях (характеристик инженерных систем), *во-вторых*, при заданной числовой величине приоритетного (представляющего интерес для разработчика) критерия.

В работе на базе векторной оптимизации разработана методология проектирования инженерных систем путем: 1) построения *математической* модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности; разработки конструктивных методов решения векторной задачи; 2) представлено построение численной модели выбора оптимальных параметров сложной инженерной системы (материала сложной структуры: много параметрической и много функциональной); 3) представлена численная реализация модели структуры материала при равнозначных критериях; 4) представлена численная реализация модели структуры материала при заданном приоритете любого критерия; 5) представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев) в относительных и физических единицах.

**Abstract:** The purpose of the work is to present the theory and methods of multidimensional mathematics, including axiomatics, principles of optimality and methods for solving vector optimization problems in modeling industrial processes. The theory and methods of vector optimization can be the mathematical apparatus of computational intelligence within the framework of artificial intelligence.

Within the framework of the theory of vector optimization, the principles of optimality of solving vector problems with equivalent criteria and with a given priority of the criterion are presented https://rdcu.be/bhZ8i. (The work "Vector optimization with equivalent and priority criteria» by Springer Nature is distributed free of charge.). The paper develops the theory and constructive methods for solving vector (multi-criteria) problems of mathematical programming, firstly, with equivalent criteria (characteristics of engineering systems), and secondly, with a given numerical value of the priority (of interest to the developer) criterion.

In the work, on the basis of vector optimization, a methodology for designing engineering systems has been developed by: 1) building a mathematical model of an engineering system under conditions of certainty and uncertainty; development of constructive methods for solving a vector problem; 2) the construction of a numerical model for the selection of optimal parameters of a complex engineering system (material of a complex structure: many parametric and many functional) is presented; 3) the numerical implementation of the model of the structure of the material with equivalent criteria is presented; 4) a numerical implementation of the material structure model is presented at a given priority of any criterion; 5) presents a geometric interpretation of the results of the solution when designing four characteristics (criteria) in relative and physical units in a three-dimensional coordinate system.

**Ключевые слова:** Многомерная математика, Теория векторной оптимизации, Методы принятия оптимальных решений, Моделирование инженерной системы, Геометрическая интерпретация многомерных систем.

**Keywords:** Multidimensional Mathematics, Theory of Vector Optimization, Methods for Making Optimal Decisions, Modeling of an Engineering System, Geometric Interpretation of Multidimensional Systems.

## 1. Introduction

Основной тенденцией развития методов управления общества (экономическими, техническими системами) является использование искусственного интеллекта. Искусственный интеллект (ИИ) представляет новое научное направление, которая исследует и разрабатывает теорию, методы и прикладные системы, используемые для моделирования и расширения человеческого интеллекта. Исследования в этой области включают в себя вычислительный интеллект, распознавание языков, изображений, обработку естественного языка и экспертные системы. Развитие современных систем искусственного интеллекта идет по пути интеграции вычислительного интеллекта и информационных систем. При исследовании развития производственных и инженерных систем выясняется, что они (системы) зависят от некоторого числового множества функциональных характеристик, которые в совокупности определяют многомерность исследуемой системы. Эту многомерность необходимо учитывать на стадии проектирования и моделирования. Анализ и исследование множества инженерных, экономических систем показало, что улучшение по одной из характеристик системы приводит к ухудшению других характеристик. А для улучшения функционирования системы:

во-первых, требуется решение проблемы, при которой в исследуемой системе одно подмножество характеристик (критериев) было направлено на увеличение числового значения (максимизацию), а второе подмножество характеристик (критериев) системы было направлено на уменьшение числового значения (минимизацию);

во-вторых, необходимо, чтобы все характеристики улучшались в совокупности.

В настоящее время известно решение однокритериальной оптимизации, которую можно трактовать как одномерную оптимизацию.

Исследования многокритериальных задач началось более ста лет тому назад в работе Pareto V. [1]. В последние три десятилетие методам решения векторных (многокритериальных) задач посвящено большое количество монографий и отдельных статей. Это связано с широким использованием этих методов в решении практических задач. Анализ методов и алгоритмов решения многокритериальных задач в соответствии со своей классификацией представлен в ряде работ [6, 10, 22, 39, 45]: методы решения многокритериальных задач, основанные на свертывании критериев с весовыми коэффициентами [3, 5, 25, 27]. Исследование многокритериальной оптимизации проводилось как на теоретическом уровне зарубежными [3, 25-30] и русскими авторами [4-23], так и на решении практических задач сначала в области экономики [31-45], а за тем в области инженерных систем [6-21].

Множество критериев в многокритериальной задаче оптимизации можно представить в виде вектора, с которым можно проводить математические операции, отсюда появились векторные задачи оптимизации или векторные задачи математического программирования.

Решение проблемы векторной оптимизации обусловлено рядом трудностей, причем концептуального характера, и главная из них понять: «что значит решить задачу векторной оптимизации». Для решения проблемы с множеством критериев математически необходимо создание, во-первых, аксиоматики и принципов оптимальности, показывающих любому пользователю, в чем одно решение лучше другого решения, и, что такое оптимальное решение многокритериальной (т.е. со многими характеристиками) оптимизационной задачи. А на следующем этапе на базе аксиоматики и принципов оптимальности разработки конструктивных методов решения многокритериальных задач.

*Цель работы* представить теорию и методы многомерной математики, включающей аксиоматику, принципы оптимальности, методы для решения векторных задач оптимизации моделирования инженерных систем. Теория и методы векторной оптимизации могут являться математическим аппаратом вычислительного интеллекта в рамках искусственного интеллекта.

В работе в рамках теории векторной оптимизации сформулированы аксиомы и представлены принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия. В прикладной части представлены конструктивные методы принятия оптимальных решений, методы решения векторных задач для моделирования инженерных систем, которые описаны множеством функциональных характеристик.

В организационном плане в первых главах представлена векторная задача математического программирования, [6–22], для решения которой сформулирована аксиоматика и представлены принципы оптимальности. В рамках теории векторной оптимизации разработаны методы решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия. Представленные конструктивные методы решения векторных задач математического программирования позволяют принимать решение, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при заданном приоритете критерия того или иного критерия.

В области инженерных систем, к которым относятся технические системы [11-14, 18, 19], технологические процессы [15, 21], материалы [17].

В работе на базе векторной оптимизации разработана методология проектирования инженерных систем путем: 1) построения *математической* модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности; разработки конструктивных методов решения векторной задачи; 2) представлено построение численной модели выбора оптимальных параметров сложной инженерной системы (материала сложной структуры: много параметрической и много функциональной); 3) представлена численная реализация модели структуры материала при равнозначных критериях; 4) представлена численная реализация модели структуры материала при заданном приоритете любого критерия; 5) представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев) в относительных и физических единицах.

## 2. Введение в многомерную математику. Векторная задача математического программирования.

### *2.1. Введение в многомерную математику.*

В качестве представителя многомерной математики мы сформулируем задачу математического программирования, представленную множеством функций, которые определяют многомерность исследуемого объекта. Каждая функция этого множества функций имеют различную целевую направленность: максимизации или минимизации, которые в совокупности изменяются на определенном (не пустом и замкнутом) множестве переменных (параметров). Не нарушая общности множество функций можно представить в виде вектора функций. В итоге получаем векторную задачу математического программирования (ВЗМП). На базе векторной задачи оптимизации представим теоретические проблемы необходимые для ее решения, которые включают аксиоматику (теоретические основы), принцип оптимальности и конструктивные методы решения векторных задач с равнозначными критериями и заданным приоритетом критерия, [6, 15, 29, 31, 33].

### *2.2. Векторная задача математического программирования*

*Векторная задача* математического программирования (ВЗМП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев.

ВЗМП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗМП.

*Однородные ВЗМП максимизации* – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

*Однородные ВЗМП минимизации* – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

*Неоднородные ВЗМП* – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач.

В соответствии с этими определениями представим выпуклую векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями [6, 20, 22].

$$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X),\ k = \overline{1, K_1}\}, \tag{1}$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X),\ k = \overline{1, K_2}\}\}, \tag{2}$$

$$G(X) \leq B, \tag{3}$$

$$X \geq 0, \tag{4}$$

где $X = \{x_j,\ j = \overline{1, N}\}$ - вектор переменных, т.е. это вектор из $N$-мерного евклидова $\boldsymbol{R}^N$, (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = 1,\ldots,N$);

$F(X)$ - вектор-функция (векторный критерий), имеющая $K$ – компонент-функций, ($K$ - мощность множества $\boldsymbol{K}$), $F(X) = \{f_k(X),\ k = \overline{1, K}\}$. Множество $\boldsymbol{K}$ состоит из подмножества $\boldsymbol{K}_1$

компонент максимизации и подмножества $\boldsymbol{K}_2$ минимизации; $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_1\cup\boldsymbol{K}_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя *max* и *min*;

$F_1(X)=\{f_k(X),\ k=\overline{1,K_1}\}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизируется, $K_1$ – число критериев, а $K_1\equiv\overline{1,K_1}$- множество критериев максимизации (задача (1), (3), (4) представляют собой ВЗМП с однородными критериями максимизации). В дальнейшем будем предполагать, что $f_k(X), k=\overline{1,K_1}$ - непрерывные вогнутые функции (иногда будем их называть критериями максимизации);

$F_2(X)=\{f_k(X),\ k=\overline{1,K_2}\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2\equiv\overline{K_1+1,K}\equiv\overline{1,K_2}$ - множество критериев минимизации, $K_2$ – число, (задача (2) -(4) это ВЗМП с однородными критериями минимизации). Предполагаем, что $f_k(X), k=\overline{1,K_2}$- непрерывные выпуклые функции (будем иногда их называть критериями минимизации):

$$\boldsymbol{K}_1\cup\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{K},\ \boldsymbol{K}_1\subset\boldsymbol{K},\ \boldsymbol{K}_2\subset\boldsymbol{K}. \quad (5)$$

$G(X)\leq B, X\geq 0$ - стандартные ограничения, $g_i(X)\leq b_i, i=1,\dots,M$, где $b_i$ - набор вещественных чисел, а функции $g_i(X)$ предполагаются непрерывными и выпуклыми.

Обозначим: $\boldsymbol{S}=\{X\in\boldsymbol{R}^n|G(X)\leq 0, X^{min}\leq X\leq X^{max}\}\neq\emptyset$ - (6)

это допустимое множество точек (или более кратко - допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (3)-(4) и тривиальными ограничениями $X\geq 0$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт.

Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2(X)$ введен в ВЗМП (1)-(4) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ с принципиально различными направлениями оптимизации. *Предполагаем*, что точки оптимума, полученные по каждому критерию, не совпадают хотя бы для двух критериев. Если все точки оптимума совпадают между собой для всех критериев, то считаем решение тривиально.

### 2.3. Теория векторной оптимизации

*Теория векторной оптимизации* направлена на решение векторных (многокритериальных) задач математического программирования (1)-(4) с однородными и неоднородными критериями. Теория векторной оптимизации включает теоретические основы: аксиоматика, принципы оптимальности и методы решения векторных задач, во-первых, с равнозначными критериями и, во-вторых, с заданным приоритетом критерия. В совокупности теория векторной оптимизации представляет математический аппарат моделирования и принятия оптимального решения «объекта принятия решений». В соответствии с этим определением «Теория векторной оптимизации" включает следующие разделы.

Основные теоретические понятия и определения, которые будут использованы при построении аксиоматики (аксиоматики Машунина Ю.К.), принципов оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации. Аксиоматика Машунина Ю.К. подразделяется на аксиоматику, принципы оптимальности и методы решения векторных задач, во-первых, с равнозначными критериями и во-вторых, с заданным приоритетом критерия.

«Объектом принятия решений» является: социальная система, экономическая и техническая система. Математический аппарат позволяет выбрать любую точку из множества точек, оптимальных по Парето, и показать ее оптимальность. Мы представили аксиоматику, принцип оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации (1)-(4) с равнозначными критериями и заданным приоритетом критериев. [6, 20]. Для простоты исследования критерии и ограничения ВЗМП (1)-(4) представлены полиномами второй степени, т.е. рассматриваются выпуклые векторные задачи, которые также включают векторные задачи линейного программирования. Выпуклые ВЗМП характеризуются свойством, что точка оптимума существует и такая точка только одна (Теорема Вейерштрасса).

### *2.4. Аксиомы и Аксиоматические методы: характеристика*

Аксиома - это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих утверждений (исходных положений) строится та или иная теория.

Аксиоматический метод — это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые Аксиомами теории. В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [1, 2].

В математике Аксиоматический метод зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала». Дальнейшее развитие аксиоматического метода получил в работах Д. Гильберта в виде так называемого метода формализма системы. Общая схема построения произвольной формальной системы («S») включает:

1. Язык системы («S»), в том числе алфавит – это перечень элементарных символов; правила образования (синтаксис), по которым строится формулы «S».

2. Аксиомы системы «S», которые представляют некоторое множество формул.

3. Правила вывода системы «S» [2].

В приложении к решению задачи векторной оптимизации (многомерной математики) аксиоматика подразделяется на два раздела:

1. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями;

2. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критериев.

Только при построении первоначальной аксиоматики возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения векторных задач математического программирования.

## 3. Multidimensional Mathematics. Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с равнозначными критериями

### *3.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями*

В соответствии с вышеизложенной трактовкой Язык системы многомерной математики включает: во-первых, нормализацию критериев, во-вторых, относительную оценку критериев (функций), и, в-третьих, минимальный относительный уровень.

*Определение 1*. (***Нормализация критерия***).

*Нормализация критериев* (математическая операция: сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X)\ \forall k \in K$, в одномерное пространство $\boldsymbol{R}^1$ (сама функция $f_k(X)\ \forall k \in K$ представляет собой функцию преобразования из $N$-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R^N}$ в $\boldsymbol{R^1}$). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования: $f_k(X) = a_k f'_k(X) + c_k \forall k \in K$, или

$$f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k \forall k \in K, \tag{7}$$

где $f'_k(X), k = \overline{1, K}$ - старое (до нормализации) значение критерия; $f_k(X), k = \overline{1, K}$ - нормализованное значение, $a_k$, $c_k$- постоянные.

Нормализация критериев $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k \ \forall k \in$К представляет простое (линейное) инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимизационной задаче нормализация критериев $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k \ \forall k \in$К не влияет на результат решения. Действительно, если решается выпуклая оптимизационная задача:

$$\boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}} f(X), \text{ то в точке оптимума } X^* \in S: \frac{df(X^*)}{\mathrm{d}X} = 0. \tag{8}$$

В общем случае (в том числе с нормализацией критерия (1)) решается задача:

$$\boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}} (a_k f'_k(X) + c_k), \tag{9}$$

$$\text{то в точке оптимума } X^* \in S: \quad \frac{d(a_k f(X^*) + c_k)}{\mathrm{d}X} = a_k \frac{d(f(X^*))}{\mathrm{d}X} + \frac{d(c_k)}{\mathrm{d}X} = 0. \tag{10}$$

Результат идентичен, т.е. точка оптимума $X_k^*, k = \overline{1, K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

*Определение 2*. (***Относительная оценка функции (критерия)***).

В векторной задаче (1)-(4) выполним нормализацию (7) вида:

$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \ \forall k \in \boldsymbol{K} \tag{11}$$

это относительная оценка $k$-го критерия в точке $X \in \boldsymbol{S}$, где $f_k^*$ наилучшая величина $k$-го критерия, полученная при решении ВЗМП (1)-(4) отдельно по $k$-му критерию;

$f_k^0$- наихудшая величина $k$-го критерия (антиоптимум) в точке $X_k^0$ (верхний индекс 0 - ноль) на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$;

в задаче на *max* (1), (3), (4) величина $f_k^0$ является наименьшим значением $k$-го критерия: $f_k^0 = min_{X \in S} f_k(X) \ \forall k \in K_1$,

а в задаче на *min* (2), (3), (4) величина $f_k^0$ является наибольшим значением $k$-го критерия: $f_k^0 = max_{X \in S} f_k(X) \ \forall k \in K_2$.

Относительная оценка $\lambda_k(X) \ \forall k \in K$, во-первых, измеряется в относительных единицах; во-вторых, относительная оценка $\lambda_k(X) \ \forall k \in K$: на допустимом множестве меняется с нуля в точке $X_k^0$: $\forall k \in \boldsymbol{K} \lim_{X \to X_k^0} \lambda_k(X) \, \lambda_k(X) = 0$, к единице в точке оптимума $X_k^*$: $\forall k \in \boldsymbol{K} \lim_{X \to X_k^*} \lambda_k(X) = 1$:

$$\forall k \in \boldsymbol{K} \ 0 \le \lambda_k(X) \le 1, \mathrm{X} \in \boldsymbol{S}, \tag{12}$$

В результате такой нормализации все критерии ВЗМП (1)-(4) соизмеримы в относительных единицах, что позволяет, сравнивать их друг с другом их при совместной оптимизации.

*Определение 3*. ***Операция сравнения относительных оценок критерия между собой***.

Так как, любая функция (критерий) представлен в относительных оценках функций $\lambda_k(X) \ \forall k \in K$, которые лежат пределах (2.8), то возможно сравнение относительных оценок по числовой величине. Для сравнения используется операция «вычитания». Если сравнивается две функции (критерия), измеренные в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)\ \forall k \in K$, то возможны три ситуации:

первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$;

вторая, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$;

третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$.

Первая и третья ситуация исследуется в разделе 2.3. В этом разделе исследуется вторая ситуация.

### *3.2. Аксиоматика векторной оптимизации с равнозначными критериями*

*Аксиома 1*. (***О равнозначности критериев в допустимой точке векторной задачи математического программирования***)

В векторной задаче два критерия с индексами $k \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ будем считать равнозначными в точке $X \in \boldsymbol{S}$, если относительные оценки по $k$-му и $q$-му критерию равны между собой в этой точке, т. е. $\lambda_k(X) = \lambda_q(X), k, q \in \boldsymbol{K}$.

*Пояснение*. Если в точке $X \in \boldsymbol{S}$ функции (критерии) будут равны:

$\lambda_l(X) = 0{,}45\ l \in \boldsymbol{K}$ и $\lambda_q(X) = 0{,}45, q \in \boldsymbol{K}$ (т.е. 45% от своей оптимальной величины, которая в относительных единицах равна 1), то такие критерии не «равны» друг другу, а равнозначны по своему числовому значению. И каждый из них несет свой функциональный смысл, который может быть получен, используя нормализацию критериев (11).

*Определение 4*. (***Определение минимального уровня среди всех относительных оценок критериев***). *Относительный уровень* λ в векторной задаче представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$::

$$\forall X \in \boldsymbol{S}\ \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \tag{13}$$

нижний уровень для выполнения условия (13) в точке $X \in \boldsymbol{S}$ определяется формулой

$$\forall X \in S\ \lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X). \tag{14}$$

Соотношения (13) и (14) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (14) определения min к ограничениям (13) и наоборот. Уровень λ позволяет объединить все критерии в векторной задаче одной числовой характеристикой λ и производить над ней определенные операции, тем самым, выполняя эти операции над всеми критериями, измеренными в относительных единицах. Уровень λ функционально зависит от переменной $X \in \boldsymbol{S}$, изменяя $X$, можем изменять нижний уровень - λ.

### *3.3. Принцип оптимальности векторной оптимизации с равнозначными критериями*

*Определение 5*. (***Принцип оптимальности 1 с равнозначными критериями***).

Векторная задача математического программирования при равнозначных критериях решена, если найдена точка $X^o \in \boldsymbol{S}$ и максимальный уровень $\lambda^o$ (верхний индекс $o$ - оптимум) среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in S} \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X) \tag{15}$$

Используя взаимосвязь выражений (13) и (14), преобразуем максиминную задачу (15) в экстремальную задачу:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in S} \lambda \tag{16}$$

$$\text{при ограничениях } \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}. \tag{17}$$

Полученную задачу (16)-(17) назовем λ-задачей. λ-задача (16)-(17) имеет ($N$+1) размерность, как следствие результат решения λ-задачи (16)-(17) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, ($N$+1)-я компонента которого суть величина λ°, т. е. $\boldsymbol{X^o} = \{x_1^o,\ x_2^o, \dots ,\ x_N^o,\ x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, ($N$+1) компонента вектора $\boldsymbol{X^o}$ выделена в $\lambda^o$.

Полученная пара $\{\lambda^o, X^o\} = \boldsymbol{X^o}$ характеризует оптимальное решение λ-задачи (16)-(17) и соответственно векторной задачи математического программирования (1)-(4) с равнозначными критериями, решенную на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Назовем в оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$, $X^o$ - оптимальной точкой, а $\lambda^o$ - максимальным уровнем.

Важным результатом алгоритма решения векторной задачи с равнозначными критериями (1)-(4) является следующая теорема.

*Теорема 1.* (***Теорема о двух наиболее противоречивых критериях в векторной задаче математического программирования с равнозначными критериями***).

В выпуклой векторной задаче математического программирования (1)-(4) при эквивалентных критериях, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия - обозначим их индексами $q \in \boldsymbol{K}, p \in \boldsymbol{K}$ (которые являются самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1, K}$), и для которых выполняется равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}, \tag{18}$$

и другие критерии определяются неравенством:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K},\ q \neq p \neq k. \tag{19}$$

Впервые доказательство теоремы 1 представлено в [6, стр.22], в дальнейшем повторено в работе [10, стр.234].

Вместе с тем, что точка $X^o$ является оптимальным решением ВЗМП.

***3.4. Математический алгоритм решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями***

Для решения векторной задачи математического программирования (1)-(4) разработан метод, основанный на нормализации критериев (7), аксиоматике и принципе максимина (гарантированного результата) (11). Конструктивный метод решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями включает два блока: *1-й блок* «Системный анализ» - разделен на три шага; *2-й блок* «Принятие оптимального решения», включающий два шага: построения λ-задачи и ее решения.

***Блок 1. Системный анализ***.

*Шаг 1*. Решается задача (1)-(4) по каждому критерию отдельно, т.е. для $\forall k \in \boldsymbol{K}_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in \boldsymbol{K}_2$ решается на минимум.

В результате получим:

$X_k^*$- точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$;

$f_k^* = f_k(X_k^*)$ – величина $k$-го критерия в этой точке, $k = \overline{1, K}$.

*Шаг 2*. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): $f_k^0,\ k = \overline{1, K}$. Для чего решается задача (1)-(4) для каждого критерия $k = \overline{1, \boldsymbol{K}_1}$ на минимум:

$f_k^0 = min\, f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, \boldsymbol{K}_1}$

для каждого критерия $k=\overline{1,\boldsymbol{K}_2}$ на максимум:

$$f_k^0=max\, f_k(X), G(X)\le B, X\ge 0, k=\overline{1,\boldsymbol{K}_2}. \tag{20}$$

В результате решения получим: $X_k^0=\{x_j, j=\overline{1,N}\}$ - точка оптимума по соответствующему критерию, $k=\overline{1,K}$; $f_k^0=f_k(X_k^0)$ – величина $k$-го критерия в точке, $X_k^0, k=\overline{1,K}$.

*Шаг 3*. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках $X^*=\{X_k^*, k=\overline{1,K}\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*)$, относительных оценок $\lambda(X^*)$:

$\lambda_k(X)=\frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, \forall k\in\boldsymbol{K}$.

$$F(X^*)=\{f_k(X_k^*), q=\overline{1,K}, k=\overline{1,K}\}=\begin{vmatrix} f_1(X_1^*),\dots,f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*),\dots,f_K(X_K^*)\end{vmatrix}, \tag{21}$$

$$\lambda(X^*)=\{\lambda_q(X_k^*), q=\overline{1,K}, k=\overline{1,K}\}=\begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*),\dots,\lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*),\dots,\lambda_K(X_K^*)\end{vmatrix}. \tag{22}$$

В целом по задаче относительная оценка (22) $\lambda_k(X), k=\overline{1,K}$ лежит в пределах:

$0\le\lambda_k(X)\le 1, k=\overline{1,K}$.

***Блок 2. Принятие оптимального решения в ВЗМП.*** Включает два шага – 4, 5.

*Шаг 4*. Построение λ-задачи. Создание λ-задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с эквивалентными критериями, которые на втором этапе преобразуются в стандартную задачу математического программирования, названной λ-задачей. Для построения максиминная задача используем определение 2:

$\forall X\in\boldsymbol{S}\;\; \lambda=\boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k\in K}}\lambda_k(X)$.

Нижний уровень λ максимизируем по $X\in S$. В результате сформулируем максиминную задачу оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o=\boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X\in S}}\boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k\in K}}\lambda_k(X). \tag{23}$$

На втором этапе задача (23) преобразуется в стандартную задачу математического программирования, названную λ-задача:

$$\lambda^o=\boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X\in S}}\,\lambda, \qquad\qquad \lambda^o=\boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X\in S}}\,\lambda, \tag{24}$$

$$\lambda-\lambda_k(X)\le 0, k=\overline{1,K}, \qquad \to \qquad \lambda-\frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}\le 0, k=\overline{1,K}, \tag{25}$$

$$G(X)\le B, X\ge 0, \qquad\qquad G(X)\le B, X\ge 0, \tag{26}$$

где вектор неизвестных $\boldsymbol{X}$ имеет размерность $N+1$: $X=\{\lambda, x_1,\dots,x_N\}$.

*Шаг 5*. Решение λ-задачи. λ-задача (24)-(26) – стандартная задача выпуклого программирования и для ее решения используются стандартные методы, в результате решения λ-задачи получим:

$$\boldsymbol{X^o}=\{\lambda^o, X^o\} \text{ - точку оптимума;} \tag{27}$$

$$f_k(X^o), k=\overline{1,K}\text{- величины критериев в этой точке;} \tag{28}$$

$$\lambda_k(X^o)=\frac{f_k(X^o)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, k=\overline{1,K}\text{- величины относительных оценок;} \tag{29}$$

$\lambda^o$ - максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$, гарантированным результатом в относительных единицах. $\lambda^o$ гарантирует, что в точке $X^o$ относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ больше или равны $\lambda^o$:

$$\lambda_k(X^o) \geq \lambda^o, k = \overline{1,K} \text{ or } \lambda^{\boldsymbol{o}} \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, X^o \in \boldsymbol{S}, \quad (30)$$

и в соответствии с теоремой 1 точка оптимума $X^o = \{\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{o}}, x_1, \dots, x_N\}$ является оптимальной по Парето.

**4. Multidimensional Mathematics. Аксиоматика и принцип оптимальности векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия**

В определении 3 указано, что если сравнивать две функции (критерия), измеренных в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)$ $\forall k \in K$, то возможны три ситуации. Вторая ситуация, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$ исследована в разделе 3.2 (равнозначные критерии). Ситуации: первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$, и третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$, исследуются в этом разделе. Такие ситуации определяются, как задачи с приоритетом критерия.

Для построения методов решения проблемы векторной оптимизации с приоритетом критерия мы введем следующие определения: О приоритете одного критерия над другим; О числовом выражении приоритета критерия над другим; О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим; О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия; О подмножестве точек, приоритетных по критерию; Принцип оптимальности 2 - Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия, [20, 22].

***4.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с заданным приоритетом критерия***

***Язык системы*** аксиоматики решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия включает определения: 1) Приоритет одного критерия над другим; 2) Числовое значение приоритета критерия; 3) Нижний уровень критерия среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

*Определение 6*. (***О приоритете одного критерия над другим***).

*Критерий* $q \in \boldsymbol{K}$ *в* векторной задаче *в точке* $X \in \boldsymbol{S}$ *имеет приоритет* над другими критериями $k = \overline{1,K}$, если относительная оценка $\lambda_q(X)$ по этому критерию больше или равна относительных оценок $\lambda_k(X)$ других критериев, т. е.:

$$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, \quad (31)$$

и строгий приоритет, если хотя бы для одного критерия $t \in \boldsymbol{K}$: $\lambda_q(X) > \lambda_k(X), t \neq q$, а для остальных критериев $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, k \neq t \neq q$.

Введением определения приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ в ВЗМП (1)-(4) выполнено переопределение раннего понятия приоритета. Если раньше в него вкладывалось интуитивное понятие о важности этого критерия, то сейчас эта “важность” определяется математически: чем больше относительная оценка $q$-го критерия над другими, тем он важнее (приоритетнее), и наиболее высокий приоритет в точке оптимума $X_k^*, \forall q \in \boldsymbol{K}$ .

Из определения выражения приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ в векторной задаче в уравнениях (1)-(4) следует, что возможная область соответствующая множеству точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$ , которое характеризуется как $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \forall k \neq q, \forall X \in \boldsymbol{S}_q$. Однако, вопрос на сколько критерий $q \in \boldsymbol{K}$ в точке множества $\boldsymbol{S}_q$ имеет больший приоритет относительно другого критерия остается открытым. Для ответа на этот вопрос, мы вводим коэффициент связи между парой относительных оценок $q$ и $k$, что, в целом, представляет вектор:

$P^q(X) = \{p_k^q(X) \mid k = \overline{1,K}\}, q \in \boldsymbol{K} \; \forall X \in \boldsymbol{S}_q$.

*Определение 7*. (***О числовом выражении приоритета критерия над другим***).

В векторной задаче с приоритетом критерия $q$-го над другими критериями $k = \overline{1,K}$, для $\forall X \in \boldsymbol{S}_q$, вектор $P^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$, больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1,K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}. \quad (32)$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем *числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями* $k = \overline{1,K}$.

*Определение 7а*. (***О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другими***). В векторной задаче (1)-(4) с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$ для $\forall X \in \boldsymbol{S}$ вектор $P^q = \{p_k^q, k = \overline{1,K}\}$, считается заданным лицом, принимающим решения, (ЛПР), если задана каждая компонента этого вектора. Заданная ЛПР компонента $p_k^q$, с точки зрения ЛПР, показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$ больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$. Вектор $p_k^q, k = \overline{1,K}$ является заданным числовым выражением приоритета $q$-го критерия над остальными критериями $k = \overline{1,K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X), k = \overline{1,K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}. \quad (33)$$

Векторная задача (1)–(4), в которой задан приоритет какого-либо из критериев, называют векторной задачей с заданным приоритетом критерия. Проблема задачи вектора приоритетов возникает тогда, когда необходимо определить точку $X^o \in \boldsymbol{S}$ по заданному вектору приоритетов.

При операции сравнения относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, аналогично, как и в задаче с эквивалентными критериями, введем дополнительную числовую характеристику $\lambda$, которую назовем *уровнем*.

*Определение 8*. ***О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия***.

Уровень $\lambda$ является нижним среди всех относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, таким, что

$$\lambda \leq p_k^q \lambda_k(X),\ k = \overline{1,K},\ q \in \boldsymbol{K},\ \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S; \quad (34)$$

нижний уровень для выполнения условия (54) определяется

$$\lambda = min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S. \quad (35)$$

Соотношения (34) и (35) являются взаимосвязанными и служат в дальнейшем переходом от операции определения min к ограничениям и наоборот. В разделе 4 мы дали определение точки $X^o \in \boldsymbol{S}$, оптимальной по Парето, с эквивалентными критериями. Рассматривая данное определение как исходное, мы построим ряд аксиом деления допустимого множества точек $\boldsymbol{S}$, во-первых, как подмножество точек, оптимальных по Парето $S^o$, и, во-вторых, на подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q \in \boldsymbol{K}$, приоритетным на $q$ -му критерию.

***4.2. Аксиома векторной оптимизации с приоритетными критериями***

**Аксиома 2.** *(О подмножестве точек, приоритетных по критерию)***.**

В векторной задаче (1)-(4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$ называется областью приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, если

$\forall X \in \boldsymbol{S}_q\ \forall k \in \boldsymbol{K}\ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k.$

Это определение распространяется и на множество точек $\boldsymbol{S}^o$, оптимальных по Парето, что дается следующим определением.

**Аксиома 2а.** (*О подмножестве точек, приоритетных по критерию, на множестве точек оптимальных по Парето*).

В векторной задаче (1)-(4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \mathrm{S}$ называется областью приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, если $\forall \mathrm{X} \in S_q^o\ \forall k \in K\ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k$.

Дадим некоторые пояснения.

Аксиома 2 и 2а позволила представить в векторной проблеме (1)–(4) допустимое множество точек $\boldsymbol{S}$, включая подмножество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$, в подмножества:

одно подмножество точек $\boldsymbol{S}' \subset \boldsymbol{S}$, где критерии эквивалентны, и подмножество точек $\boldsymbol{S}'$, пересекаясь с подмножеством точек $\boldsymbol{S}^o$, выделяет подмножество точек, оптимальных по Парето, в подмножество с эквивалентными критериями $\boldsymbol{S}^{oo} = \boldsymbol{S}' \cap \boldsymbol{S}^o$, которое, как это показано далее, состоит из одной точки $X^o \in \boldsymbol{S}$, т.е. $X^o = \boldsymbol{S}^{oo} = \boldsymbol{S}' \cap \boldsymbol{S}^o, \boldsymbol{S}' \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$;

«$\boldsymbol{K}$» подмножеств точек, где у каждого критерия $q = \overline{1, K}$ имеется приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}, q \neq k$. Таким образом, выполнено разделение, во-первых, множества всех допустимых точек $\boldsymbol{S}$, на подмножества $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}$, и, во-вторых, разделение подмножества точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S}^o$, на подмножества $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}$.

Отсюда верны следующие соотношения:

$$\boldsymbol{S}' \cup \left(\cup_{q \in K} \boldsymbol{S}_q^o\right) \equiv \boldsymbol{S}^\circ, \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}.$$

Мы заметим, что подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o$, с одной стороны, включено в область (подмножество точек) имеющих приоритет критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями: $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$,

и с другой стороны, на подмножество точек, оптимальны поз Парето: $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ \subset \boldsymbol{S}$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 5) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in \boldsymbol{S}$ (посредством вектора:

$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}$, формироваться и выбирать:

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q$, который включен в множество точек $\boldsymbol{S}$, $\forall q \in \boldsymbol{K}\ X \in \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, (такое подмножество точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это вне статьи);

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q^o$, который включен в ряд точек $\boldsymbol{S}^o$, оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ$.

| Множество допустимых точек $X \in \boldsymbol{S}$ $\rightarrow$ | Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$ $\rightarrow$ | Подмножество точек, оптимума по Pareto $X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$ $\rightarrow$ | Отдельная точка, $\forall X \in \boldsymbol{S}$ $X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$ |
|---|---|---|---|

Это самый важный результат, который позволит вывести принцип оптимальности и построить методы выбора любой точки из множества точек, оптимальных по Парето.

***4.3. Принцип оптимальности решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия***

Определение 8**.** (*Принцип оптимальности 2. Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия*). Векторная задача (1)–(4) с заданным приоритетом $q$-го критерия $p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ считается решенной, если найдена точка $X^o$ и максимальный уровень $\lambda^o$ среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max_{X \in S} min_{k \in K}} p_k^q \lambda_k(X), q \in \boldsymbol{K}. \tag{36}$$

Используя взаимосвязь (34) и (35), преобразуем максиминную задачу (36) в задачу:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max_{X \in S}} \lambda \ , \tag{37}$$

$$\text{at restriction} \quad \lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}. \tag{38}$$

Задачу (37)-(38) назовем $\lambda$-задачей с приоритетом $q$-го критерия.

Результатом решения $\lambda$-задачи будет точка $\boldsymbol{X^o}$={$X^o$, $\lambda^o$} – она же является и результатом решения ВЗМП (1)-(4) с заданным приоритетом критерия, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата.

В оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$, $\boldsymbol{X^o}$ - оптимальная точка, а $\lambda^o$ - максимальный нижний уровень. Точка $X^o$ и уровень $\lambda^o$ соответствуют ограничениям (4), которые можно записать как: $\lambda^o \leq p_k^q \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}$.

Эти ограничения являются основой оценки правильности результатов решения в практических векторных задачах оптимизации.

Определение 1 и 2 «Принципы оптимальности» дают возможность сформулировать понятие операции «opt».

**Определение 9**. (*Математическая операция «opt»*).

В векторной задаче (1)-(4), которая представлена критериями «max» и «min», математическая операция «opt» состоит в определении точки $X^o$ и максимального нижнего уровня $\lambda^o$ , в котором все критерии измеряются в относительных единицах:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}, \tag{39}$$

т.е. все критерии $\lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}$ равны или больше максимального уровня $\lambda^o$, (поэтому $\lambda^o$ также называется гарантированным результатом).

*Теорема 2.* (***Теорема о наиболее противоречивых критериях в векторной задаче с заданным приоритетом***).

Если в выпуклой векторной задаче математического программирования максимизации (1)-(4) задан приоритет $q$-го критерия $p_k^q, k = \overline{1, K}, \forall q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, в точке оптимума $X^o \in \boldsymbol{S}$, полученной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, всегда найдется два критерия с индексами $r \in \boldsymbol{K}$, $t \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется строгое равенство из:

$$\lambda^o = p_k^r \lambda_r(X^o) = p_k^t \lambda_t(X^o), r, t, \in \boldsymbol{K}, \tag{40}$$

и другие критерии определяются неравенствами:

$$\lambda^o \leq p_k^q (X^o), k = \overline{1, K}, \forall q \in \boldsymbol{K}, q \neq r \neq t \ . \tag{41}$$

Критерии с индексами $r \in \boldsymbol{K}$, $t \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется равенство (41), называются наиболее противоречивыми.

Доказательство. Аналогично теореме 2 [20].

Заметим, что в (40) и (41) индексы критериев $r \in \boldsymbol{K}$, $t \in \boldsymbol{K}$ могут совпадать с индексом $q \in \boldsymbol{K}$.

*Следствие теоремы 1*. О равенстве оптимального уровня и относительных оценок в векторной задаче с двумя критериями с приоритетом одного из них.

В выпуклой векторной задаче математического программирования с двумя эквивалентными критериями, решаемой на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $X^o$ всегда выполняется равенство: при приоритете первого критерия над второй:

$$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = p_2^1(X^\circ)\lambda_2(X^o), X^o \in \boldsymbol{S}\ , \tag{42}$$

где $p_2^1(X^\circ) = \lambda_1(X^o)/\lambda_2(X^o)$,

при приоритете второго критерия над первым:

$\lambda^o = \lambda_2(X^o) = p_1^2(X^\circ)\lambda_1(X^o), X^o \in \boldsymbol{S}$,

где $p_1^2(X^\circ) = \lambda_2(X^o)/\lambda_1(X^o)$.

***4.4. Метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия***

**Шаг 1**. Мы решаем векторную задачу с равнозначными критериями. Алгоритм решения представлен в разделе 4.4.

В результате решения получаем:

оптимальные точки по каждому критерию отдельно $X_k^*, k = \overline{1,K}$ и размеры критериальных функций в этих точках $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1,K}$, которые представляют граница множества точек, оптимальных по Парето;

точки антиоптимума по каждому критерию $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1,N}$ и наихудшей неизменной части каждого критерия$f_k^0 = f_k(X_k^0), k = \overline{1,K}$;

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$ оптимальная точка, как результат решения VPMP с эквивалентными критериями, т. Е. Результата решения максимальной задачи и λ-задачи, построенной на ее основе;

$\lambda^\circ$ - максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^\circ)$, или гарантированный результат в относительных единицах, $\lambda^\circ$ гарантирует, что все относительные оценки $\lambda_k(X^\circ)$ равны или больше $\lambda^\circ$:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, X^\circ \in S \tag{43}$$

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов решения векторной задачи с эквивалентными критериями.

Если полученные результаты удовлетворяют лицо, принимающее решение, то конец, иначе выполняются последующие расчеты.

Дополнительно вычислим: в каждой точке $X_k^*, k = \overline{1,K}$ определим величины всех критериев $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1,K}$ , которые представляют границу множества Парето, и относительных оценок: $\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\}$, $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$:

$$F(X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*) \dots f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*) \dots f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \quad \lambda(X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*) \dots \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*) \dots \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \tag{44}$$

Матрицы критериев $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$ показывают величины каждого критерия $k = \overline{1, K}$ при переходе от точки оптимума $X_k^*, k \in \boldsymbol{K}$ к другой $X_q^*, q \in \boldsymbol{K}$;

в точке оптимума при равнозначных критериях $X^o$ вычислим величины критериев и относительных оценок:

$$f_k(X^o), k = \overline{1, K};\ \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, \tag{45}$$

которые удовлетворяют неравенству (43). В других точках $X \in \boldsymbol{S^o}$ меньший из критериев в относительных единицах $\lambda = \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k \in K}} \lambda_k(X)$ всегда меньше $\lambda^o$. Запоминаются данные λ-задачи (24)-(26). Эта информация и является основой для дальнейшего изучения множества Парето.

**Шаг 2**. *Выбор приоритетного критерия* $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории (см. теорему 1) известно, что в оптимальной точке $X^o$ всегда имеется два наиболее противоречивых критерия $q \in \boldsymbol{K}$ и $v \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_v(X^o), q, v \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$, а для остальных выполняется неравенства:

$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K},\ q \neq v \neq k.$

Как правило, из этой пары выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить, такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q \in \boldsymbol{K}$.

**Шаг 3**. *Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия* $q \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$ из матрицы (40) определим числовые пределы изменения величины критерия: в натуральных единицах $f_q(X)$ и в относительных единицах $\lambda_q(X)$, которые лежат в следующих пределах:

$$f_k(X^o) \leq f_q(X) \leq f_q(X_q^*), k \in \boldsymbol{K} \tag{46}$$

где $f_q(X_q^*)$ выводится из матрицы уравнения $F(X^*)$ (44), все критерии показывают размеры, измеренные в физических единицах, $f_k(X^o), k = \overline{1, K}$ из уравнения (45), и, в относительных единицах:

$$\lambda_k(X^o) \leq \lambda_q(X) \leq \lambda_q(X_q^*), k \in \boldsymbol{K}, \tag{47}$$

где $\lambda_q(X_q^*)$ выводится из матрицы $\lambda(X^*)$, все критерии показывают размеры, измеренные в относительных единицах (отметим, что $\lambda_q(X_q^*) = 1), \lambda_q(X^o)$ из уравнения (64).

Как правило, Выражения (46) и (47) выдаются на дисплей для анализа.

**Шаг 4**. *Выбор величины приоритетного критерия* (Принятие решения).

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов расчетов (44) и из неравенства в натуральных единицах (46) выбирает числовую величину $f_q$, $q \in \boldsymbol{K}$:

$$f_q(X^o) \leq f_q \leq f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}. \tag{48}$$

Для выбранной величины критерия $f_q$ необходимо определить вектор неизвестных $X^{oo}$, для этого проводим последующие вычисления.

Шаг 5. *Расчет относительной оценки.*

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q$ вычисляется относительная оценка:

$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0}$, которая при переходе от точки $X^o$ к $X_q^*$, в соответствии с (43) лежит в пределах: $\lambda_q(X^o) \leq \lambda_q \leq \lambda_q(X_q^*) = 1.$

Шаг 6. *Вычисление коэффициента линейной аппроксимации.*

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (48) и соответственно относительной оценки $\lambda_q(X)$, используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности ρ между $\lambda_q(X^o), \lambda_q$:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q^* - \lambda_q^0}, q \in \boldsymbol{K}.$$

Шаг 7. *Вычисление координат приоритетного критерия с величиной* $f_q$.

В соответствии с (44) координаты точки приоритетного критерия $X_q$ лежат в следующих пределах: $X^o \le X_q \le X_q^*, q \in \boldsymbol{K}$

Предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1^q, \dots, x_N^q\}$ определим координаты точки приоритетного критерия с величиной $f_q$ с относительной оценкой (45):

$$X_q = \{x_1^q = x_1^o + \rho(x_q^*(1) - x_1^o), \dots, \\ x_N^q = x_N^o + \rho(x_q^*(N) - x_N^o)\}, \quad (49)$$

где $X^o = \{x_1^o, \dots, x_N^o\}$, $X_q^* = \{x_q^*(1), \dots, x_q^*(N)\}$..

Шаг 8. *Вычисление основных показателей точки* $x^q$.

Для полученной точки $x^q$ (49), вычислим:

все критерии в натуральных единицах: $F^q = \{f_k(x^q), k = \overline{1, K}\}$;

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k(x^q) = \frac{f_k(x^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}; \quad (50)$$

вектор приоритетов: $P^q = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(x^q)}{\lambda_k(x^q)}, k = \overline{1, K}\}$;

максимальную относительную оценку: $\lambda^{oq} = \min (p_k^q \lambda_k(x^q), k = \overline{1, K})$.

Аналогично (50) может быть рассчитана любая точка из множества Парето: $\boldsymbol{X_t^o} = \{\boldsymbol{\lambda_t^o}, \boldsymbol{X_t^o}\} \in \boldsymbol{S^o}$.

***Анализ результатов***. Рассчитанная величина критерия $f_q(X_t^o), q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной$\Delta f_q$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q|$ определяется ошибкой линейной аппроксимации. Результаты исследования симметрии в ВЗМП с заданным приоритетом аналогичны, как и для ВЗМП с равнозначными критериями, но центр симметрии смещен в сторону приоритетного критерия.

## 5. Прикладная многомерная математика: Векторная задача нелинейного программирования – модель развития инженерных систем.

В этом разделе мы рассматриваем отдельную задачу многомерной математики: векторную задачу нелинейного программирования. Математическое и программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования, алгоритмы решения которой при равнозначных критериях представлен в разделе 3 и при заданном приоритете критерия в разделе 4, [20, 22, 43, 45].

### *5.1. Векторная задача нелинейного программирования (ВЗНП)*

Векторная задача нелинейного программирования (ВЗНП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев. ВЗНП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗЛП. В соответствии с этими определениями представим векторную задачу нелинейного программирования с неоднородными критериями.

$$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X) = c_{0k} + c_{1k}x_1 + \cdots$$
$$+c_{N+1,k}x_1x_2 + \cdots + c_{n1,k}x_1^2 + \cdots + c_{nnk}x_n^2, k = \overline{1, K_1}, \quad (51)$$
$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X) = c_{0k} + c_{1k}x_1 + \cdots + c_{N+1,k}x_1x_2 + \cdots$$
$$+c_{n1,k}x_1^2 + \cdots + c_{nnk}x_n^2, k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (52)$$
$$a_{0k} + a_{1i}x_1 + \cdots + a_{N+1,i}x_1x_2 + \cdots + a_{n1,i}x_1^2 + \cdots + a_{nni}x_n^2 \leq b_i, i = \overline{1, M}, \quad (53)$$
$$\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t) \geq b_k(t), k \in K, \quad 0 \leq x_j(t) \leq u_j\ , j = \overline{1, N}, \quad (54)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - вектор переменных, т.е. это вектор из $N$-мерного евклидова пространства $R^N$, (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = (1, \dots, N)$;

$F(X)$- вектор-функция (векторный критерий), имеющая $K$ – компонент-функций. Функция представляет квадратичный полином.

Множество критериев (полиномов) $K$ состоит из подмножества $K_1$ компонент максимизации и подмножества $K_2$ минимизации: $K = K_1 \cup K_2$ , для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя max и min;

$F_1(X) = \{max\ f_k(X), k = \overline{1, K_1}$ - это векторный критерий (51), каждая компонента которого максимизирует, $K_1$ – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$- множество критериев максимизации (задача (51), (53)-(54) представляют собой ВЗНП с однородными критериями максимизации);

$F_2(X) = \{min\ f_k(X), k = \overline{1, K_2}$ - векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ - множество критериев минимизации, $K_2$ – число критериев, (задача (52),(53)-(54) это ВЗНП с однородными критериями минимизации):

$K_1 \cup K_2 = K,\ K_1 \subset K,\ K_2 \subset K.$

(53) - стандартные нелинейные ограничения (в виде полиномов).

(54) – ограничения, накладываемые на критерии.

$S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$ — *это допустимое множество* точек, задающиеся стандартными ограничениями (53)-(54) и тривиальными ограничениями $0 \leq x_j(t) \leq u_j, j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт. Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$ может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2(X)$ введен в ВЗНП (51)-(54) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев $K_1, K_2$ с принципиально различными направлениями оптимизации.

Векторная задача нелинейного программирования (51)-(54) может рассматриваться как $K$-мерная задача оптимизации, где размерность критериев $K = K_1 \cup K_2$, с множеством параметров $N$.

### *5.2. Структура программного обеспечения решения векторной задачи нелинейного программирования*

Для решения векторной задачи нелинейного программирования (51)-(54) при равнозначных критериях разработана программа в системе MATLAB с четырьмя критериями (56) и двумя параметрами, которая по существу представляет программу – шаблон для написания и решения других векторных задач нелинейного программирования (51)-(54) – математических моделей инженерных систем [20, 21, 22].

Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования (51)-(54) при равнозначных критериях реализовано на основе алгоритма решения ВЗНП, изложенного в разделе 3 и использования программы FMINCON(…), представленной в системе MATLAB.

При использовании программы FMINCON(…) необходимо разработать две подпрограммы – функции:

Первая функция включает два блока: первый блок предназначен для оценки в точке $X$ критерия $f_k(X)\ \forall k\in K$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{df_k(X)}{\mathrm{d}X}\ \forall k\in K$;

Вторая функция включает те же два блока только для ограничений: для оценки в точке X ограничения $g_i(X)\ \forall i\in M$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{dg_i(X)}{\mathrm{d}X}\ \forall i\in M$.

Программа FMINCON(…) используется на первом шаге алгоритма решения ВЗНП раздела 2.2.3 (максимизации критериев) и на втором шаге этого алгоритма (минимизации критериев). В дальнейшем Программа FMINCON(…) используется в соответствии с алгоритмом раздела 2.2.3 на 4 и 5 шаге, где решается λ-задача.

В целом при нелинейных ограничениях программное обеспечение решения ВЗНП включает: К*2(1 шаг) + К*2(2 шага)+2(λ-задача) обращений к функции FMINCON(…). Так как критерии и ограничения ВЗНП индивидуальны, то для каждой ВЗНП пишется индивидуальное программное обеспечение, но по структуре аналогично представленному программному обеспечению.

Для решения ВЗНП (4.1)-(4.4) разработанная программа в [33] представляет программу – шаблон для написания и решения других ВЗНП – математических моделей инженерных систем.

### *5.3. Математическая подготовка для решения векторной задачи нелинейного программирования*

***Пример* 1.**

***Дано***. Рассматривается *векторная задача нелинейного (выпуклого) программирования* с четырьмя однородными критериями. В качестве критериев используем окружность, а на переменные наложены линейные ограничения, поэтому задача решается устно.

$$opt\ F(X)=\{min\ F_2(X)=min\ f_1(X)\equiv(x_1-80)^2+(x_2-80)^2, \quad (55)$$
$$min\ f_2(X)\equiv(x_1-80)^2+(x_2-20)^2, \quad (56)$$
$$min\ f_3(X)\equiv(x_1-20)^2+(x_2-20)^2, \quad (57)$$
$$min\ f_4(X)\equiv(x_1-20)^2+(x_2-80)^2, \quad (58)$$
$$\text{при ограничениях } 0\le x_1\le 100,\ 0\le x_2\le 100, \quad (59)$$

***Требуется***. Найти неотрицательное решение $x_1, x_2$ в системе неравенств (59) такое, при котором функции $f_1(X), f_2(X)\ f_3(X), f_4(X)$ принимают, возможно минимальное значение.

***Решение векторной задачи нелинейного программирования.***

Для решения задачи (55)-(59) по каждому критерию, а в дальнейшем и λ-задачи, используется система MATLAB (функция fmincon(…) - решение нелинейной задачи оптимизации) [23].. Решение представлено, как последовательность шагов.

*Шаг 1*. Решается векторная задача (55)-(59) на max по каждому критерию отдельно. Результаты решения ВЗМП (55)-(59) по каждому критерию:

1 критерий $X_1^* = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -12800;$

2 критерий $X_2^* = \{x_1 = 0, x_2 = 100\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -12800;$

3 критерий $X_3^* = \{x_1 = 100, x_2 = 100\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -12800;$

4 критерий $X_4^* = \{x_1 = 100, x_2 = 0\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = -12800;$

*Шаг 2*. Решается векторная задача (55)-(59) на min по каждому критерию отдельно. Результаты решения ВЗМП (55)-(59) по каждому критерию:

1 критерий $X_1^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 80\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 0:$

2 критерий $X_2^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 20\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 0:$

3 критерий $X_3^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 20\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = 0:$

4 критерий $X_4^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 80\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = 0:$

Представим геометрическую интерпретацию результатов решения ВЗНП (55)-(59) на рис. 1.

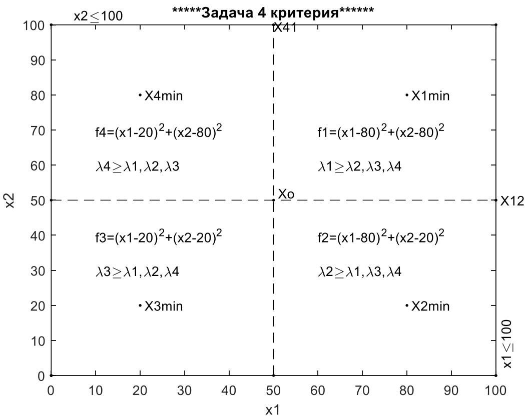


Рис. 1. Ограничения ВЗМП (55)-(59), точки оптимума $X_1^0 = X1min, X_2^0 = X2min, X_3^0 = X3min, X_4^0 = 4min$ и относительные оценки.

*Шаг 3*. Выполняется системный анализ множества точек Парето.

В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1,K}\}$, определяются величины целевых функций $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$:

$$F(X^*) = \{\{f_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K}\},\ \lambda(X^*) = \{\{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K}\},$$

В системе MATLAB в точках оптимума: X1min, X2min, X3min, X4min вычисление этих функций будет следующим (Результат системного анализа):

$$F(X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*)\ f_2(X_1^*)\ f_3(X_1^*)\ f_4(X_1^*) \\ f_1(X_2^*)\ f_2(X_2^*)\ f_3(X_2^*)\ f_4(X_2^*) \\ f_1(X_3^*)\ f_2(X_3^*)\ f_3(X_3^*)\ f_4(X_3^*) \\ f_1(X_4^*)\ f_2(X_4^*)\ f_3(X_4^*)\ f_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0\ 3600\ 7200\ 3600 \\ 3600\ 0\ 3600\ 7200 \\ 7200\ 3600\ 0\ 3600 \\ 3600\ 7200\ 3600\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\lambda(X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*)\ \lambda_2(X_1^*)\ \lambda_3(X_1^*)\ \lambda_4(X_1^*) \\ \lambda_1(X_2^*)\ \lambda_2(X_2^*)\ \lambda_3(X_2^*)\ \lambda_4(X_2^*) \\ \lambda_1(X_3^*)\ \lambda_2(X_3^*)\ \lambda_3(X_3^*)\ \lambda_4(X_4^*) \\ \lambda_1(X_4^*)\ \lambda_2(X_4^*)\ \lambda_3(X_4^*)\ \lambda_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.0\ 0.7188\ 0.4375\ 0.7188 \\ 0.7188\ 1.0\ 0.7188\ 0.4375 \\ 0.4375\ 0.7188\ 1.0\ 0.7188 \\ 0.7188\ 0.4375\ 0.7188\ 1.0 \end{vmatrix}.$$

В точках оптимума $X_k^*, k = \overline{1,K}$ все относительные оценки (нормализованные критерии) равны единице: $\lambda_k(X_k^*) = \frac{f_k(X_k^*)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0} = 1, k = \overline{1,K}, K = 4.$

В точках оптимума $X_k^0, k = \overline{1,K}$ все относительные оценки равны нулю:

$$\lambda_k(X_k^0) = \frac{f_k(X_k^0)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0} = 0, k = \overline{1,K}, K = 4.$$

Отсюда $\forall k \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}, 0 \le \lambda_k(X) \le 1.$

*Шаг 4*. Строится λ-задача.

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}}\, \lambda, \tag{60}$$

При ограничениях: $\lambda - \frac{f_1(X)-f_1^0}{f_1^*-f_1^0} \le 0,\ \lambda - \frac{f_2(X)-f_2^0}{f_2^*-f_2^0} \le 0,\ \lambda - \frac{f_3(X)-f_3^0}{f_3^*-f_3^0} \le 0, \lambda - \frac{f_4(X)-f_4^0}{f_4^*-f_4^0} \le 0,$

$$0 \le x_1 \le 100,\ 0 \le x_2 \le 100.$$

*Шаг 5*. Решение λ-задачи. Результаты решения λ-задачи:

$\boldsymbol{X^o} = \{ x_1 = 50.0, x_2 = 50.0, x_3 = 0.8594\}$**.**

Xo= {$x_1$=50.0, $x_2$= 50.0, $x_3$ =0.8594} – точка оптимума, где

$x_3 = \lambda^o$; а $x_1, x_2$ соответствует $x_1$, $x_2$ задачи (41)-(45);

Lo = $\lambda^o$= 0.8594 представляет оптимальное значение целевой функции.

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, а также точки оптимума $X^o$ и $\lambda^o$, которые получены на пересечении, в трех мерной системе координат $x_1, x_2, \lambda$ показаны на рис. 2.

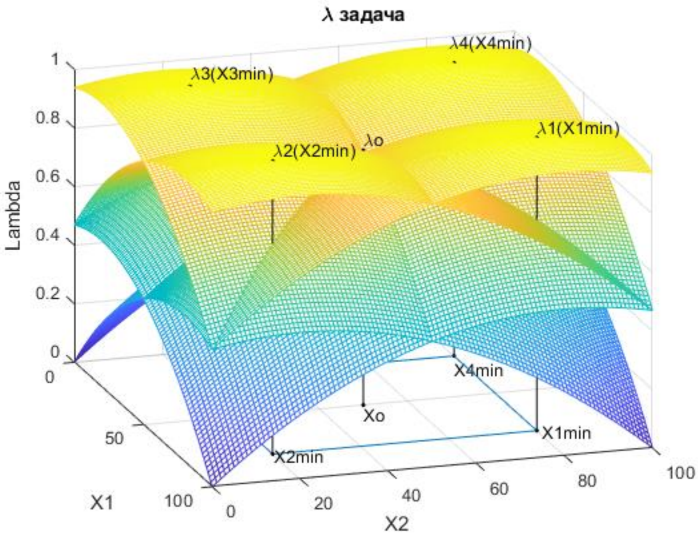


Рис. 2. Результаты решения ВЗМП (55)-(59) и (70): Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, точки оптимума $X^o$ и $\lambda^o$.

На рис. 3, 4 видно, что область (множество точек) ограниченная функцией f1 $f1 = (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 80)^2$ - характеризуется тем, что $\lambda_1(X) \ge \lambda_k(X), k = \overline{2,4}$, $X \in \boldsymbol{S_1}$, (на рис. 3 показано, как λ1>λ2, λ3, λ4), т. е. область $\boldsymbol{S_1}$ приоритетна по первому критерию. В этой области приоритет первого критерия относительно остальных всегда больше или равен единице: $p_k^1(X) = \lambda_1(X)/\lambda_k(X) \ge 1, \forall X \in \boldsymbol{S_1}.$

Аналогично показаны области (множества точек) приоритетные по соответствующему критерию, в совокупности они дают множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o}$, а оно (для данного примера) равно множеству допустимых точек: $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o} \cup X^o = \boldsymbol{S}$.

Такимобразом, векторная оптимизация является математическим аппаратом исследования аксиом в различных системах.

**6. Математическая постановка проблемы. Построение математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности.**

Химический состав материала изделия определяется (на единицу объема, веса) процентным содержанием некоторого множества компонент материала, которые в сумме равны ста процентам. Состав материала, характеризуется определенным набором функциональных характеристик, которые включают в себя механические и физико-химические свойства материалов. Одна группа свойств (функциональных характеристик) материала характеризуется тем, что их желательно по своей числовой величине получить как можно больше (например, прочность), другая группа свойств характеризуется тем, что их желательно по своей числовой величине получить как меньше. Улучшение по одной из этих характеристик приводит к ухудшению другой. В целом требуется подобрать такой состав материала, чтобы свойства материала были как можно лучше.

***6.1. Математическая модель структуры материала***

Рассматривается состав материала какого-либо изделия, технической системы, которая зависит от ряда компонент материала: $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_V\}$, где $\boldsymbol{V}$ - множества компонент материала, $Y = \{y_j, j = \overline{1, V}\}$, $V$ - число компонент, из которых может быть составлен (изготовлен) материал, $y_V$ - величина в процентах $v$-ой компоненты материала, каждая из которых лежит в заданных пределах:

$$y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, \ v = \overline{1, V}, \tag{61}$$

где $y_v^{min}$, $y_v^{max}$, $\forall v \in V$ - нижний и верхний пределы изменения вектора компонент материала.

$$\textstyle\sum_{v=1}^{V} y_v = 100\%, \tag{62}$$

сумма всех компонент материала равна ста процентам.

Состав материала оценивается набором (множеством) $K$ физических свойств материала:

$$H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}, \tag{63}$$

которые функционально зависят от конструктивных параметров: $Y = \{y_v, k = \overline{1, V}\}^T$; $k$ - индекс вида физического свойства материала, $k = \overline{1, K}$, где $K$ - число видов свойств (функциональных характеристик) материала, представим их в виде вектор - функции.

$H(Y)$ - вектор-функция (векторный критерий), имеющая $K$ – компонент-функций, ($K$ - мощность множества $\boldsymbol{K}$): $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$. Множество $\boldsymbol{K}$ состоит из подмножества $\boldsymbol{K}_1$ компонент максимизации и подмножества $\boldsymbol{K}_2$ минимизации; $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2$;

$H_1(Y) = \{h_k(Y), \ k = \overline{1, K_1}\}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизируется, $\boldsymbol{K}_1$ – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$- множество критериев максимизации. В дальнейшем будем предполагать, что $H_1(Y) = \{h_k(Y), \ k = \overline{1, K_1}\}$ непрерывные вогнутые функции (иногда будем их называть критериями максимизации);

$H_2(Y) = \{h_k(Y), \ k = \overline{1, K_2}\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ - множество критериев минимизации, $K_2$ – число. Предполагаем, что $h_k(Y), k = \overline{1, K_2}$- непрерывные выпуклые функции (будем иногда их называть критериями минимизации), т. е.:

$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2, \boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}_2 \subset \boldsymbol{K}$.

Характеристики материала $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1,K}\}$ мы используем как критерии, а пределы изменения, накладываемые на каждый вид компонент, как параметрические ограничения. Математическую модель материала, решающую в целом проблему выбора оптимального проектного решения (выбора оптимальной структуры материала), представим в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt\, H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\,(Y),\ k = \overline{1,K_1}\}, \tag{64}$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k\,(Y),\ k = \overline{1,K_2}\}\}, \tag{65}$$

$$G(Y) \leq B, \tag{66}$$

$$\textstyle\sum_{v=1}^{V} y_v(t) = 100\%\ , \tag{67}$$

$$y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1,V}, \tag{68}$$

где $Y = \{y_j, j = \overline{1,V}\}$ - вектор управляемых переменных (компонент материала) из (61);

$H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1,K}\}$ - векторный критерий, каждая функция которого представляет характеристику (свойство) материала, функционально зависящую от вектора переменных $Y$;

$G(Y) = \{g_1(Y), \ldots, g_M(Y)\}^T$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на структуру материала, $\boldsymbol{M}$ – множество ограничений.

Предполагается, что функции $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1,K}\}$ дифференцируемы и выпуклы, $G(Y) = \{g_i(Y), i = \overline{1,M}\,\}^T$ непрерывны, а заданное ограничениями (66)-(68) множество допустимых точек $\boldsymbol{S}$ не пусто и представляет собой компакт:

$$S = \{X \in R^n | G(Y) \leq 0, Y^{min} \leq Y \leq Y^{max}\} \neq \emptyset, \tag{69}$$

Соотношения (64)-(68) образуют математическую модель материала. Требуется найти такой вектор параметров $Y^o \in \boldsymbol{S}$, при котором каждая компонента (характеристика) вектор – функции: $H_1(Y)$ принимает максимально возможное значение, а вектор - функции $H_2(Y)$ принимает минимальное значение:

$$H_1(Y) = \{h_k(Y),\ k = \overline{1,K_1}\},\ H_2(Y) = \{h_k(Y),\ k = \overline{1,K_2}\}.$$

В данной статье исследование конструктивных свойств материала рассматриваются в статике. Но структура материала могут рассматриваться в динамике (например, при изменении внешней температуры за какой-нибудь период времени). Для этого можно, использовать дифференциально-разностные методы преобразования [4] и проводить исследование за небольшой дискретный промежуток времени $\Delta t \in \boldsymbol{T}$. В совокупности математическую модель материала (64)-(68) можно трактовать как системный подход к исследованию материала.

***6.2. Построение математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности***

При построении математической модели материала (64)-(68), как и для технической системы [20-26], возможны условия: определенности и неопределенности.

6.2.1. Построение математической модели материала в условиях определенности

Условия определенности характеризуются тем, что известна функциональная зависимость каждой характеристики (свойства) материала и ограничений от конструктивных компонент материала. Для построения функциональной зависимости выполняем следующие работы.

1. Формируем множество всех функциональных характеристик (свойств) материала $\boldsymbol{K}$.

Величину характеристики обозначим $h_k(Y), k = \overline{1,K}$ . Определяем множество всех компонент материала $\boldsymbol{V}$ , от которых зависят эти характеристики. Величины параметров представим в виде вектора $Y = \{y_j, j = \overline{1,V}\}$. Даем вербальное описание характеристик материала.

2. Мы проводим исследование физических процессов, протекающих в материале. Для этого используем фундаментальные законы физики: моделирование магнитных, температурных полей; законы сохранения энергии, движения и т. д. Устанавливаем информационную и функциональную связь характеристик материала и ее параметров: $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$.

3. Мы определяем функциональные ограничения: $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$

$h_k^{min} \leq h_k \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}$, или $H^{min} \leq H \leq H^{max}$

и параметрические ограничения:

$y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}$, или $Y^{min} \leq Y \leq Y^{max}$.

Сумма всех компонент материала равна ста процентам: $\sum_{v=1}^{V} y_v(t) = 100\%$.

4. В результате мы построим математическую модель материала в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt\ H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\ (Y),\ k = \overline{1, K_1}\}, \tag{70}$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k\ (Y),\ k = \overline{1, K_2}\}\}, \tag{71}$$

$$H^{min} \leq H \leq H^{max}, \tag{72}$$

$$\text{при ограничениях}\quad \sum_{v=1}^{V} y_v = 100\%\ , \tag{73}$$

$$y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}, \tag{74}$$

Задача (70)-(74) адекватна задачи (64)-(68).

*6.2.2. Построение математической модели материала в условиях неопределенности*

*Условия неопределенности* характеризуются тем, что отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости свойства материала от состава компонент. В этом случае проводятся экспериментальные исследования. Для заданного числа составов материалов:

$Y_i = \{y_{ij}, j = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}$

определяются соответствующий набор свойств:

$H(Y_i) = \{h_k(Y_i), k = \overline{1, K}\}, i = \overline{1, M}$.

С учетом этого матрица экспериментов по исследованию структуры материала принимает вид:

$$\mathrm{I} = \left\| \begin{matrix} Y_1 = \{y_{1v}, v = \overline{1, V_1}\}\ h_1(Y_1)\ \dots\ h_K(Y_1) \\ \dots \\ Y_M = \{y_{Mv}, v = \overline{1, V_M}\}\ h_1(Y_M)\ \dots\ h_K(Y_M) \end{matrix} \right\|. \tag{75}$$

где столбец $v \in \boldsymbol{V}$ представляет числовую величину $v$ -ой компоненты материала в процентах, $v = \overline{1, V}$ столбец $k \in \boldsymbol{K}$ представляет числовую величину $k$-го свойства материала, $k = \overline{1, K}$. Задача лица, принимающего решения, (ЛПР) - конструктора состоит в выборе такой альтернативы, которая позволила бы получить “в наибольшей мере устраивающий его (оптимальный) результат” [18, 20]. Множество критериев (характеристик) $\boldsymbol{K}$ подразделяется на два подмножества $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2, \boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}_2 \subset \boldsymbol{K}$.

$\boldsymbol{K}_1$ - это подмножество характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно выше:

$$I_1(Y_i) = \{h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_1}\} \rightarrow max$$

$\boldsymbol{K}_2$ — это подмножества технических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно ниже:

$I_2(Y_i) = \{h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_2}\} \rightarrow min.$

Решение задачи принятия решений по структуре материала (75) по своей сути близка к решению векторной задачи математического программирования, которая в условиях неопределенности примет вид:

$$Opt\ H(Y) = \{\max I_1(Y) = \{\max h_k\ (Y_i, i = \overline{1, M}),\ k = \overline{1, K_1}\}, \tag{76}$$

$$\min I_2(Y) = \{\min h_k\ (Y_i, i = \overline{1, M}),\ k = \overline{1, K_2}\}\},$$

$$\text{при ограничениях}\quad h_k^{min}(Y_i, i = \overline{1, M}) \leq h_k \leq h_k^{max}(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K},$$

$$\sum_{v=1}^{V} y_v = 100\% \ , \quad y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, v = \overline{1,V}, \tag{77}$$

где $Y_i = \{y_{ij}, j = \overline{1,V}\}, i = \overline{1,M}$ - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров);

$H(Y_i) = \{I_1(Y_i), I_1(Y_i)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет характеристику (свойство) материала, функционально зависящую от величины дискретного значения вектора переменных $Y_i, i = \overline{1,M}$ ; $M$ – множество дискретных значений вектора переменных $Y_i, i = \overline{1,M}$;

в (78) $h_k^{min}(Y_i) \le h_k \le h_k^{max}(Y_i), k = \overline{1,K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функции материала изделия, $y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, v = \overline{1,V}$ – параметрические ограничения.

*6.2.3. Построение математической модели материала в условиях определенности и неопределенности в виде векторной задачи*

В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель материала так же отражает эти условия. Объединим модели (70)-(74) и (76)-(77). В итоге получим модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt\, H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\,(Y),\ k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \tag{78}$$
$$\max I_1(Y) = \{\max h_k\,(Y_i, i = \overline{1,M}),\ k = \overline{1, K_1^{unc}}\},$$
$$\min H_2(Y) = \{\min h_k\,(Y),\ k = \overline{1, K_2^{def}}\},$$
$$\min I_2(Y) = \{\min h_k\,(Y_i, i = \overline{1,M}),\ k = \overline{1, K_2^{unc}}\}\}, \tag{79}$$
$$\text{при ограничениях} \qquad h_k^{min} \le h_k \le h_k^{max}, k = \overline{1,K},$$
$$\sum_{v=1}^{V} y_v = 100\% \ ,$$
$$y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, v = \overline{1,V}, \tag{80}$$

где $Y$ - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров материала);

$H(Y) = \{H_1(Y)\ I_1(Y)\ H_2(Y)\ I_2(Y)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (характеристик) материала, которые функционально зависят от значений вектора переменных $Y$; $K_1^{def}$, $K_2^{def}$ (*definiteness*), $K_1^{unc}$, $K_2^{unc}$ (*uncertainty*) множество критериев max и min сформированные в условиях определенности и неопределенности; в (78)-(79) вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование материала в производственных условиях, (80) параметрические ограничения.

**7. Методология моделирования и принятия оптимального решения выбора параметров сложных инженерных систем (на примере структуры материала) в условиях определенности, неопределенности**

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «Инженерные системы», к которым относятся «технические системы», «технологические процессы», «материалы», [17, 18]. Исследование инженерной системы выполнено, во-первых, в условиях определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках инженерной системы; во-вторых, в условиях неопределенности, когда известны дискретные значения отдельных характеристик; также известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование системы. Математический аппарат моделирования инженерной системы базируется на теории и методах векторной оптимизации, которые представлены в третьем разделе. В организационном плане процесс моделирования и симулирования технической системы представлен в виде методологии:

«Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности».

***7.1. Виды задач, возникающих в процессе моделирования и принятия оптимального решения выбора параметров сложных инженерных систем***

Задачи, которые возникают в процессе принятия оптимального решения выбора оптимальных параметров сложных инженерных системах на базе векторной оптимизации включает последовательно три вида.

***1 вид***. *Решение векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях*. Полученный результат является основой для дальнейшего исследования системы. При этом используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях. Если полученный результат удовлетворяет лицу, принимающего решения, (ЛПР - проектировщик), то он берется за основу. Если не удовлетворяет, то переходим ко второму виду (прямая задача) или третьему виду решения векторных задач (Обратная задача).

***2 вид***. *Решение прямой задачи векторной оптимизации*, которая состоит в следующем: «Какие будут показатели (характеристики), если изменить параметры сложных технических систем». - Используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях.

***3 вид***. *Решение обратной задач векторной оптимизации*, которая состоит в следующем: «Какие будут параметры сложных технических систем при заданных характеристиках». - Используется метод решения векторной задачи при заданном приоритете критерия.

***7.2. Методология моделирования и выбора оптимальных параметров сложных инженерных систем в условиях определенности, неопределенности***

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «сложная (многофункциональная) инженерная система», [17, 42, 44]. В организационном плане процесс моделирования и симулирования (the process of modeling and simulation of a engineering system) сложных инженерных систем, включающий три вида выше представленных задач, сформирован в виде методологии.

Методология разделена на две части. Первая часть – «Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности – равнозначные критерии»: включает два блока, вторая часть– «Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности - с приоритетом одного из критериев»: включает два блока. Каждый блок разделен на ряд этапов.

«**Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики**».

***Часть 1.*** **Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности – равнозначные критерии**.

***Блок 1.*** *Формирование технического задания,* преобразование условий неопределенности (связанных с экспериментальными данными) в условия определенности, построение математической и численной модели инженерной системы (the process of modeling of a engineering system) включает 4 этапа.

***1 этап***. Формирование технического задания (исходных данных) для численного моделирования и выбора оптимальных параметров системы. Исходные данные формирует конструктор, который проектирует инженерную систему.

***2 этап***. Построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

***3 этап***. Преобразование условий неопределенности в условия определенности и построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

***4 этап***. Построение агрегированной математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

***Блок 2.*** *Принятие оптимального решения (выбора оптимальных параметров) в инженерной системе (материал) при равнозначных критериях на базе многомерной математики* (the process of simulation of a engineering system)

***5 этап***. Решение векторной задачи математического программирования (ВЗМП) - модели инженерной системы при равнозначных критериях (решение прямой задачи).

***6 этап***. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях в трехмерной системе координат в относительных единицах.

***7 этап***. Анализ результатов решения Векторной Задачи Математического Программирования при равнозначных критериях - подготовка информации для принятия решений с приоритетом отдельного критерия из всего множества критериев.

***Часть 2.*** **Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности - с приоритетом одного из критериев.**

***Блок 3.*** *Анализ, сравнение результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях сложной инженерной системы (модели структуры материала) и подготовка к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию*.

***8 этап***. 1. Анализ и сравнение результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями с четырьмя и двумя переменными. 2. Вывод из анализа: ***Информация об Инженерной Системе*** в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия. 3. Подготовка к геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию.

***9 этап***. Геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к ***N***-мерному пространству в относительных единицах.

***Блок 4.k1.*** *Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по первому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП*

*4.1.k1*. Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном приоритете первого критерия в многомерной математике. (решение обратной задачи). *4.2.k1*. Анализ результатов решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете первого критерия. *4.3.k1*. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по первому приоритетному критерию ***в относительных единицах.*** *4.4.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом первого критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат* ***в физических единицах***. Остальные три блока сформированы по аналогии

***Блок 4.k2.*** *Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по второму приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.*

***Блок 4.k3.*** *Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по третьему приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.*

***Блок 4.k4.*** *Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по четвертому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.*

## 8. Численная реализация. Выбор оптимальных параметров инженерной системы (материал сложной структуры) в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики.

### 8.1. Моделирование и принятие оптимального решения по числовому множеству критериев структуры материала с четырьмя параметрами

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «Инженерные системы», к которым относятся «структура материала», [18, 20-26]. Структура материала рассматривается с четырьмя параметрами и четырьмя характеристиками. Экспериментальные данные структуры материала представим в виде задачи принятия решений второго вида (70):

$$F = \begin{vmatrix} x_{1,1}\ x_{2,1}\ x_{3,1}\ x_{4,1} & f_1^1, \dots, f_1^K \\ \dots & \\ x_{1,M}\ x_{2,M}\ x_{3,M}\ x_{4,M} & f_M^1, \dots, f_M^K \end{vmatrix} \text{ - problem of 2-type, } \quad K = 4.$$

Исследование инженерной системы (структура материала) выполнено:

во-первых, в условиях определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках инженерной системы;

во-вторых, в условиях неопределенности, когда известны дискретные значения отдельных характеристик; также известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование системы (структура материала).

Используя регрессионный анализ экспериментальные данные $F$ преобразуются в векторную задачу математического программирования:

$$\max f_k(X,A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + a_{4k}x_4 + a_{5k}x_1x_2 + a_{6k}x_1x_3 + a_{7k}x_1x_4 + a_{8k}x_2x_3 + a_{9k}x_2x_4 + a_{10k}x_3x_4 + a_{11k}x_1^2 + a_{12k}x_2^2 + a_{13k}x_2^2 + a_{14k}x_2^2,\ k = \overline{1, K_1}.$$

$$\min f_k(X,A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + a_{4k}x_4 + a_{5k}x_1x_2 + a_{6k}x_1x_3 + a_{7k}x_1x_4 + a_{8k}x_2x_3 + a_{9k}x_2x_4 + a_{10k}x_3x_4 + a_{11k}x_1^2 + a_{12k}x_2^2 + a_{13k}x_2^2 + a_{14k}x_2^2,\ k = \overline{1, K_2}.$$

При ограничениях $x_1^0 \le x_1 \le x_1^*, x_2^0 \le x_2 \le x_2^*, x_3^0 \le x_3 \le x_3^*, x_4^0 \le x_4 \le x_4^*$.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100.$

Математический аппарат моделирования инженерной системы базируется на теории и методах векторной оптимизации, которые представлены в предыдущих главах.

В организационном плане процесс моделирования и симулирования инженерной системы представлен в виде методологии: «Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем (структура материала) в условиях определенности и неопределенности», представленной в разделе 7.

Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) инженерной системы, в том числе материала сложной структуры, раздел 5.2.

Рассматривается задача принятия решений в сложной структуре материала, о которой известны: во-первых, данные о функциональной взаимосвязи нескольких характеристик с ее компонентами (*условия определенности*); во-вторых, данные о некотором наборе дискретных значений нескольких характеристик (экспериментальные результаты), во взаимосвязи с дискретными значениями параметров – экспериментальные данные (*условия неопределенности*); в-третьих, ограничений, накладываемых на функционирование материала сложной структуры. Численная задача моделирования материала сложной структуры рассматривается с равнозначными критериями (часть 1) и с заданным приоритетом критерия (Часть 2).

***Часть 1.*** **Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности – равнозначные критерии**.

**8.2. Блок 1. Техническое задание: Построение математической и численной модели материала сложной структуры (the process of modeling of the structure (composition) of the material).**

Первый этап, а также этап анализа результатов решения, выбора приоритетного критерия и его величины выполняется ***конструктором материала сложной структуры***. Остальные этапы выполняются ***математиком - программистом***.

*8.2.1. 1 этап. Техническое задание: «Выбор оптимальных параметров материала сложной структуры».*

***Дано***. Мы исследуем структуру материала. Состав структуры материала определяется четырьмя компонентами: $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, которые представляют вектор управляемых переменных. Параметры структуры материала заданы в следующих пределах:

$$21 \le y_1 \le 79;\ 5 \le y_2 \le 59;\ 2.1 \le y_3 \le 9.0;\ 2.2 \le y_4 \le 7.0. \qquad (81)$$

Качество состава структуры материала определяются четырьмя характеристиками:

$H(Y) = \{h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)\}$, величина оценки которых зависит от вектора параметров $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}, N = 4\}$.

*Условия определенности*. Они характеризуются тем, что для первой характеристики $h_1(Y)$ известна функциональная зависимость от параметров $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}, N = 4\}$.

$$h_1(Y) = 323.84 - 2.249y_1 - 3.49y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026x_4^2, \qquad (82)$$

*Условия неопределенности*. Они характеризуются тем, что для второй, третьей и четвертой характеристики: $h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ известны результаты экспериментальных данных: величины параметров и соответствующих характеристик. Числовые значения параметров $Y$ и характеристик $h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ представлены в таблице 1.

**Таблица 1.**

Числовые значения параметров и характеристик материала

| $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $h_2(Y)$ | $h_3(Y)$ | $h_4(Y)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0 | 2 | 2 | 1149.6 1164.0 | 115.1 | 24.24 27.60 |
| 20 | 0 | 2 | 5 | 1176.0 1212.0 | 114.5 | 28.80 30.00 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0 | 2 | 8 | 1260.0 1257.6 | 114.4 | 31.20 32.40 |
| 20 | 0 | 5 | 2 | 1256.4 1252.8 | 118.8 | 33.60 34.80 |
| 20 | 0 | 5 | 5 | 1251.6 2143.2 | 113.8 | 34.80 19.92 |
| 20 | 0 | 5 | 8 | 2154.0 2163.6 | 113.3 | 21.60 25.20 |
| 20 | 0 | 8 | 2 | 2176.8 2185.2 | 110.7 | 29.76 33.48 |
| 20 | 0 | 8 | 5 | 2198.4 2211.6 | 109.2 | 37.20 39.48 |
| 20 | 0 | 8 | 8 | 2232.0 2245.2 | 108.5 | 42.00 49.20 |
| 20 | 30 | 2 | 2 | 2954.4 2820.0 | 128.3 | 15.60 18.00 |
| 20 | 30 | 2 | 5 | 2772.0 2748.0 | 127.4 | 21.60 24.24 |
| 20 | 30 | 2 | 8 | 2832.0 2904.0 | 126.8 | 28.80 32.40 |
| 20 | 30 | 5 | 2 | 3022.8 3036.0 | 126.1 | 35.16 39.60 |
| 20 | 30 | 5 | 5 | 3056.4 3583.2 | 124.3 | 44.88 11.28 |
| 20 | 30 | 5 | 8 | 3601.2 3608.4 | 124.1 | 14.40 16.80 |
| 20 | 30 | 8 | 2 | 3616.8 3622.8 | 123.9 | 21.12 22.80 |
| 20 | 30 | 8 | 5 | 3637.2 3651.6 | 121.4 | 27.60 30.84 |
| 20 | 30 | 8 | 8 | 3672.0 36852 | 121.7 | 36.00 40.56 |
| 20 | 60 | 2 | 2 | 1195.2 1212.0 | 150.4 | 52.80 60.00 |
| 20 | 60 | 2 | 5 | 1236.0 1251.6 | 144.9 | 64.80 68.64 |
| 20 | 60 | 2 | 8 | 1272.0 1296.0 | 140.8 | 75.60 82.80 |
| 20 | 60 | 5 | 2 | 1318.8 1344.0 | 138.6 | 88.08 97.20 |
| 20 | 60 | 5 | 5 | 1388.4 2176.8 | 140.8 | 107.64 40.56 |
| 20 | 60 | 5 | 8 | 2196.0 2220.0 | 143.5 | 45.60 52.80 |
| 20 | 60 | 8 | 2 | 2245.2 2286.0 | 146.0 | 60.00 67.20 |
| 20 | 60 | 8 | 5 | 2294.4 2313.6 | 144.9 | 73.20 79.44 |
| 20 | 60 | 8 | 8 | 2340.0 2382.0 | 143.8 | 85.20 99.00 |
| 50 | 0 | 2 | 2 | 2988.0 3012.0 | 181.3 | 31.92 36.00 |
| 50 | 0 | 2 | 5 | 3036.0 3056.4 | 180.8 | 43.20 51.36 |
| 50 | 0 | 2 | 8 | 3108.0 3156.0 | 179.4 | 61.20 72.00 |
| 50 | 0 | 5 | 2 | 3244.8 3228.0 | 179.1 | 82.80 86.40 |
| 50 | 0 | 5 | 5 | 3193.2 3616.8 | 178.0 | 90.36 23.28 |
| 50 | 0 | 5 | 8 | 3639.6 3660.0 | 177.6 | 30.00 36.00 |
| 50 | 0 | 8 | 2 | 3685.2 3708.0 | 176.9 | 42.72 48.00 |
| 50 | 0 | 8 | 5 | 3732.0 3753.6 | 175.3 | 54.00 62.16 |
| 50 | 0 | 8 | 8 | 3672.0 3822.0 | 174.7 | 73.20 81.72 |
| 50 | 30 | 2 | 2 | 1218.0 1248.0 | 123.6 | 87.00 94.80 |
| 50 | 30 | 2 | 5 | 1272.0 1318.8 | 118.7 | 103.20 116.16 |
| 50 | 30 | 2 | 8 | 1344.0 1392.0 | 115.9 | 126.00 136.80 |
| 50 | 30 | 5 | 2 | 1422.0 1464.0 | 115.1 | 145.44 156.00 |
| 50 | 30 | 5 | 5 | 1524.0 | 113.2 | 174.72 |
| 50 | 30 | 5 | 8 | | 111.8 | |
| 50 | 30 | 8 | 2 | | 110.7 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 30 | 8 | 5 | | 108.2 | |
| 50 | 30 | 8 | 8 | | 106.3 | |
| 50 | 60 | 2 | 2 | | 132.8 | |
| 50 | 60 | 2 | 5 | | 131.1 | |
| 50 | 60 | 2 | 8 | | 129.7 | |
| 50 | 60 | 5 | 2 | | 128.3 | |
| 50 | 60 | 5 | 5 | | 127.0 | |
| 50 | 60 | 5 | 8 | | 125.6 | |
| 50 | 60 | 8 | 2 | | 123.9 | |
| 50 | 60 | 8 | 5 | | 114.5 | |
| 50 | 60 | 8 | 8 | | 119.5 | |
| 80 | 0 | 2 | 2 | | 154.8 | |
| 80 | 0 | 2 | 5 | | 153.2 | |
| 80 | 0 | 2 | 8 | | 151.8 | |
| 80 | 0 | 5 | 2 | | 150.4 | |
| 80 | 0 | 5 | 5 | | 150.7 | |
| 80 | 0 | 5 | 8 | | 151.2 | |
| 80 | 0 | 8 | 2 | | 151.5 | |
| 80 | 0 | 8 | 5 | | 144.9 | |
| 80 | 0 | 8 | 8 | | 140.8 | |
| 80 | 30 | 2 | 2 | | 185.7 | |
| 80 | 30 | 2 | 5 | | 183.5 | |
| 80 | 30 | 2 | 8 | | 182.2 | |
| 80 | 30 | 5 | 2 | | 181.3 | |
| 80 | 30 | 5 | 5 | | 179.4 | |
| 80 | 30 | 5 | 8 | | 178.0 | |
| 80 | 30 | 8 | 2 | | 176.9 | |
| 80 | 30 | 8 | 5 | | 175.3 | |
| 80 | 30 | 8 | 8 | | 172.5 | |
| 80 | 60 | 2 | 2 | | 128.3 | |
| 80 | 60 | 2 | 5 | | 125.6 | |
| 80 | 60 | 2 | 8 | | 124.2 | |
| 80 | 60 | 5 | 2 | | 121.7 | |
| 80 | 60 | 5 | 5 | | 118.7 | |
| 80 | 60 | 5 | 8 | | 115.9 | |
| 80 | 60 | 8 | 2 | | 115.1 | |
| 80 | 60 | 8 | 5 | | 110.4 | |
| 80 | 60 | 8 | 8 | | 108.5 | |
| min $y_i(X)$, $i$=1,…, 81 | | | | 1149.6 | 92.4 | 11.3 |
| max $y_i(X)$, $i$=1,…, 81 | | | | 3822.0 | 161.5 | 174.7 |

На числовые значения параметров $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ наложены ограничения:

$y_1 + y_2 + \ y_3, +y_4 = 100.$

Величину оценки по первой и третьей характеристики (по критерию) желательно, получить как можно выше: $h_1(Y) \rightarrow max, h_3(Y) \rightarrow max$; второй и четвертой как можно ниже: $h_2(Y) \rightarrow min, h_4(Y) \rightarrow min$. Параметры (состав) материала:

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ изменяются в следующих пределах:

$$y_1 \in [20.0\ \ 50.0\ \ 80.0], y_2 \in [0.0\ \ 30.0\ \ 60.0], y_3 \in [2.0\ \ 5.0\ \ 8.0], y_4 \in [2.2\ 5.5\ 8.8]. \quad (83)$$

***Требуется.*** 1) Разработать математическую модель структуры исследуемого материала в виде векторной задачи математического программирования. 2) На основе разработанных методов решения ВЗНП построить программное обеспечение в системе MATLAB. Решить векторную задачу с равнозначными критериями: выбрать оптимальную структуру материала. 4) Выбрать приоритетный критерий. Решить задачу векторной оптимизации и принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия. 5) Представить геометрическую интерпретацию результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к N-мерному пространству в относительных единицах. 6) Показать геометрическую интерпретацию результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к N-мерному пространству в физических единицах.

*Примечание.* Автором разработано программное обеспечение в системе MATLAB для решения векторных задач математического программирования. Векторная задача включает четыре переменных (параметров технической системы): $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и четырьмя критерия (характеристики)

$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}$ . Но для каждых новых данных (новая система) программа настраивается индивидуально. В программном обеспечении критерии $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_6(X)\}$ с условиями неопределенности (в таблице 1 они представлены как часть $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$) могут изменяться от нуля (т.е. все критерии построены в условиях определенности) до шести (т.е. все критерии построены в условиях неопределенности).

***1а этап.*** *Математическая модель структуры материала в условиях определенности*

Построение математической модели для принятия оптимального управленческого решения структуры материала показано в разделе 7.5. В соответствии с (73)-(78) представим математическую модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$Opt\ H(Y)\ =\ \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\ (Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (84)$$

$$\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k\ (Y_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (85)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k\ (X), k = \overline{1, K_2^{def}}, \quad (86)$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k\ (Y_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}\}, \quad (87)$$

при ограничениях: $h_k^{min}\ \le h_k(Y) \le h_k^{max}, k = \overline{1, K},$

$$y_j^{min} \le y_j \le\ y_j^{max}, j = \overline{1, N},\ y_1 + y_2 +\ y_3, +y_4 = 100, \quad (88)$$

где $Y = \{y_j,\ j = \overline{1, N}\}$ - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров материала);

$H(Y) = \{H_1(Y)\ H_2(Y)\ I_1(Y), I_2(\mathrm{Y})\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором критериев (характеристик) материала, которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных;

$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}$, $H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\}$ – это множество функций *max* и *min* соответственно;

$I_1(Y) = \{\{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}$,

$I_2(Y) = \{\{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}$ – это множество матриц *max* и *min* соответственно; ( *definiteness*), $K_1^{unc}. K_2^{unc}$ (*uncertainty*) множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях определенности и неопределенности;

в (88) $h_k^{min} \le h_k(Y) \le h_k^{max}, k = \overline{1, K}$ представлена вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование материала;

в (88) $y_j^{min} \le y_j \le y_j^{max}, j = \overline{1, N}$ – параметрические ограничения.

Примем, что функции $h_k(X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i(X)$, $i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (88) множество допустимых точек $\boldsymbol{S}$ не пусто:

$\boldsymbol{S} = \{Y \in R^n | G(Y) \le 0, Y^{min} \le Y \le Y^{max}\} \neq \emptyset$**,** и представляет собой компакт.

***8.2.2. 2 этап.*** *Построение численной модели структуры материала в условиях определенности*

*Условия определенности* характеризуются функциональной зависимостью каждой характеристики и ограничений от параметров материала. В примере известны характеристика (82) и ограничения (81). Используя информационные данные (81), (82) построим однокритериальную задачу нелинейного программирования в условиях определенности:

$$max\ h_1(Y) = 323.84 - 2.249y_1 - 3.49y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2, \quad (89)$$

при ограничениях: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100$,

$$21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0. \quad (90)$$

Эти данные в дальнейшем используются при построении математической модели материала.

*8.2.3. 3.1 этап. Преобразование экспериментальных данных (условия неопределенности) в данные с функциональной зависимостью (условия определенности).*

*Условия неопределенности* характеризуются тем, что исходные данные, характеризующие исследуемого объекта, представлены: а) случайными, б) нечеткими, или, в) не полными данными, т. е. в условиях неопределенности известны лишь конечное множество $Y$ измеренных параметров $y = \overline{1, Y}$:

$Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}$, где $v = \overline{1, V}$ - число компонент (параметров), из которых может быть составлен (изготовлен) материал, $i = \overline{1, M}$ – номер и множество данных; и соответствующее множество $K$ характеристик:

$h_k(Y_v = \{y_{iv},\ v = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K}$.

Поэтому *в условиях неопределенности* отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров. Информационные данные опций а) и b) преобразуются в числовые данные опции с) и представляются в табличной форме. В работе рассматривается опция с) информация с неполными данными, которые, как правило, ***получены в результате эксперимента***.

С учетом измеренных параметров $Y_v$ и соответствующего множества $K$ характеристик: $h_k(Y_v = \{y_{iv},\ v = \overline{1,V}\}, i = \overline{1,M}), k = \overline{1,K}$ представим матрицу результатов экспериментальных данных по исследуемому материалу:

$$I = \begin{vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 = y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}\ h_2(Y_1), h_3(Y_1), h_4(Y_1) \\ \dots \\ Y_M = y_{M1}, y_{M2}, y_{M3}, y_{M4} h_2(Y_M), h_3(Y_M), h_4(Y_M) \end{vmatrix}, \quad (91)$$

Представим математическую модель структуры материала в условиях неопределенности в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt\ H(X) = \{\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k\ (Y_i,\ i = \overline{1,M})\}^T, k = \overline{1,K_1^{unc}}\}, \quad (92)$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k\ (Y_i,\ i = \overline{1,M})\}^T, k = \overline{1,K_2^{unc}}\}, \quad (93)$$

at restriction $$h_k^{min} \le h_k(Y) \le h_k^{max}, k = \overline{1,K}, \quad (93)$$

$$\textstyle\sum_{v=1}^{V} y_v(t) = 100\%,\ y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, v = \overline{1,V}, \quad (95)$$

где $Y = \{y_v,\ v = \overline{1,V}\}$ - вектор управляемых переменных (параметров);

$H(Y) = \{I_1(Y)\ I_2(Y)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (выходных характеристик исследуемого объекта). Величина характеристики (функции) зависит от дискретных значений вектора переменных $Y$. $I_1(Y) = \overline{1, K_1^{unc}}$, $I_2(Y) = \overline{1, K_2^{unc}}$ (*uncertainty*) – множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях неопределенности;

в (94) $h_k^{min} \le h(X) \le h_k^{max}, k = \overline{1,K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование исследуемого объекта, $y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}$, $v = \overline{1,V}$ – параметрические ограничения исследуемого объекта.

*8.2.3. 3.2 этап. Построение численной модели структуры материала в условиях неопределенности.*

Формирование в условиях неопределенности состоит в использовании качественных, количественных описаний материала, полученных по принципу “вход-выход” в таблице 2.

Преобразование исходные данных (информации):

$h_2(Y_i, i = \overline{1,M}),\ h_3(Y_i, i = \overline{1,M}),\ h_4(Y_i, i = \overline{1,M})$

в функциональный вид:

$h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ осуществляется путем использования математических методов регрессионного анализа.

Исходные данные сформированы в таблице 2 в системе MATLAB в виде матрицы:

$$I = |Y, H| = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}, h_{i2},\ h_{i3},\ h_{i4}, i = \overline{1,M}\}. \quad (96)$$

Для каждого набора экспериментального данных таблицы 2 $h_k, k = 2, 3, 4$ строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\mathbf{min} \sum_{i=1}^{M} (y_i - \overline{y_i})^2$ в системе MATLAB.

Формируется полином $A_k$, определяющий взаимосвязь параметров $Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}\}$ и функции $\overline{y_{ki}} = h(Y_i, A_k), k = 2, 3, 4$. Результатом является система коэффициентов:

$A_k = \{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{14k}\}$, определяющие коэффициенты квадратичного полинома:

$$h_k(Y, A) = A_{0k} + A_{1k}y_1 + A_{2k}y_2 + A_{3k}y_3 + A_{4k}y_4 + A_{5k}y_1y_2 + A_{6k}y_1y_3 + A_{7k}y_1y_4 + A_{8k}y_2y_3 + A_{9k}y_2y_4 + A_{10k}y_3y_4 + A_{11k}y_1^2 + A_{12k}y_2^2 + A_{13k}y_3^2 + A_{14k}y_4^2, k = 2, 3, 4. \quad (97)$$

Программное обеспечение полиномиальной аппроксимации с четырьмя переменными и четырнадцатью факторами разработано. В итоге экспериментальные данные таблицы 2 преобразуются систему коэффициентов трех функции (97) в виде таблицы (Программа: Z_Material_MMTT32_os13_4k):

```
Ao=[323.8408   954.8634   110.02    21.0051          (98)
    -2.2495    28.6719    0.9106   -0.0101
    -3.4938    37.0392    0.6206   -0.8403
    10.7267   -31.0303   -0.4287   -0.4314
    13.1239   -54.0031   -2.5176    1.1718
     0.0969    -0.9219   -0.0151    0.0166
    -0.0621     0.5644   -0.0094    0.0850
    -0.1696     0.8966    0.0222   -0.0001
     0.0743    -0.1540   -0.0198    0.0522
    -0.1042     0.3919    0.0184    0.0003
     0.0036    -0.0135   -0.0006    0.0006
     0.0142     0.0477   -0.0004   -0.0021
     0.0117     0.0437   -0.0003    0.0035
    -0.2433     3.8489    0.0390    0.0061
    -0.5026     3.1748    0.1414   -0.0310];
Rj =[0.6115    0.7149    0.6551    0.9017];
RRj=[0.3740    0.5111    0.4292    0.8130];
```

На основе Ao(2) Ao(3) Ao(4) строятся функции $h_2(Y)$, $h_3(Y)$ и $h_4(Y)$, которые с учетом полученных коэффициентов примут вид:

$$max\ h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2, \quad (99)$$

$$min\ h_2(Y) \equiv 954.86 + 28.67y_1 + 37.03y_2 - 31.03y_3 + 54y_4 - 0.922y_1y_2 - 2y_1y_3 + 0.896y_1y_4 - 0.154y_2y_3 + 0.3919y_2y_4 - 0.0134y_3y_4 + 0.0478y_1^2 + 0.0438y_2^2 + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2, \quad (100)$$

$$min\ h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2, \quad (101)$$

$$\text{при ограничениях: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (102)$$

$$21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0. \quad (103)$$

Минимальные и максимальные значения экспериментальных данных $y_1, \dots, y_4$ представлены в нижней части таблицы 2. Минимальные и максимальные значения функций $h_1(Y), h_3(Y), h_2(Y), h_4(Y)$ незначительно отличаются от экспериментальных данных. Индекс корреляции и коэффициенты детерминации представлены в нижних строках таблицы 2. Результаты регрессионного анализа (99)-(103) в дальнейшем используются при построении математической модели материала.

Получившаяся математическая модель в виде ВЗМП (99)-(103) является численной моделью структуры материала в условиях неопределенности.

**8.2.4. 4 этап.** *Построение агрегированной математической и численной модели структуры материала в условиях определенности*

Объединяя математические модели структуры материала в условиях определённости (89)-(90) и неопределённости (92)-(95) представим математическую модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$Opt\ H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (104)$$

$$\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k(Y_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (105)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}, \quad (106)$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k(Y_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}\}, \quad (107)$$

при ограничениях

$$h_k^{min} \le h_k(Y) \le h_k^{max}, k = \overline{1, K}, y_j^{min} \le y_j \le y_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (108)$$

где $Y = \{y_j,\ j = \overline{1, N}\}$ - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров);

$H_1(\mathrm{Y}) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\},\ H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\}$ –

множество функций *max* и *min* соответственно;

$I_1(Y) = \{\{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\},\ I_2(Y) = \{\{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}$ - (109) множество матриц *max* и *min* соответственно; (*definiteness*), $K_1^{unc}.K_2^{unc}$ (*uncertainty*) множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях определенности и неопределенности;

Объединяя численные модели структуры материала в условиях определённости (96) и неопределённости (99)-(103) представим числовую модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$opt\ H(Y) = \{\max H_1(X) = \{\max h_1(Y) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2, \quad (110)$$

$$max\ h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2\}, \quad (111)$$

$$\min H_2(Y) = \{min\ h_2(Y) \equiv 954.86 + 28.67y_1 + 37.03y_2 - 31.03y_3 + 54y_4 - 0.922y_1y_2 - 2y_1y_3 + 0.896y_1y_4 - 0.154y_2y_3 + 0.3919y_2y_4 - 0.0134y_3y_4 + 0.0478y_1^2 + 0.0438y_2^2 + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2, \quad (112)$$

$$max\ h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}\}, \quad (113)$$

$$\text{at restrictions: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (114)$$

$$21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0. \quad (115)$$

Векторная задача математического программирования (110)-( 115) представляет численную модель принятия оптимального решения структуры материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

***8.3. Блок 2. Процесс принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) структуры материала на базе векторной задачи (ВЗМП)***

*8.3.1.* **5 этап.** *Решение ВЗМП - модели структуры материала при равнозначных критериях (решение прямой задачи).*

Для формирования структуры материала на базе векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями (110)-(115) представлены методы, основанные на аксиоматике нормализации критериев и принципе гарантированного результата, вытекающие из аксиомы 1 и принципа оптимальности 1.

Методика решения представлена в виде ряда шагов.

*Шаг 1*. Решение ВЗМП (97)-(101) по каждому критерию отдельно. Для решения используется функция *fmincon*(…) системы MATLAB, обращение к функции *fmincon*(…) в [18, 19].

Как результат расчета, по каждому критерию получаем точки оптимума: $Y_k^*$ и $h_k^* = h_k(Y_k^*), k = \overline{1, K}$, $\boldsymbol{K}$=4 – величины критериев - наилучшее решение по каждому критерию:

Критерий 1: $Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.99$;

Критерий 2: $Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1361.41$;

Критерий 3: $Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.35$;

Критерий 4: $Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$, $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$.

Результат решения ВЗМП (97)-(101), ограничения (101) и точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в координатах $x_1$, $x_3$ представлены на рис. 3.

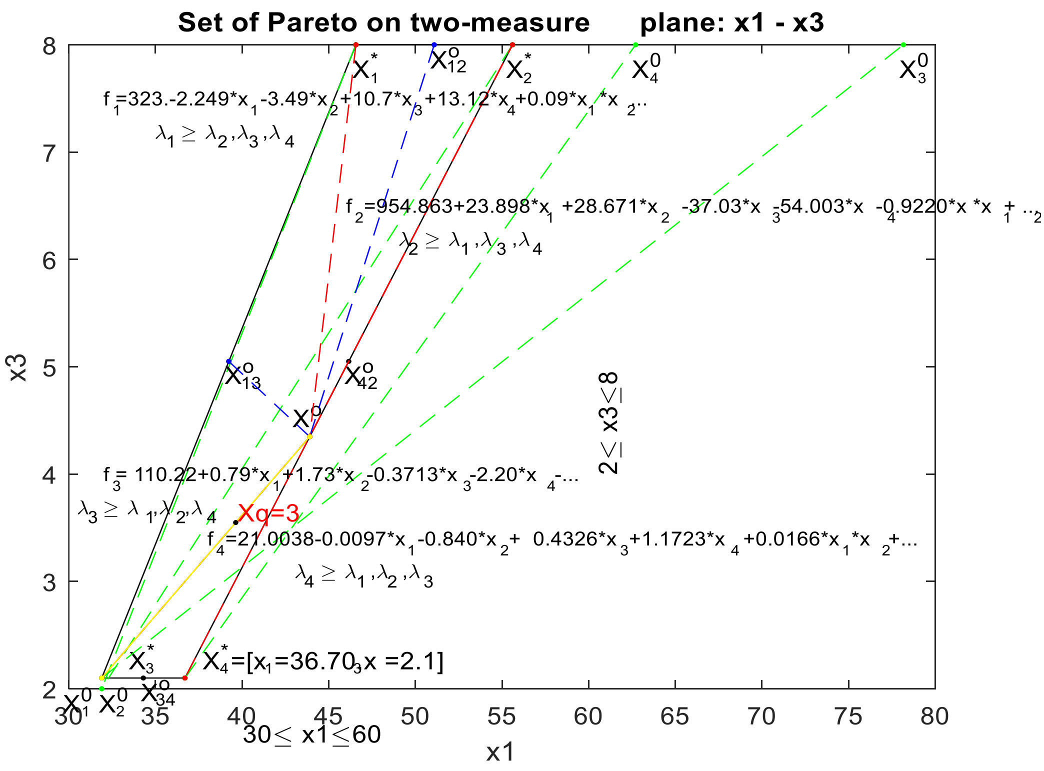


Рис. 3. Допустимое множество точек $\boldsymbol{S}$ в координтах $x_1$,$x_3$. Множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$, ограничено точками $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$, и локальное $\boldsymbol{S}_1^o$ между $X_1^*, X_{13}^{o*}, X^o, X_{12}^o, X_1^*$ в двухмерной системе координат $\{x_1,x_3\}$.

*Шаг 2*. Вычисляем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): $Y_k^0$ и $h_k^0 = h_k(Y_k^0), k = \overline{1,K}$, $\boldsymbol{K}$=4. Для этого решается задача (97)-(101) для каждого критерия $k = \overline{1,K_1}$ на минимум, для каждого критерия $k = \overline{1,K_2}$ на максимум. В результате получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1,N}\}$ - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1,K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величина $k$-го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1,K}$, (верхний индекс ноль):

$Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.00\}, h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6;$

$Y_2^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.\}, h_2^0 = h_2(Y_2^0) = -2458.5;$

$Y_3^0 = \{y_1 = 78.16, y_2 = 9.02, y_3 = 8, y_4 = 4.81\}, h_3^0 = h_3(Y_3^0) = 169.26;$

$Y_4^0 = \{y_1 = 62.71, y_2 = 22.9, y_3 = 8, y_4 = 6.39\}, h_4^0 = h_4(Y_4^0) = -73.62.$

*Шаг 3*. Системный анализ множества точек, оптимальных по Парето, (т.е. анализ по каждому критерию) реализуется. Для этого в точках оптимума $Y^* = \{Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\}$ определяются величины целевых функций $H(Y^*) = \left\|h_q(Y_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, $D = (d_1\ d_2\ d_3\ d_4)^T$- вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$: $d_k = h_k^* - h_k^0, k = \overline{1,4}$, и матрица относительных оценок: $\lambda(Y^*) = \left\|\lambda_q(Y_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, где $\lambda_k(X) = (h_k^* - h_k^0)/d_k$

$$H(Y^*) = \left\|\begin{matrix} 388\ 1444.2\ 183.9\ 68.5 \\ 382\ 1361.4\ 177.3\ 72.1 \\ 296\ 2458.5\ 210.4\ 30.2 \\ 330\ 2210.9\ 208.0\ 30.7 \end{matrix}\right\|,\ d_k = \left\|\begin{matrix} 91.4 \\ -1097 \\ 41.09 \\ -42.9 \end{matrix}\right\|,\ \lambda(Y^*) = \left\|\begin{matrix} 1.00\ 0.9245\ 0.356\ 0.1197 \\ 0.9367\ 1.00\ 0.1968\ 0.036 \\ 0.0 \quad\quad 0.0\ 1.00\ 1.011 \\ 0.3669\ 0.2257\ 0.942\ 1.00 \end{matrix}\right\|. \quad (116)$$

Системный анализ величин критериев в относительных оценках в ВЗМП (111)-(115) показывает, что в точках оптимума $Y^* = \{Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии (102) $\lambda(X^*) = \left\|\lambda_q(X_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$значительно меньше единицы. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки наиболее близки к единице. На решение этой проблемы направлено решение λ-задачи - шаг 4, 5.

*Шаг 4*. Формирование λ-задачи реализуется в два этапа:

На 1-м этапе строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{Y \in S}} \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k \in K}} \lambda_k(Y), G(Y) \le 0, Y \ge 0; \quad (117)$$

на 2-м этапе максиминная задача (117) преобразуется в стандартную задачу математического программирования (λ-задача):

$$\lambda^o = max\, \lambda, \quad (118)$$

с ограничениями $$\lambda - \frac{h_1(Y) - h_1^0}{h_1^* - h_1^0} \le 0, \quad (119)$$

$$\lambda - \frac{h_3(Y) - h_3^0}{h_3^* - h_3^0} \le 0, \quad (120)$$

$$\lambda - \frac{h_2(Y) - h_2^0}{h_2^* - h_2^0} \le 0, \quad (121)$$

$$\lambda - \frac{h_4(Y) - h_4^0}{h_4^* - h_4^0} \le 0, \quad (122)$$

$0 \le \lambda \le 1, \quad 21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0.$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (123)$$

Вектор неизвестных имеет размерность $N$+1: $\boldsymbol{Y} = \{y_1, \dots, y_N, \lambda\}$ ; функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ соответствуют (118)-(123) соответственно. Подставив числовые значения функций $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$, мы получим λ-задачу следующего вида:

$$\lambda^o = max\, \lambda, \quad (124)$$

Ограничения $\lambda - \frac{323.84 - 2.249y_1 - 3.49*x2 \dots - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2 - h_1^0}{h_1^* - h_1^0} \le 0,$ (125)

$$\lambda - \frac{110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - \dots + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2 - h_3^0}{f_3^* - f_3^0} \le 0, \quad (126)$$

$$\lambda - \frac{954.8 + 28.67y_1 + 37y_2 - \dots + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2 - h_2^0}{h_2^* - h_2^0} \le 0, \quad (127)$$

$$\lambda - \frac{21 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - \dots + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2 - h_4^0}{h_4^* - h_4^0} \le 0, \quad (128)$$

$$0 \le \lambda \le 1, \quad 21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0. \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (129)$$

*Шаг 4*. Решение λ-задачи (110)-(115).

Обращение к функции *fmincon*(…), [16]:

$[Xo, Lo] = fmincon('Z\_TehnSist\_4Krit\_L', X0, Ao, bo, Aeq, beq, lbo, ubo,$
$'Z\_TehnSist\_LConst', options).$

В результате решения векторной задачи (111)-(115) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ-задачи (124)-(129) получили:

$$\boldsymbol{X^o} = \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6087\}, \quad (130)$$

точку оптимума $\boldsymbol{X^o}$ – конструктивные параметры материала, которая представлена на рис. 3;

$h_k(Y^o), k = \overline{1, K}$- величины критериев (характеристик структуры материала):

$$\{h_1(Y^o) = 364.0, h_2(Y^o) = 1790.7, h_3(Y^o) = 194.3, h_4(Y^o) = 47.5\}; \quad (131)$$

$\lambda_k(Y^o), k = \overline{1, K}$- величины относительных оценок

$$\{\lambda_1(Y^o) = 0.7372, \lambda_2(Y^o) = 0.6087, \lambda_3(Y^o) = 0.6087, \lambda_4(Y^o) = 0.6087\}; \quad (132)$$

$\lambda^o$=0.60870 – это максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок, измеренный в относительных единицах: $\lambda^o = min\,(\lambda_1(Y^o), \lambda_2(Y^o), \lambda_3(Y^o), \lambda_4(Y^o)) = 0.6087,$

$\lambda^o = 0.6087$ называют также гарантированным результатом в относительных единицах. $\lambda_k(Y^o)$ и соответственно характеристики структуры материала $f_k(Y^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

В соответствии с теоремой с 1, в точке $\boldsymbol{X^o}$ критерии 2, 3 и 4 противоречивы. Это противоречие определяется равенством: $\lambda_2(Y^o) = \lambda_3(Y^o) = \lambda_4(Y^o) = \lambda^o = 0.6087$ , а остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^o) = 0.7372\} > \lambda^o$.

Теорема 1 служит основой для определения правильности решения векторной задачи. В ВЗМП, как правило, для двух критериев выполняется равенство: $\lambda^o = \lambda_q(Y^o) = \lambda_p(Y^o),\ q, p \in \boldsymbol{K}, X \in S$, (в нашем примере такие критерии 2, 3, 4), для других критериев определяется как неравенство.

*8.3.2.* **6 этап.** *Геометрической интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 4 критериями в двухмерную систему координат (с 2 параметрами) в относительных единицах.*

Для геометрической интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 4 критериями в двухмерную систему координат (с 2-мя параметрами) в относительных единицах введем изменения. В ВЗМП (110)-(115) параметры $y_1$ и $y_3$ рассматриваются как переменные, параметры $y_2$ и $y_4$ рассматриваются как постоянные. Присвоим постоянным параметрам размерность:

$y_2 = 49.5492, y_4 = 2.2$ в соответствии с результатом решения ВЗМП (110)-(115) при равнозначных критериях, представленных в (130).

В итоге ВЗМП (110)-(115) стала двухмерной.

Представим в целом результаты решения с двумя переменными параметрами $x_1$ и $x_3$ (двухмерная задача):

Y =[Yopt(1,:)={46.5676 43.2324 8.0000 2.2000}, $\lambda_1$(Y1$omax$) =0.5;
Yopt(2,:)= {55.6075 34.1925 8.0000 2.2000}, $\lambda_2$(Y2$omax$) =0.6087;
Yopt(3,:)= {31.9000 59.0000 2.1000 7.0000}, $\lambda_3(\text{Y3}omax) = 0.6087$;
Yopt(4,:)= {36.7000 59.0000 2.1000 2.2000}, $\lambda_4(\text{Y4}omax) = 0.7372$;
Yo(1:4) = {43.9022 49.5492 4.3486 2.200}, $\lambda(\text{Yo}) = \lambda^o = 0.5196$. (133)

Характеристики материала в относительных единицах $\lambda_1(Y), \lambda_2(Y), \lambda_3(Y), \lambda_4(Y)$ показаны на рис. 4 в трехмерном пространстве $x_1$ $x_3$ и λ, где третья ось λ - относительная оценка.

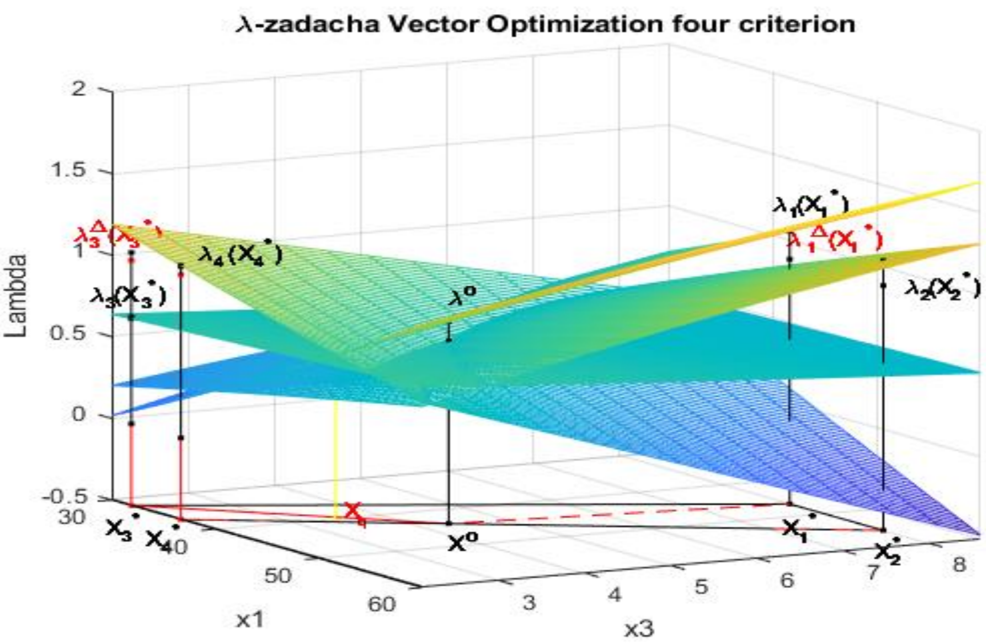


Рис. 4. Геометрическая интерпретация результатов решение λ-задачи
в трехмерной системе координат $x_1$ $x_2$ и λ

В допустимом множестве точек $\boldsymbol{S}$, образованных ограничениями (128)-(129), точки оптимума $Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*$ , объединенных в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$, представлены на рис. 3. Координаты этих точек, а также характеристики материала в относительных единицах $\lambda_1(Y), \lambda_2(Y), \lambda_3(Y), \lambda_4(Y)$ показаны на рис. 4 в трех мерном пространстве $x_1$ $x_2$ и λ, где третья ось λ - относительная оценка.

*8.3.3. 7 **этап**. Результаты решения Векторной Задачи Математического Программирования при равнозначных критериях - подготовка информации для принятия решений с приоритетом критерия.*

В результате решения ВЗМП при равнозначных критериях получили.

**Результаты решения Векторной Задачи Математического Программирования**

(Математическая модель ***И***нженерной ***С***истемы - ИС) **при равнозначных критериях**

1. ***Критерии (характеристики ИС), параметры*** в точке оптимума:

**Критерий 1**: $h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9$; Параметры: $Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}$ ;

**Критерий 2**: $h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1361.4$; Параметры: $Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}$;

**Критерий 3**: $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.3$; Параметры: $Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}$;

**Критерий 4:** $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$; Параметры: $Y_4^* = \{y_1 = 36.7, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$; (134)

2. ***Критерии (характеристики ИС), параметры*** в точке антиоптимума:

**Критерий 1**: $h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6$; Параметры: $Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.00\}$;

**Критерий 2**: $h_2^0 = h_2(Y_2^0) = -2458.5$; Параметры: $Y_2^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.\}$;

**Критерий 3**: $h_3^0 = h_3(Y_3^0) = 169.26$; Параметры: $Y_3^0 = \{y_1 = 78.16, y_2 = 9.02, y_3 = 8, y_4 = 4.81\}$;

**Критерий 4**: $h_4^0 = h_4(Y_4^0) = -73.6$; Параметры: $Y_4^0 = \{y_1 = 62.7, y_2 = 22.9, y_3 = 8, y_4 = 6.39\}$; (135)

3. ***Критерии (характеристики ИС)*** в относительных единицах в точке $\boldsymbol{Y^o}$:

**λº=0.6087** – максимальный нижний уровень в относительных единицах

$\boldsymbol{\lambda_k(Y^o), k = \overline{1,K}}$- величины относительных оценок:

$$\{\lambda_1(Y^o) = \mathbf{0.7372}, \lambda_2(Y^o) = \mathbf{0.6087}, \lambda_3(Y^o) = \mathbf{0.6087}, \lambda_4(Y^o) = \mathbf{0.6087}\}; \quad (136)$$

Параметры: $\boldsymbol{X^o} = \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.5, x_3 = 4.34, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6087\}$. (137)

4. ***Критерии (характеристики ИС)*** в физических единицах:

$\boldsymbol{h_k(Y^o), k = \overline{1,K}}$- величины критериев (характеристик) в физических единицах:

$$\{h_1(Y^o) = 364.0, h_2(Y^o) = 1790.7, h_3(Y^o) = 194.3, h_4(Y^o) = 47.5\}; \quad (138)$$

5. ***Информация об ИС*** в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия:

**1.** $\boldsymbol{h_1(Y) \to max}$: $h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9 \le \boldsymbol{h_1(Y^o) = 364.0} \le h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6$;

**2.** $\boldsymbol{h_2(Y) \to min}$ : $h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1361.4 \le \boldsymbol{h_2(Y^o) = 1790.7} \le h_2^0 = h_2(Y_2^0) = -2458.5$;

**3.** $\boldsymbol{h_3(Y) \to max}$: $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.3 \le h_3(Y^o) = 194.3 \le h_3^0 = h_3(Y_3^0) = 169.26$;

**4.** $\boldsymbol{h_4(Y) \to min}$: $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714 \le h_4(Y^o) = 47.5 \le h_4^0 = h_4(Y_4^0) = -73.62$; (139)

*8.3.4. Заключение по результатам решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях.*

Мы представили методологию решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях (характеристиках) на примере инженерной системы - материалы. В процессе решения задачи системе MATLAB нами представлена геометрическая интерпретация результатов решения в двухмерной системе координат. Результаты решения векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями с четырьмя переменными совпадают с результатами решения векторной задачи с двумя переменными.

*Таким образом*, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая иллюстрация от $N$-мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками линейной аппроксимации. Нами подготовлена информация для исследования и выбора оптимального решения при приоритете того или иного критерия (характеристики) инженерной системы. На решение этой проблемы направлена вторая часть работы.

**Часть 2. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности - с приоритетом критерия.**

**8.4.** ***Блок 3. Анализ, сравнение результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях сложной инженерной системы (модели структуры материала) и подготовка к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию.***

*8.4.1.* ***8 этап****. Анализ и сравнение результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями с четырьмя и двумя переменными.*

Сравним результаты решения векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями (124)-(129) с четырьмя переменными $y_1, y_2, y_3$ и $y_4$ с результатами решения векторной задачи (124)-(129) с двумя переменными $y_1$ и $y_3$.

Результаты решения четырехмерной ВЗМП (124)-(129) с переменными координатами $\{y_1\, y_2\, y_3\, y_4\}$ представлены в (130), (131), (132), а результаты решения двухмерной ВЗМП с переменными координатами $\{y_1\, y_3\}$ представлены в (133).

Результаты решения и сравнения исследуемых задач представлены в трехмерной системе координат $x_1\, x_3$ (обозначения: $y_1\, y_3$) и λ на рис. 5.

(***Замечание***. На рисунках 5, 6, 7, …: вектор параметров $\boldsymbol{Y} = \{y_1, \dots, y_N, \lambda\}$ заменен на $\boldsymbol{X} = \{x_1, \dots, x_N, \lambda\}$; функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ заменены на функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в соответствии с программным обеспечением).

На рис. 5 представлены точка оптимума в координатах $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_3}$:

$\boldsymbol{X^o} = \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{\boldsymbol{x_1} = \mathbf{43.9}, x_2 = 49.54, \boldsymbol{x_3} = \mathbf{4.348}, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6087\}$

из (87); и относительная оценка:

$\{\lambda_1(Y^o) = 0.7372, \boldsymbol{\lambda_2}(\boldsymbol{Y^o}) = \mathbf{0.6087}, \boldsymbol{\lambda_3}(\boldsymbol{Y^o}) = \mathbf{0.6087}, \lambda_4(Y^o) = \mathbf{0.6087}\}$ из (6.51) в тех же координатах $x_1\, x_3$.

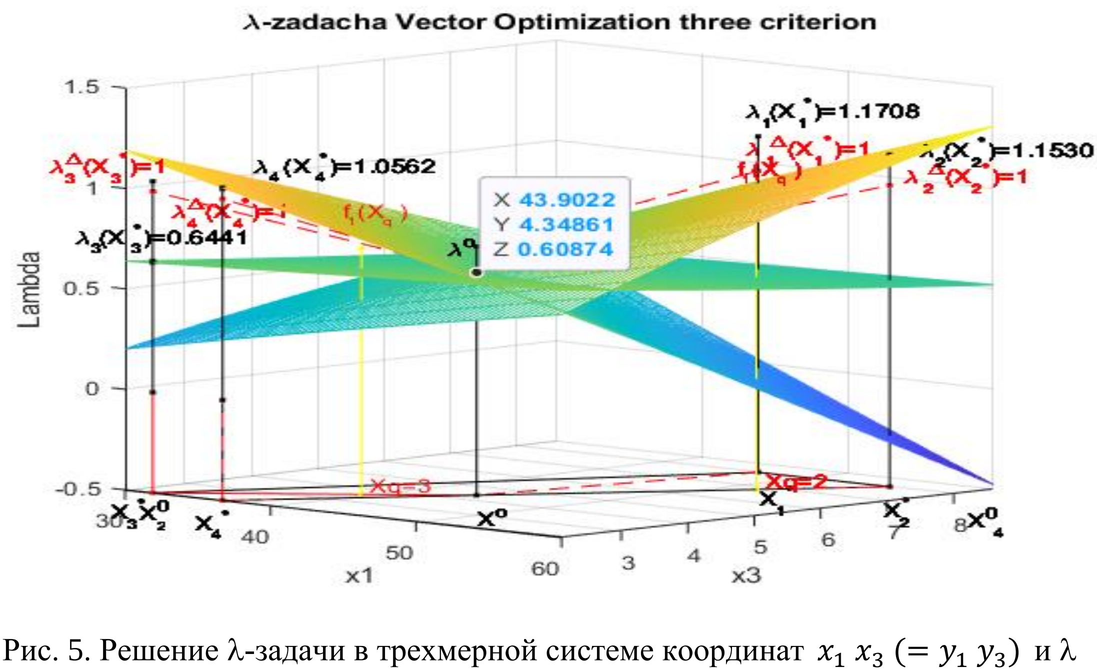


Рис. 5. Решение λ-задачи в трехмерной системе координат $x_1\, x_3\; (= y_1\, y_3)$ и λ

Рассмотрим, например, оптимальную точку $X_3^*$. Функция $\lambda_3(X)$ сформирована из функции $f_3(X)$ с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$, с постоянными координатами $\{x_2$=49.54, $x_4$=2.2$\}$, взятые из оптимальной точки $X^o$ (130). В точке $X_3^*$ относительная оценка $\boldsymbol{\lambda_3(X_3^*) = 0.6441}$ – показана на рис. 3 черной точкой. Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3(X_3^*)$ полученная из функции $f_3(X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\boldsymbol{\lambda_3^\Delta(X_3^*) = 1}$ – показана на рис. 5 красной точкой. В итоге:

*во-первых*, при равнозначных критериях координаты точек оптимума $x_1, x_3$:

$\boldsymbol{X^o} = \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348, \lambda^o = 0.6087\}$ - в двухмерной

$\boldsymbol{X^o} = \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6087\}$

в четырёхмерной системе совпадают (используя программные возможности системы MATLAB, покажем числовые значения точки оптимума $\{Y^o, \lambda^o\}$ на рис. 5);

*во-вторых*, в точке оптимума $X_3^*$ оптимальные величины критериев $h_k(Y_k^*), k = 3$ и относительные оценки $\lambda_k(Y_k^*) = 0.6441, k = 3$ и $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = 3$ ***не совпадают***.

Разность между относительными оценками $\lambda_3^\Delta(X_3^*)$=1 и $\lambda_3(X_3^*) = 0.6441$ является ошибкой $\Delta$ = 0.3559 перехода от четырехмерной (а в общем случае *N*-мерной) к двухмерной системе измерений. Аналогично на рис. 5 показаны:

точка $X_1^*$, соответствующие относительные оценки $\lambda_1(X_1^*) = 1.1708$, $\lambda_1^\Delta(X_1^*) = 1$;

точка $X_2^*$, соответствующие относительные оценки $\lambda_2(X_2^*) = 1.1530$, $\lambda_2^\Delta(X_2^*) = 1$;

точка $X_4^*$, соответствующие относительные оценки $\lambda_4(X_4^*) = 1.0562$, $\lambda_4^\Delta(X_4^*) = 1$.

*8.4.2. Вывод из анализа:* ***Информация об Инженерной Системе*** *в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия.*

*Таким образом*, по результатам решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях мы сформулировали информацию: принятия управленческого решения для улучшения любого критерия (характеристики инженерной системы): $h_k(Y_k^*) \le \boldsymbol{h_k(Y^o)} \le h_k(Y_k^0), k = \overline{1, K}$.

***Информация об ИС*** в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия:

**1.** $\boldsymbol{h_1(Y) \to max}$**:** $h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9 \le \boldsymbol{h_1(Y^o) = 364.0} \le h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6$;

**2.** $\boldsymbol{h_2(Y) \to min}$ : $h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1361.4 \le \boldsymbol{h_2(Y^o) = 1790.7} \le h_2^0 = h_2(Y_2^0) = -2458.5$;

**3.** $\boldsymbol{h_3(Y) \to max}$: $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.3 \le h_3(Y^o) = 194.3 \le h_3^0 = h_3(Y_3^0) = 169.26$;

**4.** $\boldsymbol{h_4(Y) \to min}$**:** $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714 \le h_4(Y^o) = 47.5 \le h_4^0 = h_4(Y_4^0) = -73.62$;

*8.4.3. Подготовка к геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию.*

При подготовке геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию используем рис. 5, удалив функции в относительных единицах $\lambda_1(Y), \lambda_2(Y), \lambda_3(Y), \lambda_4(Y)$ и представим его на рис. 6. На рис. 6 сформируем относительные оценки четырех критериев: $\lambda_k(Y_k^*)$, $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$.

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в (115) в точках оптимума $Y_1^*$, $Y_2^*$, $Y_3^*$, $Y_4^*$ получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*) = \left\| \begin{matrix} L(Y_1^*) \\ L(Y_2^*) \\ L(Y_3^*) \\ L(Y_4^*) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{1.0000}\ 0.9245\ 0.3560\ 0.1197 \\ 0.9367\ \mathbf{1.0000}\ 0.1968\ 0.0363 \\ 0.0\qquad 0.0\ \mathbf{1.0000}\ 1.011 \\ 0.3669\ 0.2257\ 0.9427\ \mathbf{1.0000} \end{matrix} \right\|.$$

Представим из (115) величины относительных оценок в точке оптимума, например $Y_2^*$:
$L(Y_2^*) = \{\lambda_1(Y_2^*) = 0.9367, \lambda_2(Y_2^*) = 1.0000, \lambda_3(Y_2^*) = 0.1968, \lambda_4(Y_2^*) = 0.0363\}$

на рис. 6. Линейная функция, соединяющая точки $\lambda^o = 0.60874$ и $\lambda_2^\Delta$ ( $X_2^*$ )=1 в относительных единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$ . Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функций $f_2(X)$ в относительных единицах из $N$-мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат.

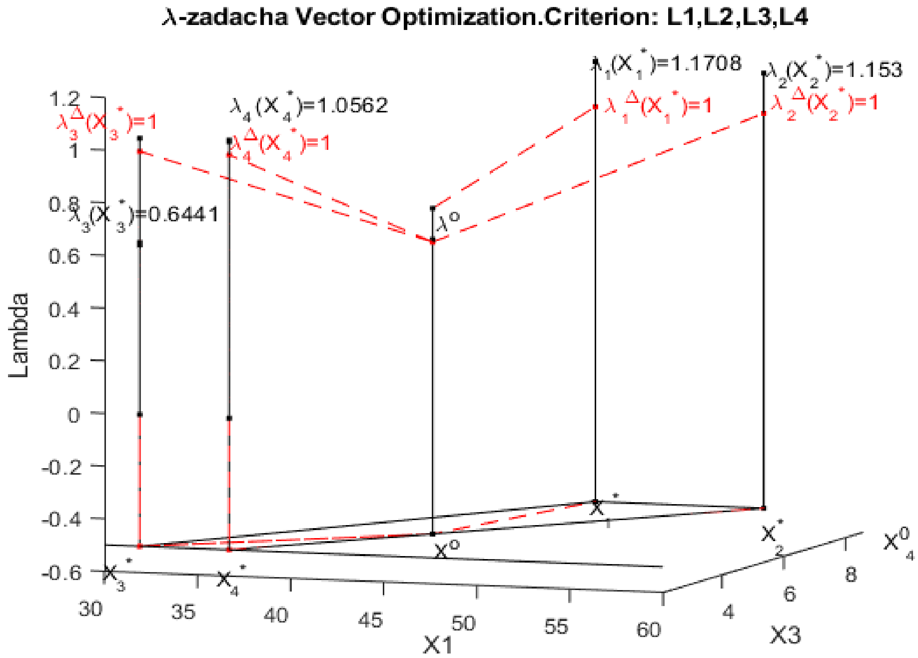


Рис. 6. λ-задача в системе координат $x_1\ x_3$ $(= y_1\ y_3)$ и λ. Результаты решения $\lambda_1(Y_1^*) = \lambda_2(Y_2^*) = \lambda_3(Y_3^*) = \lambda_4(Y_4^*) = 1;\ L(Y_2^*) = \{\lambda_1(Y_2^*), \lambda_2(Y_2^*), \lambda_3(Y_2^*), \lambda_4(Y_2^*)\}$

Аналогично исследуются все функции (критерии) инженерной системы.

В целом на рис. 6 в точке $X_2^*$ показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций (критериев):

$f_1(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_1^\Delta(X_2^*) = 0.9367$;
$f_2(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_2^\Delta(X_2^*) = 1.0$;
$f_3(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_3^\Delta(X_2^*) = 0.1968$;
$f_4(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_4^\Delta(X_2^*) = 0.0363$.

На рис. 4 также показаны координаты точки оптимума:

$$\boldsymbol{X^o} = \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1(X) = 43.9, x_3(Y) = 4.348, \lambda^o(Z) = 0.6087\}$$

и координаты относительной оценки $\lambda_3^\Delta(X_2^*) = 0.1968$:

$$\{\boldsymbol{Y^o} = \{x_1(X) = 55.6075, x_3(Y) = 8, \lambda_3^{\Delta}(Z) = 0.1968\}.$$

Результаты решения $\boldsymbol{X^o}$ и $\boldsymbol{Y^o}$ показывают, что математические результаты полностью совпадают с геометрическими.

В дальнейшем используем рис. 6 как структуру, на которую наложена информация геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию $q \in K$.

**8.5.** ***Блок 4. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по отдельному приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения.***

В блоке 4 проведено исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала), геометрическая интерпретация результатов решения по каждому приоритетному критерию, которые обозначены *k1, k2, k3, k4.* Исследование, выбор оптимальных параметров и геометрическая интерпретация по каждому критерию выполнена по одинаковой методологии в виде отдельного раздела: *8.5.4.k1, 8.5.4.k2, 8.5.4.k3, 8.5.4.k4.*

Каждый раздел исследования и выбора параметров по соответствующему критерию включает следующую последовательность работ:

Решение векторной задачи при равнозначных критериях;

Выбор численной величины исследуемого (приоритетного) критерия;

Решение векторной задачи с выбранной величиной критерия (выбор параметров);

Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи в относительных и физических единицах.

**8.5.4.*k1.*** ***Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по первому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.***

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном ***приоритете первого критерия*** на базе многомерной математики.

Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете первого критерия и представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат ***в относительных единицах***.

Представлена геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом первого критерия при проектировании в трехмерной системе координат ***в физических единицах.***

*4.1.k1. Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном приоритете первого критерия в многомерной математике. (решение обратной задачи).*

Как правило, лицом, принимающим решения, является конструктор системы**.**

***Шаг*** 1. Решается векторная задачи при равнозначных критериях. Решения векторной задачи представлено на стадии 8.4 3 этап. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше. Точки, оптимальные по Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ находится между оптимальными точками $X_1^* \, X_{13}^o \, X_3^* \, X_{34}^o \, X_4^* \, X_{42}^o X_2^* \, X_{21}^o \, X_1^*$. Проведем анализ множества точек Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X^o_{13}\, X^o_{34}\, X^o_{42}\, X^o_{21}$ с точкой $X^o$, которая условно представляет центр множества Парето.

Как результат решения получили четыре подмножеств точек $X \in \boldsymbol{S}^o_q \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1,4}$. Подмножество точек $\boldsymbol{S^o_1} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ выделенное точками $X^*_1\, X^o_{13}\, X^o X^o_{12}\, X^*_1$, характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, $\lambda_4$, то есть в поле первого критерия $\boldsymbol{S^o_1}$ имеет приоритет над остальными. Аналогично $\boldsymbol{S^o_2}, \boldsymbol{S^o_3}, \boldsymbol{S^o_4}$- подмножества точек, характеризуется тем, что второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, обозначим: $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S^o_1} \cup \boldsymbol{S^o_2} \cup \boldsymbol{S^o_3} \cup \boldsymbol{S^o_4}$. Геометрическая интерпретация координат всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1\; x_3\}$ на рис. 5. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1\; x_3\; \lambda\}$ на рис. 6, где третья ось λ- относительная оценка.

Ограничения на рис. 6 снижены до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Полученная информация является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето.

Анализируем, если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $\boldsymbol{S^o_1}, \boldsymbol{S^o_2}, \boldsymbol{S^o_3}, \boldsymbol{S^o_4}$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис.6 в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

***Шаг*** 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теоремы 1 известно, что в оптимальной точке $X^o$ всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in \boldsymbol{K}$ и $p \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется точное равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}, \tag{140}$$

а для остальных выполняется неравенства: $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K},\; q \neq p \neq k$.

В модели структуры материала (97)-(101) и соответствующей λ-задачи (110)-(115) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$= 0.6087, т.е. выполняется числовая симметрия. Из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$=0.6087 противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in \boldsymbol{K}$.

***Выбор приоритетного критерия:***

На дисплей выдается общая информация для принятия решений:

Критерии в точке оптимума $X^o$: FXo =363.968 1790.681 194.2795 47.5045. (141)

Относительные оценки в $X^o$: LXo =0.73718 0.60874 0.60874 0.60874. (142)

Антиоптимум: $Y^0_1 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h^0_1 = h_1(Y^0_1) = 296.6$.

ВЫВОД: Критерии 2, 3, 4 наиболее противоречивы, из них выбираем приоритетный.

В данном разделе ***исследуется первый критерий*** (функция) $q = 1 \in \boldsymbol{K}$

Выдается сообщение на дисплей:

q=input('Введите приоритетный критерий (номер) *q*= ') – Ввели критерий ***q*=1**.

***Шаг*** 3. Формируются числовые пределы изменения величины приоритета критерия

$q = 1 \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q = 1 \in \boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума $X^o$ (116) в точку $X^*_q$, полученную на первом шаге. Информационные данные о критерии *q*=1 выдаются на дисплей:

$$f_q(X^o) = 363.9686 \leq f_q(X) \leq 387.9904 = f_q(X_q^*), q = 1 \in \boldsymbol{K}. \quad (143)$$

Аналогично, в относительных единицах критерий *q=1* изменяется в следующих пределах:

$\lambda_q(X^o) = 0.7372 \leq \lambda_q(X) \leq 1.0 = \lambda_q(X_q^*), q = 1 \in \boldsymbol{K}$

Эти данные анализируется.

***Шаг*** 4. Определяется величина приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия *fq*=» - вводим, например, $f_q$=375.

***Шаг*** 5. Для $f_q$=375 *вычисляется относительная оценка*.

Для приоритетного критерия $f_q = 375$ вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{375 - 296.6}{387.9904 - 296.6} = 0.8579,$$

которая при переходе от точки $X^o$ к точке $X_q^*$ лежит в пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.7372 \leq \lambda_q(X) = 0.8579 \leq 1.0 = \lambda_q(X_q^*), q = 1 \in \boldsymbol{K}. \quad (144)$$

***Шаг*** 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (119) и соответственно относительной оценки $\lambda_q$ в (120), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, $\lambda_q$, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.7489 - 0.6087}{1 - 0.6087} = 0.3558, q = 3 \in \boldsymbol{K}. \quad (145)$$

***Шаг*** *7*. Определяются координаты приоритета критериев с размерностью $f_q$.

Предполагаем линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}, q = 1$ определим координаты для точки с размерностью $f_q = 375$ с относительной оценкой (132):

$$x_{\lambda=0.74}^{q=3} = \{x_1 = X^o(1) + \rho(X_q^*(1) - X^o(1)),$$

$$x_2 = X^o(2) + \rho\left(X_q^*(2) - X^o(2)\right),$$

$$x_3 = X^o(3) + \rho\left(X_q^*(3) - X^o(3)\right),$$

$$x_4 = X^o(4) + \rho\left(X_q^*(4) - X^o(4)\right)\}, \quad (146)$$

где $X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}$,

$X_1^* = \{x_1 = 46.56, x_2 = 59.00, x_3 = 2.1, x_4 = 7.0\}$.

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$X^q = \{x_1 = 45.1262, x_2 = 46.6484, x_3 = 6.0254, x_4 = 2.2000\}\}$. (147)

***Шаг*** *8*. Формирование главных показателей точки $X^q$.

В полученной точке $X^q$, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1,K}\}$:

$$f_k(X^{q=1}) = \{f_1(X^q) = 376.6, f_2(X^q) = 1618.4, f_3(X^q) = 189.3, f_4(X^q) = 57.3\}; \quad (148)$$

все относительные оценки критериев: $\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K},\ \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$:

$$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.8759, \lambda_2(X^q) = 0.7657, \lambda_3(X^q) = 0.4868, \lambda_4(X^q) = 0.3815\}; \quad (149)$$

минимальная относительная оценка: $\min\lambda(X^q) = \min\limits_{k\in K}(\lambda_k(X^q)) = 0.3815.$

$P^q = [p_1^1 = 1.0, p_2^1 = 1.1438, p_3^1 = 1.7991, p_4^1 = 2.2956];$

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1,K}\}$:

$\lambda_k(X^q) * P^q = \{p_1^1 * \lambda_1(X^q) = 0.8759,\ p_2^1 * \lambda_2(X^q) = 0.8759,\ p_3^1 * \lambda_3(X^q) = 0.8759,\ p_4^1 * \lambda_4(X^q) = 0.8759\}$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^3\lambda_1(X^q), p_2^3\lambda_2(X^q), p_3^3\lambda_3(X^q), p_4^3\lambda_4(X^q)) = 0.8759$$

Аналогично получены другие точки из области Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\}\in\boldsymbol{S^o}$.

*4.2.k1.* ***Анализ результатов*** *решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете первого критерия.*

Рассчитанная в (148) величина первого критерия при заданном приоритете

$f_q(X_t^o) = 376.6, q = 1\in\boldsymbol{K}, q\in\boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 375$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |376.6 - 375| = 1.6$ определяется ошибкой линейной аппроксимации:

$\Delta f_{q\%} = 0.5\%$.

Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |376.6 - 375| = 1.6$, которая измерена в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.05\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. ***Конец***.

При моделировании могут быть изменены параметрические ограничения (101) и функции (100), т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений).

В примере окончательный вариант включает параметры:

$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}$;

параметры структуры материала при заданном приоритете критерия:

$q$=1: $X^q = \{x_1 = 45.1262, x_2 = 46.6484, x_3 = 6.0254, x_4 = 2.2000\}$.

*4.3.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по первому приоритетному критерию* ***в относительных единицах.***

Для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров решения векторной задачи по первому приоритетному критерию в относительных единицах сформируем рис. 6.*k1*.

Аналогично рис. 6, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума $Y_k^*$ $\lambda_k(Y_k^*), k = \overline{1,K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^{\Delta}(X_k^*) = 1, k = \overline{1,K}$ (красный цвет) и представим их рис. 6.*k1*.

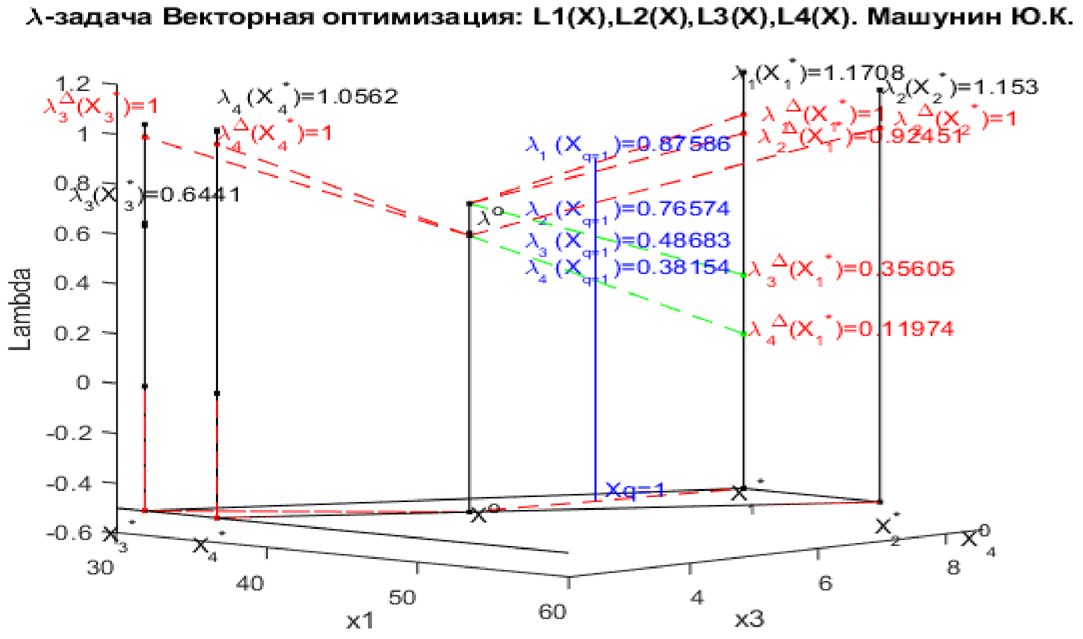


Рис. 6.*k1*. λ-задача в системе координат $x_1\ x_3\ \ (= y_1\ y_3)$ и λ. Результаты решения: $\lambda_k^{\Delta}(X_k^*) = 1, k = \overline{1,K}$; относительные оценки с приоритетом первого критерия в точке оптимума

$$X_{q=1}\text{: } \lambda_k\left(X_{q=1}\right), k = \overline{1,K}.$$

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в (6.36) в точках оптимума $Y_1^*,\ Y_2^*,\ Y_3^*,\ Y_4^*$ получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*) = \left\|\begin{matrix} L(Y_1^*) \\ L(Y_2^*) \\ L(Y_3^*) \\ L(Y_4^*) \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1.0000 & 0.9245 & 0.3560 & 0.1197 \\ 0.9367 & 1.0000 & 0.1968 & 0.0363 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0000 & 1.011 \\ 0.3669 & 0.2257 & 0.9427 & 1.0000 \end{matrix}\right\|.$$

На рис. 6.*k1* $\lambda_1(Y_1^*) = 1.0000$ обозначена как $\lambda_2^{\Delta}(X_2^*)$=1.

Линейная функция, соединяющая точки $\lambda(X^o) = 0.7372$ и $\lambda_1^{\Delta}(X_1^*)$=1 в относительных единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$ . Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функций $f_1(X)$ в относительных единицах из *N*-мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат. Аналогично исследуются все функции (критерии). В целом на рис. 6.*k1* в точке $X_1^*$ показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций (критериев):

$f_1(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_1^{\Delta}(X_1^*) = 1.0$;

$f_2(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_2^{\Delta}(X_1^*) = 0.92451$;

$f_3(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_3^{\Delta}(X_1^*) = 0.35605$;

$f_4(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_4^{\Delta}(X_1^*) = 0.11974$.

Относительные оценки с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ $\lambda_k\left(X_{q=1}\right) = \frac{f_k(X_{q=1}) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$ : $\lambda_k\left(X_{q=1}\right) = \{\lambda_1(X_{q=1}) = 0.87586, \lambda_2(X_{q=1}) = 0.76574, \lambda_3(X_{q=1}) = 0.48683, \lambda_4(X_{q=1}) = 0.38154\}$;

Результаты решения показывают, что математические результаты полностью совпадают с геометрическими.

*4.4.k1. **Геометрическая интерпретация** результатов решения ВЗМП* **(функций:** $f_1(X), \dots, f_4(X)$ *) с приоритетом первого критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат **в физических единицах**.*

Исходной информацией для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи (ВЗМП) с приоритетом первого критерия являются:

параметры точки оптимума при равнозначных критериях:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}$, рассчитанной на пятом шаге алгоритма в двухмерной системе координат $x_1, x_3$ (см. Рис. 1) и представленной в трехмерной системе координат $x_1, x_3$ и $\lambda$ в относительных единицах на рис. 4, 5, 6 при проектировании.

Исследуем и представим параметры последовательно для каждой характеристики структуры материала (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в ***физических единицах***.

***1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП** с приоритетом первого критерия – **первой характеристики** $f_1(X)$ при проектировании в физических единицах.*

На Рис. 7.*k1* исследованы: точки оптимума $X_1^*$, $X_{q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_1(X_1^*)$, $\lambda_1(X_{q=1})$. Также исследованы линейные функции в координатах:

$\lambda^o - \lambda_1(X_{q=1})$ и $\lambda^o - \lambda_1^{\Delta}(X_1^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Первая характеристика структуры материала $h_1(X)$ (110) сформирована в 6.1.4: $\max h_1(X) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2$,

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_1(Y)$ в физических единицах с переменными координатами $\{y_1\ y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = 49.54, y_4 = 2.2\}$ на рис. 7.*k1*. Координаты точки и функция первого критерия на **максимум:**

$Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9$ при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_1^{\Delta}(X_1^*) = -387.9$;

$Y_1^* = \{y_1 = 46.5676, y_3 = 8.0\}$ (на рис. 7.*k1* обозначена как $X_1^*$). В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_1^* = f_1(X_1^*) = 403.6$. (Черный цвет). В системе MANLAB обозначено как $h_1^*$=Z=402.666.

Координаты точки и функция первого критерия на **минимум:**

В точке $X_1^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_1^0 = f_1(X_1^o) = 303.66$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_1^{\Delta}(X_1^o) = 296.59$.

Координаты точки и функция первого критерия **при равнозначных критериях:**

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_1(X^o) = 363.96$.

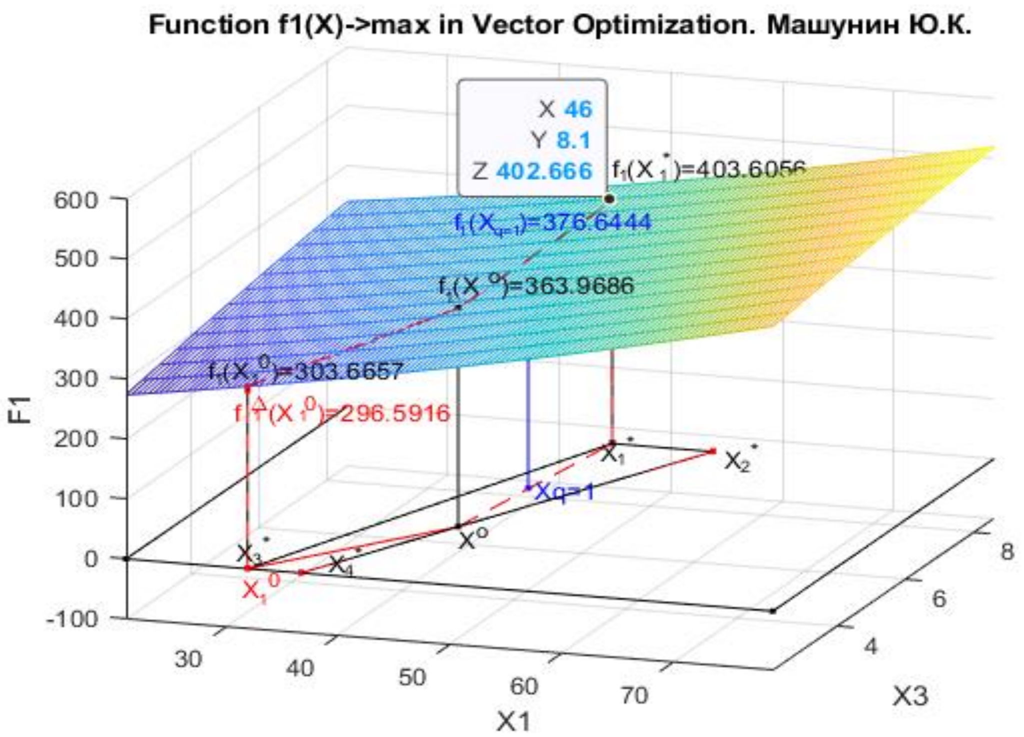


Рис. 7.*k1*. Функция $f_1(X)$ с приоритетом первого критерия в двухмерной системе координат $x_1$ $x_3$, геометрическая интерпретация функции $f_1(X)$ в системе координат $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ : $\lambda_1(X_{q=1}) = \frac{f_1(X_{q=1})-f_1^0}{f_1^*-f_1^0} = 0.87586$ . В физических единицах величина первого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_1(X_{q=1}) = 376.64$ близка к заданной $f_1(X_{q=1}) = 375$ (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_1(X^o)$ и $f_1^\Delta$ ( $X_1^*$ ) в физических единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_1^\Delta(X_1^*)$ -$f_1(X^o)$- $f_1^\Delta(X_1^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – второй характеристики** $f_2(X_{2,q=1})$ с приоритетом первого критерия - структуры материала при проектировании в физических единицах.*

На Рис. 8.*k1* исследованы: точки оптимума $X_2^*$ , $X_{2,q=1}$ , с соответствующими относительными оценками $\lambda_2(X_2^*)$ $\lambda_2(X_{2,q=1})$, а также линейные функции $\lambda^o\lambda_2(X_{2,q=1}) - \lambda_2^\Delta(X_2^*)$ $\lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_2(X_{2,q=1})$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Вторая характеристика структуры материала $h_2(X)$ (112) сформирована в 4.1.4:

$min\ f_2(X) \equiv 795.72 \ +23.89\, x_1 +30.866\, x_2 \ -25.8586\, x_3 \ -45.0026\, x_4 \ -0.7683\, x_1 x_2 \ +0.4703\, x_1 x_3 +0.7472 x_1 x_4 -0.1283 x_2 x_3 +0.3266 x_2 x_4 -0.0112 x_3 x_4 +0.0398 x_1^2 +0.0365 x_2^2 \ +3.2 x_3^2 +2.6457 x_4^2$.

Представим геометрическую интерпретацию функцию $h_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ (130) на рис. 8.$k1$.

Координаты точки и функция второго критерия на **оптимум (минимум):**

$Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_2^* = h_2(X_2^*) \ = 1361.4$

при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_2^{\Delta}(X_2^*) \ = 1361.41$.

В системе MATLAB обозначено как $h_2^*$=Z=1361.42.

$Y_2^* \ = \{x_1 = 55.6, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 8$k1$ обозначена как $X_2^*$). В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_2^* = f_2(X_2^*) = 1193.56$. (Черный цвет).

Координаты точки **минимума** (Наихудшее решение – максимальное) в точке $X_2^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_2^0 = f_2(X_2^o) = 2207.2$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_2^{\Delta}(X_2^o) = 2458.5$.

Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях:**

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_2(X^o) = 1790.68$.

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ второго критерия: $\lambda_2(X_{q=1}) = \frac{f_2(X_{q=1}) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} = 0.76574$. В физических единицах величина второго критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_2(X_{2,q=1}) = 1618.43$. (Показана фиолетовым цветом).

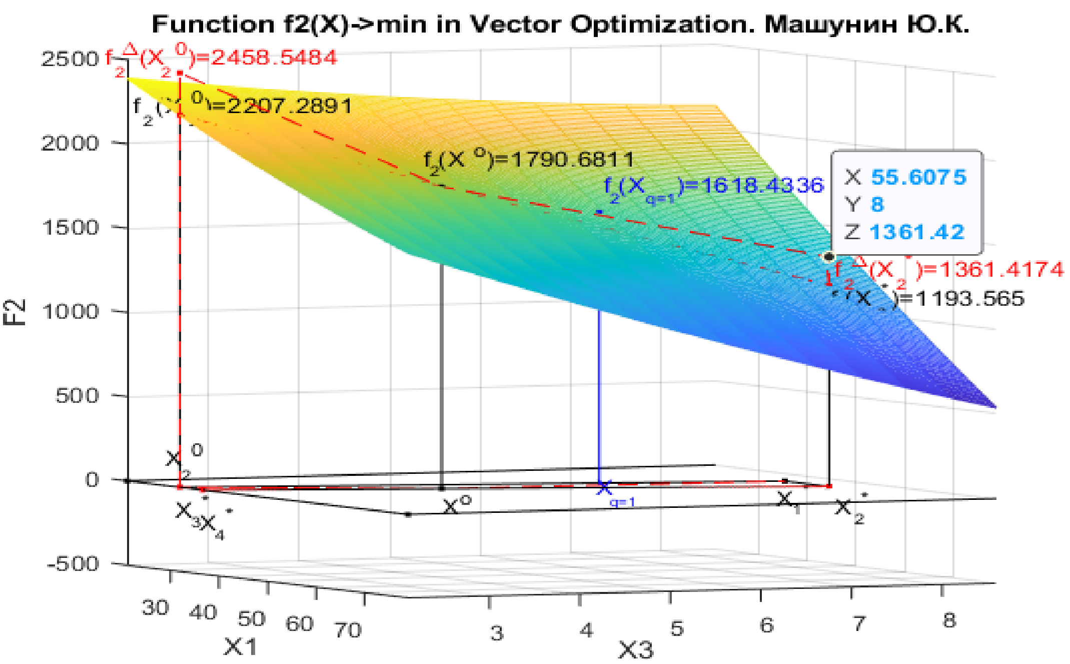


Рис. 8.$k1$. Функция $f_2(X)$ с приоритетом первого критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$, геометрическая интерпретация функции $f_2(X_{2,q=1})$ - координаты $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_2(X^o)$ и $f_2^{\Delta}(X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^{\Delta}(X_2^*)$ -$f_2(X^o)$- $f_2^{\Delta}(X_2^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – третьей характеристики*** $f_3(X_{3,q=1})$ *с приоритетом первого критерия - структуры материала при проектировании в физических единицах*.

На Рис. 9.*k1* исследованы: точки оптимума $X_3^*$, $X_{3,q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_3(X_3^*)$ $\lambda_3(X_{3,q=1})$, а также линейные функции $\lambda^o \lambda_3(X_{3,q=1}) - \lambda_3^{\Delta}(X_3^*)$ $\lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_3(X_{3,q=1})$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Третья характеристика структуры материала $h_3(X)$ (111) сформирована в 6.1.4:

$max\, h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2\}$.

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ на рис. 9.*k1*.

Координаты точки и функция третьего критерия на **максимум:**

$Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.35$

при расчете по четырем переменным. На рис. 9.*k1* обозначена как $f_3^{\Delta}(X_3^*) = -210.35$

$Y_3^* = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 9.*k1* обозначена как $X_3^*$).

В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_3^* = f_3(X_3^*) = 195.73$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_3^* = 210.3$.

Координаты точки **минимума** $X_3^0 = \{x_1 = 78.16, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 9.*k1*. Величина целевой функции $f_3^0$=169.26.

Координаты точки и функция третьег3 критерия **при равнозначных критериях:** Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_3(X^o) = 194.27$.

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ третьего критерия: $\lambda_3(X_{q=1}) = \frac{f_3(X_{q=1}) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} = 0.48683$. В физических единицах величина третьего критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_3(X_{3,q=1}) = 189.2$. (Фиолетовый цвет).

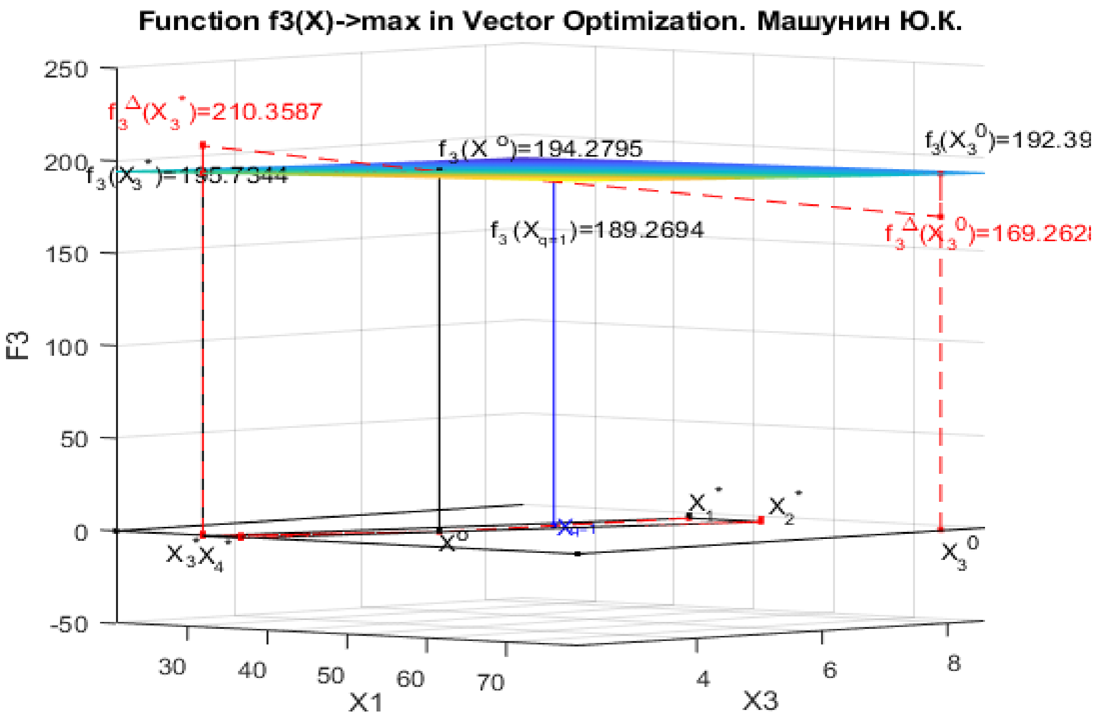


Рис. 9.$k1$. Функция $f_3(X_{3,q=1})$ с приоритетом первого критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$, геометрическая интерпретация функции $f_3(X)$ в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

Линейная функция, соединяющая точки $f_3(X^o)$ и $f_3^\Delta(X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_3^\Delta(X_1^*)$ - $f_3(X^o)$ - $f_3^\Delta(X_3^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_3(X_{3,q=1})$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – четвертой характеристики*** $f_4(X_{4,q=1})$ *с приоритетом первого критерия структуры материала при проектировании в физических единицах*.

На Рис. 10.$k1$ исследованы: точки оптимума $X_4^*,\ X_{q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_4(X_4^*)\ \lambda_4(X_{4,q=1})$, а также линейные функции $\lambda^o\lambda_4(X_{4,q=1}) - \lambda_4^\Delta(X_4^*)\ \lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_4(X_{4,q=1})$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Четвертая характеристика структуры материала $h_4(X)$ (113) сформирована в 4.1.4:

$max\ h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}\}$.

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_4(X_{4,q=1})$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ на рис. 10.$k1$.

Координаты точки и функция четвертого критерия на **максимум:**

$Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$, $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$ при расчете по четырем переменным. На рис. 9.*k1* обозначена как $f_4^{\Delta}(X_4^*) = 30.714$

$X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 9*k1* обозначена как $X_4^*$). В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_4^*$=$f_4(X_4^*) = 28.302$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_4^*$= 30.714.

Координаты точки и функция четвертого критерия **минимума** $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 8\}$. Величина целевой функции $f_4^0 = f_4^{\Delta}(X_4^*)$=−73.62.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 9*k1* обозначена как $X^o$ ). Величина целевой функции $f_4(X^o)$ = 47.5.

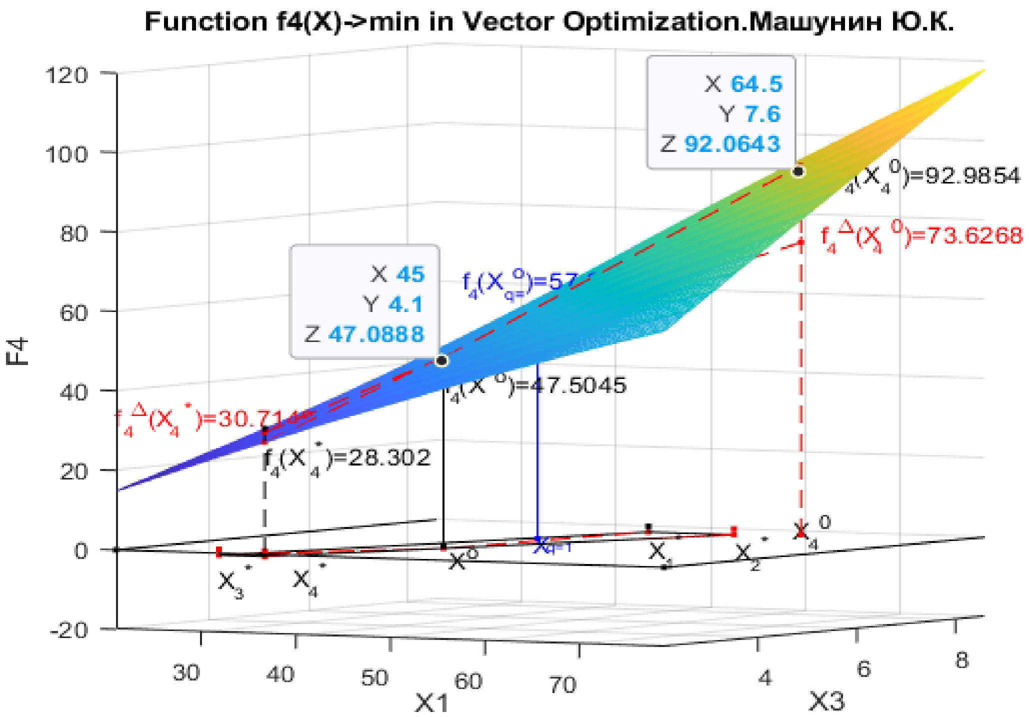


Рис. 10.*k1*. Функция $f_4(X_{4,q=1})$ в двухмерной системе координат $x_1$ $x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_4(X_{4,q=1})$с приоритетом первого критерия в системе координат $x_1, .., x_4$.

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ четвертого критерия: $\lambda_4(X_{q=1}) = \frac{f_4(X_{q=1}) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} = 0.38154$ . В физических единицах величина четвертого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_4(X_{4,q=1})$ = 57.254. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_4(X^o)$ и $f_4^{\Delta}$ ( $X_4^*$ ), в физических единицах характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_4^{\Delta}(X_4^*)$ -$f_4(X^o)$- $f_4^{\Delta}(X_4^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***Заключение по разделу: критерий*** *k1*.

В разделе рассмотрена и решена проблема (фрагмент) разработки и принятия управленческого решения условиях неопределенности в сложной инженерной системы (структуры материала). Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете первого критерия, представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев), во-первых, в относительных единицах, во-вторых, в физических единицах.

**8.5.4.*k2. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала: функций: $f_1(X), \dots, f_4(X)$) по второму приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.***

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном ***приоритете второго критерия*** на базе многомерной математики.

Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете второго критерия и представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат ***в относительных единицах***.

Представлена геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом второго критерия при проектировании в трехмерной системе координат ***в физических единицах.***

*4.1.k2. Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при **заданном приоритете второго критерия** в многомерной математике. (решение обратной задачи).*

Как правило, лицом, принимающим решения, является конструктор системы**.**

***Шаг*** 1. Решается векторная задачи при равнозначных критериях. Решения векторной задачи представлено на стадии 8.4 3 этап. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше.

Множество точек оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$, представленных на рис.1, находится между оптимальными точками $X_1^*\ X_{13}^o\ X_3^*\ X_{34}^o\ X_4^*\ X_{42}^o X_2^*\ X_{21}^o\ X_1^*$ (на рисунках вместо $Y$ используется $X$). Проведем анализ множества точек Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_{13}^o\ X_{34}^o\ X_{42}^o\ X_{21}^o$ с точкой $X^o$, которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили четыре подмножеств точек $X \in \boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1,4}$. Первое подмножество $\boldsymbol{S_1^o} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ выделенное точками $X_1^*\ X_{13}^o\ X^o X_{12}^o\ X_1^*$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, то есть в поле первого критерия $\boldsymbol{S_1^o}$ имеет приоритет над остальными. Подобно $\boldsymbol{S_1^o}$ подмножества точек $\boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$ - характеризуется тем, что, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, обозначено: $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o}$. Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1\ x_3\}$ на рис. 5. Эти координаты показаны в трехмерном пространстве $\{x_1\ x_3\ \lambda\}$ на рис. 6, где третья ось λ - относительная оценка.

Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 6 он снижен до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком инженерной системы.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $\boldsymbol{S_1^o}, \boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 6 надписью в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

В данном разделе исследуется подмножество точек с приоритетом второго критерия $\boldsymbol{S_2^o}$.

***Шаг*** 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теоремы 1 известно, что в оптимальной точке $X^o$ всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in \boldsymbol{K}$ и $p \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство: $\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$, (150)

а для остальных выполняется неравенства: $\lambda^o \le \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K},\ q \ne p \ne k$.

В модели структуры материала (97)-(101) и соответствующей λ-задачи (110)-(115) такими критериями являются второй, третий и четвертый: $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda_4(X^o)$= 0.6087.

Из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$ =0.6087 противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 2 \in \boldsymbol{K}$.

Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in \boldsymbol{K}$.

***Выбор приоритетного критерия:***

На дисплей выдается общая информация для принятия решений:

Критерии в точке оптимума $X^o$: FXo =363.9686 1790.6811 194.2795 47.504. (151)

Относительные оценки в $X^o$: LXo =0.73718 0.60874 0.60874 0.60874. (152)

Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $\boldsymbol{K} = 4$, показанных на рис. 6*k2*. Выдается сообщение на дисплей:

q=input('Введите приоритетный критерий (номер) *q*= ') – Ввели критерий *q*=2.

***Шаг*** *3*. Формируются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 2 \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q = 2 \in \boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума $X^o$ (116) в точку $X_q^*$, полученную на первом шаге. Информационные данные о критерии *q*=2 выдаются на дисплей:

$$f_q(X^o) = 1790.6811 \le f_q(X) \le 1361.4174 = f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}. \quad (153)$$

Аналогично, в относительных единицах критерий *q=2* изменяется в следующих пределах:

$\lambda_q(X^o) = 0.6087 \le \lambda_q(X) \le 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 2 \in \boldsymbol{K}$.

Эти данные анализируется.

***Шаг*** 4. Определяется величина приоритетного критерия *q*∈***K***. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия *fq*=» - вводим, например, $f_q$=1500.

***Шаг*** 5. Для $f_q$=1500 *вычисляется относительная оценка*.

Для приоритетного критерия $f_q = 1500$ вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{1500 - 1361.4174}{1790.6811 - 1361.4174} = 0.8737,$$

которая при переходе от точки $X^o$ к точке $X_q^*$ лежит в пределах:

$$\lambda_{q=2}(X^o) = 0.6087 \le \lambda_q(X) = 0.8737 \le \lambda_q(X_q^*) = 1.0, q = 2 \in \boldsymbol{K}. \quad (154)$$

***Шаг*** 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (119) и соответственно относительной оценки $\lambda_q$ в (154), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, $\lambda_q$, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.8737 - 0.6087}{1 - 0.6087} = 0.6772, q = 2 \in \boldsymbol{K}. \quad (155)$$

***Шаг** 7*. Определяются координаты приоритета критериев с размерностью $f_q = 1500$.

Предполагаем линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}, q = 2$ определим координаты для точки с размерностью $f_q = 1500$ с относительной оценкой (120):

$$x_{\lambda=0.8737}^{q=2} = \{x_1 = X^o(1) + \rho(X_q^*(1) - X^o(1)),$$

$$x_2 = X^o(2) + \rho\left(X_q^*(2) - X^o(2)\right),$$

$$x_3 = X^o(3) + \rho\left(X_q^*(3) - X^o(3)\right),$$

$$x_4 = X^o(4) + \rho\left(X_q^*(4) - X^o(4)\right)\}, \quad (156)$$

где $X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}$,

$X_2^* = \{x_1 = 55.6075, x_2 = 34.1925, x_3 = 8.0, x_4 = 2.2\}$.

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$X^q = \{x_1 = 51.8286, x_2 = 39.1502, x_3 = 6.8212, x_4 = 2.2\}$. (157)

***Шаг** 8*. Формирование главных показателей точки $X^q$.

В полученной точке $X^q$, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1,K}\}$:

$$f(X^q) = \{f_1(X^q) = 381.3, f_2(X^q) = \mathbf{1465.7}, f_3(X^q) = 182.1, f_4(X^q) = 64.5\}; \quad (158)$$

все относительные оценки критериев: $\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K},\ \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$:

$$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.9267, \lambda_2(X^q) = 0.9049, \lambda_3(X^q) = 0.3121, \lambda_4(X^q) = 0.2126\}; \quad (159)$$

минимальная относительная оценка: $\min\lambda(X^q) = \min_{k\in K}(\lambda_k(X^q)) = 0.2126$.

$P^q = [p_1^2 = 0.9766, p_2^2 = 1.0, p_3^2 = 2.8995, p_4^2 = 4.2573]$;

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1,K}\}$:

$P^q * \lambda_k(X^q) = \{p_1^2 * \lambda_1(X^q) = 0.9049,\ p_2^2 * \lambda_2(X^q) = 0.9049,$
$p_3^2 * \lambda_3(X^q) = 0.9049,\ p_4^2 * \lambda_4(X^q) = 0.9049\}$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^2\lambda_1(X^q), p_2^2\lambda_2(X^q), p_3^2\lambda_3(X^q), p_4^2\lambda_4(X^q)) = 0.9049$$

Аналогично получены другие точки из области Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S^o}$.

*4.2.k2* ***Анализ результатов***. Сформированная величина $f_q(X_t^o) = 1465.7, q = 2 \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 1500$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |1465.7 - 1500| = 34.3$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.5\%$.

Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |1465.7 - 1500| = 34.3$, которая измерена в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.5\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. ***Конец***.

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений). В нашем примере окончательный вариант включает параметры:

$$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}; \quad (6.80)$$

параметры структуры материала при заданном приоритете критерия:

$q$=2: $X^q = \{x_1 = 51.8286, x_2 = 39.1502, x_3 = 6.8212, x_4 = 2.2\}$.

*4.3.k2.* ***Геометрическая интерпретация*** *результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров* ***по второму приоритетному критерию в относительных единицах.***

Для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров решения векторной задачи по второму приоритетному критерию в относительных единицах сформируем рис. 6.*k2*.

Аналогично рис. 6, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума $Y_k^*$ $\lambda_k(Y_k^*), k = \overline{1,K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = \overline{1,K}$ (красный цвет) и представим их рис. 6.*k2*.

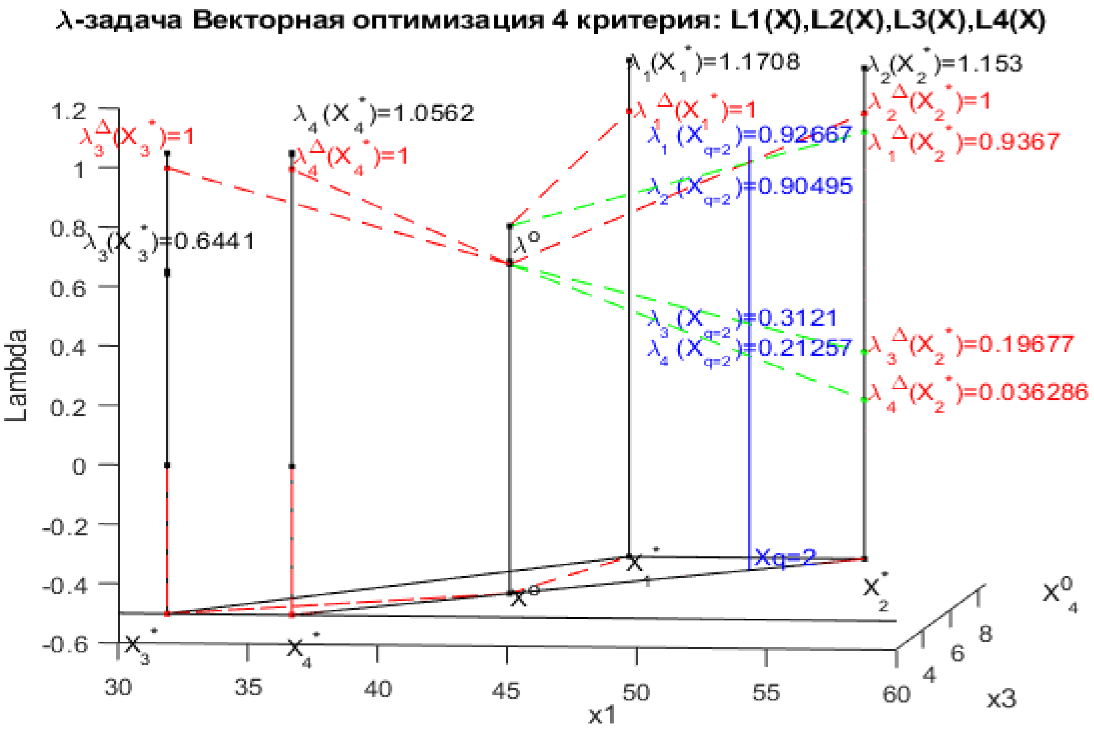


Рис. 6.*k2*. λ-задача в системе координат $x_1\ x_3\ (= y_1\ y_3)$ и λ. Результаты решения: $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = \overline{1,K}$; относительные оценки с приоритетом второго критерия в точке оптимума $X_{q=2}$: $\lambda_k(X_{q=2}), k = \overline{1,K}$.

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в (116) в точках оптимума $Y_1^*,\ Y_2^*,\ Y_3^*,\ Y_4^*$ получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*)=\left\|\begin{matrix}L(Y_1^*)\\L(Y_2^*)\\L(Y_3^*)\\L(Y_4^*)\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}1.0000 & 0.9245 & 0.3560 & 0.1197\\0.9367 & 1.0000 & 0.1968 & 0.0363\\0.0 & 0.0 & 1.0000 & 1.011\\0.3669 & 0.2257 & 0.9427 & 1.0000\end{matrix}\right\|.$$

На рис. 6.*k2* $\lambda_2(Y_2^*)=1.0000$ обозначена как $\lambda_2^\Delta(X_2^*)$=1.

Линейная функция, соединяющая точки $\lambda^o=0.6087$ и $\lambda_2^\Delta(X_2^*)$=1 в относительных единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1,\dots,x_4$. Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функций $f_2(X)$ в относительных единицах из *N*-мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат. Аналогично исследуются все функции (критерии). В целом на рис. 6.*k2* в точке $X_2^*$ показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций (критериев):

$f_1(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_1^\Delta(X_2^*)=0.9367$;

$f_2(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_2^\Delta(X_2^*)=1.0$;

$f_3(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_3^\Delta(X_2^*)=0.1968$;

$f_4(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_4^\Delta(X_2^*)=0.0363$.

Относительные оценки с приоритетом второго критерия в точке оптимума $X_{q=2}$ $\lambda_k(X_{q=2})=\frac{f_k(X_{q=2})-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, k=\overline{1,K}$ : $\lambda_k(X_{q=2})=\{\lambda_1(X_{q=2})=0.92667, \lambda_2(X_{q=2})=0.90495, \lambda_3(X_{q=2})=0.3121, \lambda_4(X_{q=2})=0.21257\}$;

Результаты решения показывают, что математические результаты полностью совпадают с геометрическими.

*4.4.k2.* ***Геометрическая интерпретация*** *результатов решения ВЗМП с приоритетом* ***второго критерия*** *– модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат* ***в физических единицах****.*

Исходной информацией для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи (ВЗМП) с приоритетом первого критерия являются:

параметры точки оптимума при равнозначных критериях:

$\boldsymbol{X^o}=\{X^o,\lambda^o\}=\{Y^o=\{x_1=43.9, x_2=49.54, x_3=4.348, x_4=2.2\}, \lambda^o=0.6087\}$, рассчитанной на пятом шаге алгоритма в двухмерной системе координат $x_1, x_2$ (см. Рис. 1) и представленной в трехмерной системе координат $x_1, x_2$ и $\lambda$ в относительных единицах на рис. 2, 3, 4 при проектировании.

Исследуем и представим параметры последовательно для каждой характеристики структуры материала (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в ***физических единицах***.

***1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – первой характеристики*** $f_1(X)$ *с приоритетом второго критерия при проектировании в физических единицах.*

На Рис. 7.*k2* исследованы: точки оптимума $X_2^*,\ X_{q=2}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_2(X_2^*)$ $\lambda_2(X_{q=2})$, а также линейные функции $\lambda^o-\lambda_2(X_{q=2})-\lambda_2^\Delta(X_2^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1,\dots,x_4$.

Первая характеристика структуры материала $h_1(X)$ (110) сформирована в 6.1.4:

$\max h_1(X) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2$.

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_1(Y)$ в физических единицах с переменными координатами $\{y_1\ y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$ на рис. 7.*k2*.

Координаты точки и функция первого критерия на **максимум:**

$Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9$ при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_1^{\Delta}(X_1^*) = -387.9$;

$Y_1^* = \{y_1 = 46.5676, y_3 = 8.0\}$ (на рис. 6*k1* обозначена как $X_1^*$).

В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна:

$h_1^* = f_1(X_1^*) = 403.6$. (Черный цвет).

Координаты точки и функция первого критерия на **минимум:**

В точке $X_1^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_1^0 = f_1(X_1^o) = 303.66$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_1^{\Delta}(X_1^o) = 296.59$.

Координаты точки и функция первого критерия **при равнозначных критериях:** Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_1(X^o) = 363.96$.

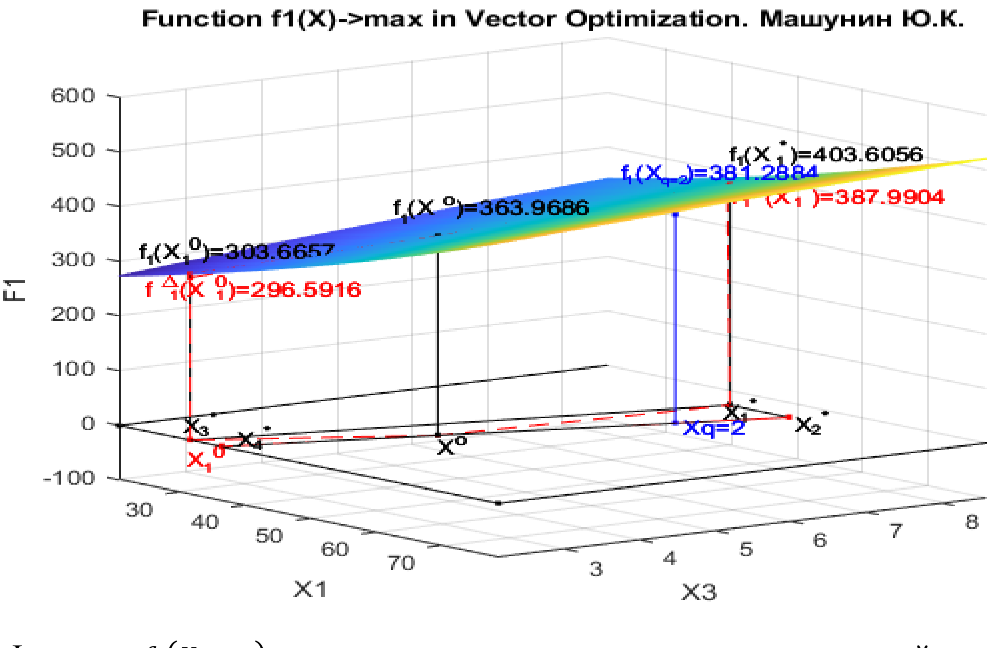


Рис. 7.*k2*. Функция $f_1(X_{1,q=2})$ с приоритетом ***второго*** критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{q=2})$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Относительная оценка с приоритетом второго критерия в точке оптимума $X_{1,q=2}$ : $\lambda_1(X_{q=2}) = \frac{f_1(X_{1,q=2}) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} = 0.92667$ . В физических единицах величина первого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=2}$ равна $f_1(X_{q=2}) = 381.28$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_1(X^o)$ и $f_1^{\Delta}(X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_1^{\Delta}(X_1^*)$ -$f_1(X^o)$- $f_1^{\Delta}(X_1^0)$ и $f_1\left(X_{q=2}\right)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$ на двухмерное параметров $x_1, x_3$.

***2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – второй характеристики*** $f_2(X)$ *с приоритетом второго критерия структуры материала при проектировании в физических единицах*.

На Рис. 8.*k2* исследованы: точки оптимума $X_2^*$, $X_{q=2}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_2(X_2^*)$ $\lambda_2(X_{2,q=2})$, а также линейные функции $\lambda^o \lambda_2\left(X_{q=2}\right) - \lambda_2^{\Delta}(X_2^*)$ $\lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_2(X_{q=2})$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Вторая характеристика структуры материала $h_2(X)$ (112) сформирована в 4.1.4:

$min\ f_2(X) \equiv 795.72\ +23.89\, x_1 +30.866\, x_2\ -25.8586\, x_3\ -45.0026\, x_4\ -0.7683\, x_1 x_2\ +0.4703\, x_1 x_3 +0.7472 x_1 x_4 -0.1283 x_2 x_3 +0.3266 x_2 x_4 -0.0112 x_3 x_4 +0.0398 x_1^2 +0.0365 x_2^2\ +3.2 x_3^2 +2.6457 x_4^2.$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $h_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ (130) на рис. 8.*k2*.

Координаты точки и функция второго критерия на **оптимум (минимум):**

$Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_2^* = h_2(X_2^*)\ = 1361.4$

при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_2^{\Delta}(X_2^*)\ = 1361.41$.

$Y_2^*\ = \{x_1 = 55.6, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 8.*k2* обозначена как $X_2^*$). В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_2^*$=$f_2(X_2^*) = 1193.56$. (Черный цвет).

Координаты точки **минимума** (Наихудшее решение – максимальное) в точке $X_2^0\ = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_2^0$=$f_2(X_2^o) = 2207.2$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_2^{\Delta}(X_2^o) = 2458.5$.

Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях:**

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_2(X^o) = 1790.68$.

Относительная оценка с приоритетом второго критерия в точке оптимума $X_{q=2}$ второго критерия: $\lambda_2\left(X_{q=2}\right) = \frac{f_2(X_{q=2}) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} = 0.90495$. В физических единицах величина второго критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=2}$ равна $f_2\left(X_{2,q=2}\right) = 1465.7036$. (Показана фиолетовым цветом).

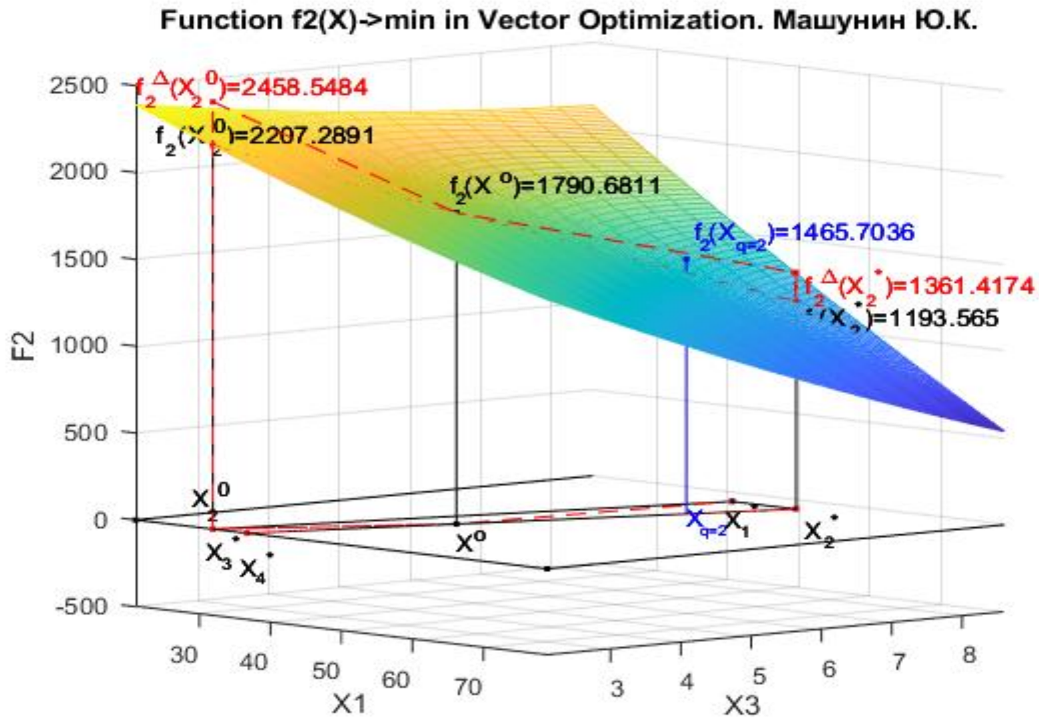


Рис.8.*k2*. Функция $f_2(X)$ с приоритетом второго критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_2(X)$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_2(X^o)$ и $f_2^\Delta(X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^\Delta(X_2^*)$ - $f_2(X^o)$ - $f_2^\Delta(X_2^0)$ и $f_2(X_{q=2})$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – третьей характеристики*** $f_3(X)$ *с приоритетом второго критерия - структуры материала при проектировании в физических единицах*.

На Рис. 9.*k2* исследованы: точки оптимума $X_3^*$, $X_{q=2}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_3(X_3^*)$ $\lambda_3(X_{q=2})$, а также линейные функции $\lambda^o \lambda_3(X_{q=2}) - \lambda_3^\Delta(X_3^*)$ $\lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Третья характеристика структуры материала $h_3(X)$ (111) сформирована в 4.1.4:

$max\ h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2\}$.

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ на рис. 9.*k2*.

Координаты точки и функция третьего критерия на **максимум:**

$Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.35$ при расчете по четырем переменным. На рис. 9.*k2* обозначена как $f_3^\Delta(X_3^*) = -210.35$

$Y_3^* = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 9.*k2* обозначена как $X_3^*$).

В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_3^* = f_3(X_3^*) = 195.73$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_3^* = 210.3$.

Координаты точки **минимума** $X_3^0 = \{x_1 = 78.16, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 9.*k2*. Величина целевой функции $f_3^0$=192.39, $f_3^\Delta(X_3^*) = 169.26$ (красный цвет).

Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях:**

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_3(X^o) = 194.2$.

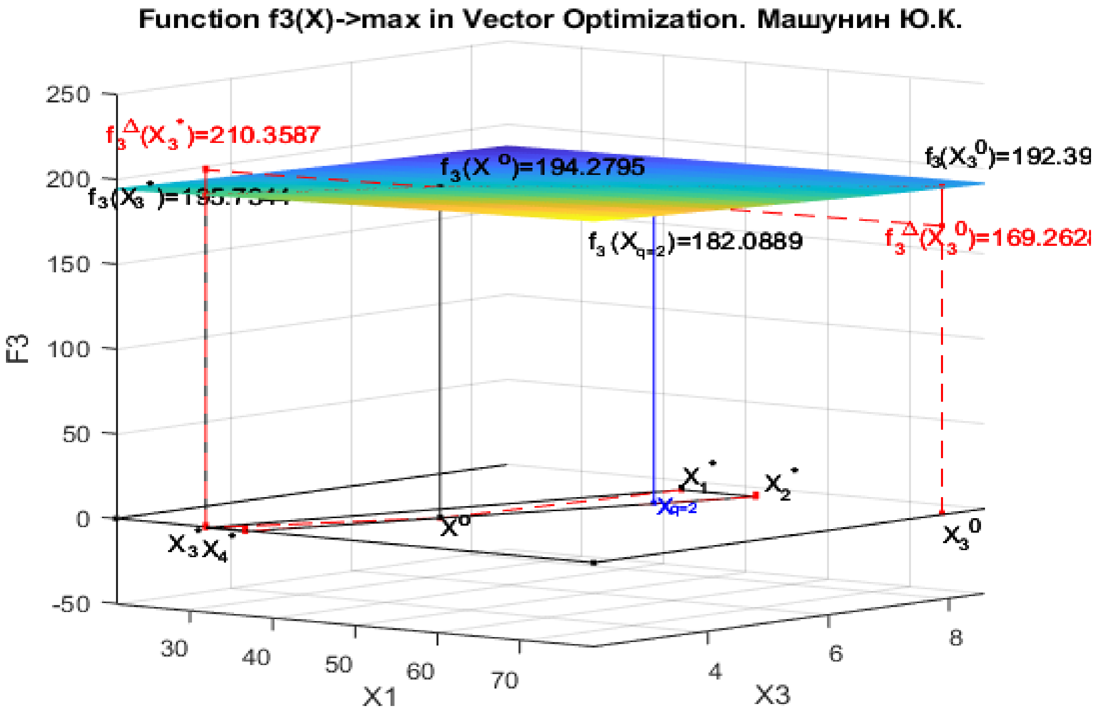


Рис. 9.*k2*. Функция $f_3(X_{q=2})$ с приоритетом второго критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_3(X_{q=2})$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ третьего критерия: $\lambda_3(X_{q=2}) = \frac{f_3(X_{q=2}) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} = 0.3121$. В физических единицах величина третьего критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=2}$ равна $f_3(X_{q=2}) = 182.08$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_3(X^o)$ и $f_3^\Delta(X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$.

А в целом отрезки $f_3^{\Delta}(X_1^*)$ -$f_3(X^o)$- $f_3^{\Delta}(X_3^0)$ и $f_3(X_{q=2})$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – четвертой характеристики*** $f_4(X)$ *с приоритетом второго критерия - структуры материала при проектировании в физических единицах.*

На Рис. 10.*k2* исследованы: точки оптимума $X_4^*$ , $X_{q=2}$ , с соответствующими относительными оценками $\lambda_4(X_4^*)$ $\lambda_4(X_{q=2})$, а также линейные функции $\lambda^o\lambda_4(X_{q=2}) - \lambda_4^{\Delta}(X_4^*)$ $\lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Четвертая характеристика структуры материала $h_4(X)$ (113) сформирована в 4.1.4:

$max\ h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}\}$.

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_4(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ на рис. 10.*k2*.

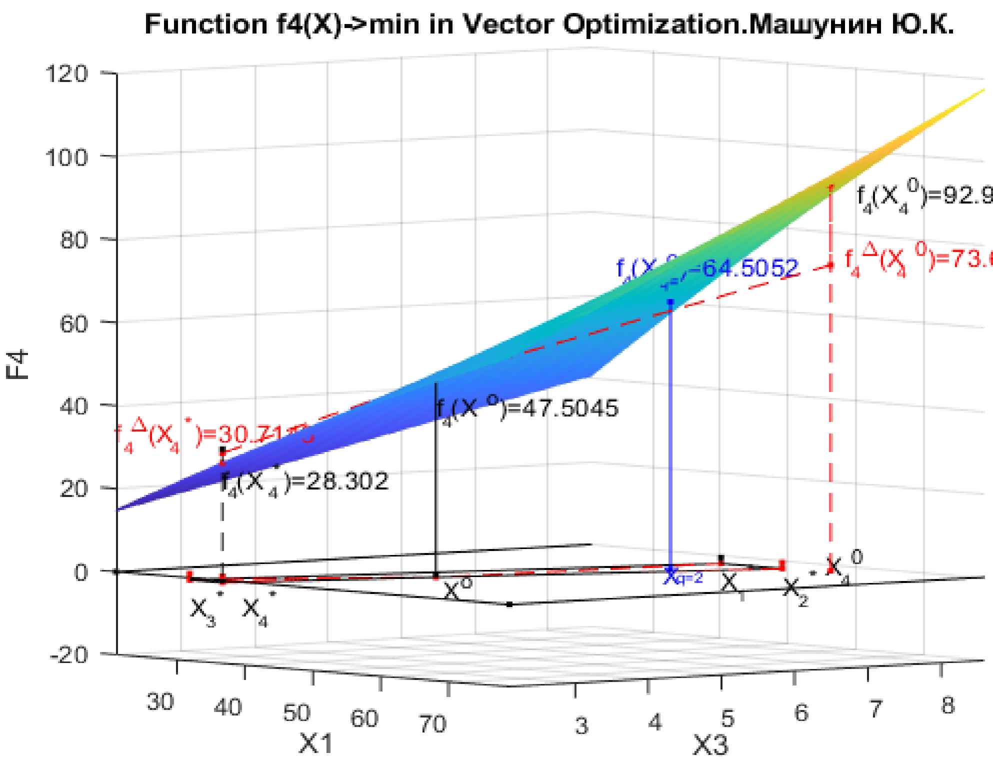


Рис. 10.*k2*. Функция $f_4(X_{q=2})$ с приоритетом ***второго критерия*** в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_4(X_{q=2})$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Координаты точки и функция четвертого критерия на **максимум:**

$Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$, $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$ при расчете по четырем переменным. На рис. 10.*k2* обозначена как $f_4^\Delta(X_4^*) = 30.714$

$X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 10.*k2* обозначена как $X_4^*$).

В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_4^* = f_4(X_4^*) = 28.302$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_4^* = 30.714$.

Координаты точки и функция четвертого критерия **минимума**

$X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 8\}$. Величина целевой функции $f_4^0(X_4^0) = 92.98$, $f_4^\Delta(X_4^*)$=73.62.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 10.*k2* обозначена как $X^o$). Величина целевой функции $f_4(X^o) = 47.504$.

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ четвертого критерия: $\lambda_4(X_{q=2}) = \frac{f_4(X_{q=2}) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} = 0.21257$. В физических единицах величина четвертого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=2}$ равна $f_4(X_{q=2}) = 64.505$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_4(X^o)$ и $f_4^\Delta(X_4^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_4^\Delta(X_4^*)$ -$f_4(X^o)$- $f_4^\Delta(X_4^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***Заключение по разделу: критерий** k2**.*

В разделе рассмотрена и решена проблема (фрагмент) разработки и принятия управленческого решения условиях неопределенности в сложной инженерной системы (структуры материала). Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете второго критерия, представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев), во-первых, в относительных единицах, во-вторых, в физических единицах.

**8.5.** ***Блок 4.k3. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала - функций: $f_1(X), \dots, f_4(X)$) с приоритетом третьего критерия, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.***

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном ***приоритете третьего критерия*** на базе многомерной математики.

Проведен анализ результатов решения ВЗМП - *функций:* $f_1(X), \dots, f_4(X)$ при заданном приоритете третьего критерия и представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат ***в относительных единицах***.

Представлена геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом третьего критерия при проектировании в трехмерной системе координат ***в физических единицах.***

*4.1.k3. Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном приоритете третьего критерия в многомерной математике. (решение обратной задачи).*

Лицом, принимающим решения, как правило, является конструктор системы.

***Шаг*** 1. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Алгоритм решения векторной задачи представлен на блок 2 – 5. Численные результаты решения векторной задачи представлены в разделе *8.4.*

Множество точек оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$, представленных на рис.3, находится между оптимальными точками $X_1^*\ X_{13}^o\ X_3^*\ X_{34}^o\ X_4^*\ X_{42}^o X_2^*\ X_{21}^o\ X_1^*$ (на рисунках вместо $Y$ используется $X$). Проведем анализ множества точек Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_{13}^o\ X_{34}^o\ X_{42}^o\ X_{21}^o$ с точкой $X^o$, которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили четыре подмножеств точек $X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1{,}4}$. Первое подмножество $\boldsymbol{S_1^o} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ выделенное точками $X_1^*\ X_{13}^o\ X^o X_{12}^o\ X_1^*$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, то есть в поле первого критерия $\boldsymbol{S_1^o}$ имеет приоритет над остальными. Подобно $\boldsymbol{S_{21}^o}$ подмножества точек $\boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$ - характеризуется тем, что, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно.

Множество точек, оптимальных по Парето, будем обозначать $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o}$. Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1\ x_2\}$ на рис. 5. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1\ x_2\ \lambda\}$ на рис. 6, где третья ось λ - относительная оценка.

Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 2 он снижен до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком инженерной системы.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $\boldsymbol{S_1^o}, \boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 6 надписью в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

В данном разделе исследуется подмножество точек с приоритетом третьего критерия $\boldsymbol{S_3^o}$.

***Шаг*** 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории известно, что в оптимальной точке $X^o$ всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in \boldsymbol{K}$ и $p \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}, \tag{160}$$

а для остальных выполняется неравенства: $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K},\ q \neq p \neq k$.

В модели материала (97)-(111) и соответствующей λ-задачи (110)-(115) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda_4(X^o)$= 0.6087.

Как правило, из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$ = 0.6087 противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in \boldsymbol{K}$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $\boldsymbol{K} = 4$, показанных на рис. 6.

Дальнейшие шаги расчета представим на примере третьей функции (критерия).

***Выбор приоритетного критерия:***

На дисплей выдается общая информация для принятия решений:

Критерии в точке оптимума $X^o$: FXo =363.968 1790.681 194.2795 47.5045. (161)

Относительные оценки в $X^o$: LXo =0.73718 0.60874 0.60874 0.60874. (162)

Антиоптимум: $Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6$.

ВЫВОД: Критерии 2, 3, 4 наиболее противоречивы, из них выбираем приоритетный. В данном разделе исследуется третий критерий (функция) $q = 3 \in \boldsymbol{K}$.

На дисплей выдается сообщение:

q=input('Введите приоритетный критерий (номер) *q*= ') – *Ввели критерий* **q=3**.

***Шаг*** *3*. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума $X^o$ в точку $X_q^*$, полученную на первом шаге. Данные о критерии *q*=3 выдаются на экран:

$$f_q(X^o) = 194.27 \leq f_q(X) \leq 210.35 = f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}. \quad (163)$$

В относительных единицах критерий *q=3* изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.6087 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q\left(X_q^*\right), q = 3 \in \boldsymbol{K}.$$

Эти данные анализируется.

***Шаг*** 4. Выбор величины приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия *fq*=» - вводим, например, $f_q$=200.

***Шаг*** 5. *Вычисляется относительная оценка*.

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 200$ вычисляется относительная оценка: $\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{200-194.27}{210.35-194.27} = 0.7479$,

которая при переходе от точки $X^o$ к точке $X_q^*$ лежит в пределах:

$$0.6087 = \lambda_3(X^o) \leq \lambda_3 = 0.7489 \leq \lambda_3(X_3^*) = 1, q \in \boldsymbol{K}, \quad (164)$$

***Шаг*** 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (119) и соответственно относительной оценки $\lambda_q$ в (120), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, $\lambda_q$, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.7489-0.6087}{1-0.6087} = 0.3558, q = 3 \in \boldsymbol{K}. \quad (165)$$

***Шаг*** *7*. Вычислим координаты точки приоритета критериев с размерностью $f_q$.

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}, q = 3$ определим координаты для точки с $f_q = 200$ с относительной оценкой (164):

$$x_{\lambda=0.74}^{q=3} = \{x_1 = X^o(1) + \rho(X_q^*(1) - X^o(1)),$$

$$x_2 = X^o(2) + \rho\left(X_q^*(2) - X^o(2)\right),$$

$$x_3 = X^o(3) + \rho\left(X_q^*(3) - X^o(3)\right),$$

$$x_4 = X^o(4) + \rho\left(X_q^*(4) - X^o(4)\right)\}, \tag{166}$$

где $X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}$,

$X_3^* = \{x_1 = 31.9, x_2 = 59.00, x_3 = 2.1, x_4 = 7.0\}$.

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$$X^q = \{x_1 = 39.63, x_2 = 52.91, x_3 = 3.54, x_4 = 3.907\}. \tag{167}$$

***Шаг** 8*. Вычисление главных показателей точки $X^q$.

Для полученной точки $X^q$, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1,K}\}$,

$$f(X^q) = \{f_1(X^q) = 344.3, f_2(X^q) = 2000, f_3(X^q) = 199, f_4(X^q) = 41.7\}; \tag{168}$$

все относительные оценки критериев:

$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\},\ \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$:

$$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.5224, \lambda_2(X^q) = 0.418, \lambda_3(X^q) = 0.7244, \lambda_4(X^q) = 0.7446\}; \tag{169}$$

минимальная относительная оценка: $\min\lambda(X^q) = \min\limits_{k\in K}(\lambda_k(X^q)) = 0.418$.

$P^q = [p_1^3 = 1.3868, p_2^3 = 1.7333, p_3^3 = 1.0, p_4^3 = 0.973]$;

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1,K}\}$:

$\lambda_k(X^q) * P^q = \{p_1^3 * \lambda_1(X^q) = 0.7244,\ p_2^3 * \lambda_2(X^q) = 0.7244,$
$p_3^3 * \lambda_3(X^q) = 0.7244,\ p_4^3 * \lambda_4(X^q) = 0.7244\}$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^3\lambda_1(X^q), p_2^3\lambda_2(X^q), p_3^3\lambda_3(X^q), p_4^3\lambda_4(X^q)) = 0.7244$$

Аналогично другие точки из области Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S^o}$ могут быть получены.

*4.2.k3. Анализ результатов решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете третьего критерия*.

Рассчитанная в (6.88) величина третьего критерия при заданном приоритете $f_q(X_t^o) = 199, q = 3 \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 200$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |199 - 200| = 1.0$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.5\%$. Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |199 - 200| = 1.0$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.5\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \le \Delta f$, то вычисления завершаются. ***Конец***.

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений). В нашем примере окончательный вариант включает параметры:

$$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}; \tag{6.90}$$

параметры структуры материала при заданном приоритете критерия:

*q*=3: $X^q = \{x_1 = 39.63, x_2 = 52.91, x_3 = 3.54, x_4 = 3.907\}$.

*4.3.k3.* ***Геометрическая интерпретация*** *результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по третьему приоритетному критерию* ***в относительных единицах.***

Для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров решения векторной задачи по третьему приоритетному критерию в относительных единицах сформируем рис. 6.*k3*.

Аналогично рис. 6, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума $Y_k^*$ $\lambda_k(Y_k^*), k = \overline{1,K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^{\Delta}(X_k^*) = 1, k = \overline{1,K}$ (красный цвет) и представим их рис. 6.*k3*.

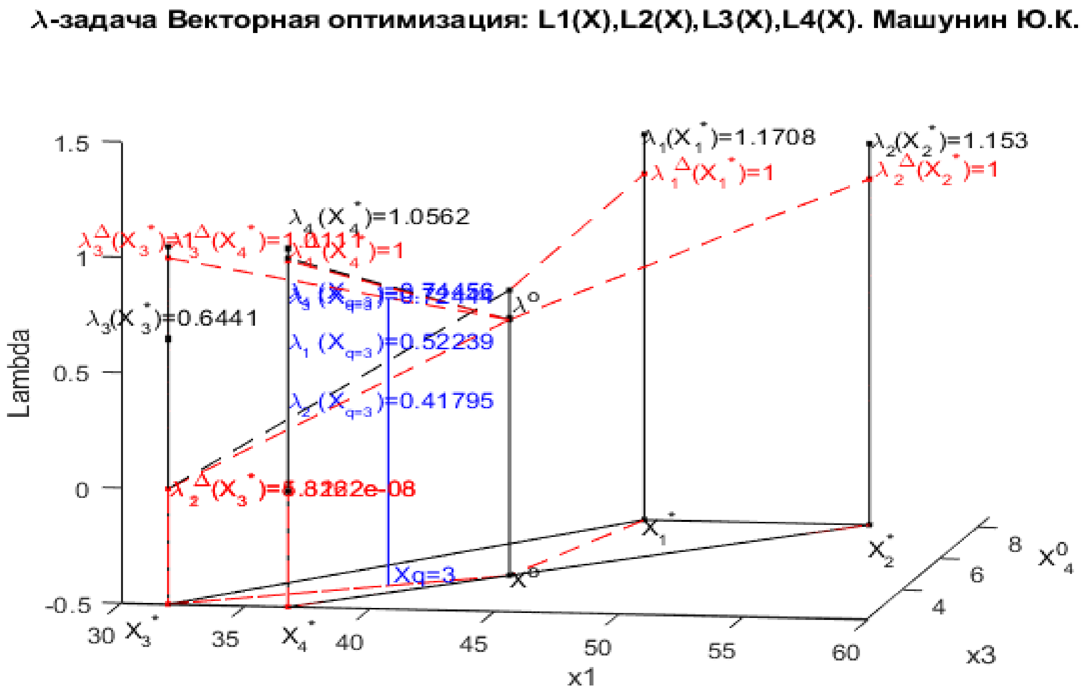


Рис. 6.*k3*. λ-задача в системе координат $x_1\ x_3\ (= y_1\ y_3)$ и λ. Результаты решения: $\lambda_k^{\Delta}(X_k^*) = 1, k = \overline{1,K}$; относительные оценки с приоритетом третьего критерия в точке оптимума $X_{q=3}$: $\lambda_k(X_{q=3}), k = \overline{1,K}$.

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в (116) в точках оптимума $Y_1^*$, $Y_2^*$, $Y_3^*$, $Y_4^*$ получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*) = \left\| \begin{matrix} L(Y_1^*) \\ L(Y_2^*) \\ L(Y_3^*) \\ L(Y_4^*) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1.0000 & 0.9245 & 0.3560 & 0.1197 \\ 0.9367 & 1.0000 & 0.1968 & 0.0363 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0000 & 1.011 \\ 0.3669 & 0.2257 & 0.9427 & 1.0000 \end{matrix} \right\|.$$

Линейная функция, соединяющая точки $\lambda^o = 0.60874$ и $\lambda_3^{\Delta}(X_3^*)=1$ в относительных единицах характеризует функцию $f_3(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. Эта линейная функция представляет геометрическую интерпретации функции $f_3(X)$ в относительных единицах из $N$-мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат. Аналогично исследуются все функции (критерии).

В целом на рис. 6.*k3* в точке $X_3^*$ показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций (критериев):

$f_1(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_1^\Delta(X_3^*) = 0.8221E - 08$;

$f_2(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_2^\Delta(X_3^*) = 0.8162\mathrm{E} - 08$;

$f_3(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_3^\Delta(X_3^*) = 1.0$;

$f_4(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_4^\Delta(X_3^*) = 0.1011$.

Относительные оценки с приоритетом третьего критерия в точке оптимума $X_{q=3}$ $\lambda_k(X_{q=3}) = \frac{f_k(X_{q=3})-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, k = \overline{1,K}$ : $\lambda_k(X_{q=3}) = \{\lambda_1(X_{q=3}) = 0.52235, \lambda_2(X_{q=3}) = 0.41795, \lambda_3(X_{q=3}) = 0.72444, \lambda_4(X_{q=3}) = 0.74456\}$;

Результаты решения показывают, что математические результаты полностью совпадают с геометрическими.

*4.4.4.k3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – модели структуры материала при проектировании с приоритетом третьего критерия в трехмерной системе координат* ***в физических единицах***.

Исходной информацией для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи (ВЗМП) с приоритетом третьего критерия являются:

параметры точки оптимума при равнозначных критериях:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}$,

рассчитанной на пятом шаге алгоритма в двухмерной системе координат $x_1, x_2$ (см. Рис. 6) и представленной в трехмерной системе координат $x_1, x_2$ и $\lambda$ в относительных единицах на рис. 4, 5, 6 при проектировании.

Исследуем и представим параметры последовательно для каждой характеристики структуры материала (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в ***физических единицах***.

***1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – первой характеристики*** $f_1(X)$ *с приоритетом третьего критерия при проектировании в физических единицах*.

На Рис. 7.*k3* исследованы: точки оптимума $X_3^*$, $X_{q=3}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_1(X_3^*)$ $\lambda_1(X_{q=3})$, а также линейные функции $\lambda^o \lambda_1(X_{q=3}) - \lambda_1^\Delta(X_3^*)$ $\lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Первая характеристика структуры материала $h_1(X)$ (110) сформирована в 4.1.4: $\max h_1(X) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2$,

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_1(Y)$ в физических единицах с переменными координатами $\{y_1\ y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = 49.54, y_4 = 2.2\}$ на рис. 7.*k3*.

Координаты точки и функция первого критерия на **максимум:**

$Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9$ при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_1^\Delta(X_1^*) = -387.9$;

$Y_1^* = \{y_1 = 46.5676, y_3 = 8.0\}$ (на рис. $7k1$ обозначена как $X_3^*$). В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции $h_1^*$=$f_1(X_1^*) = 403.6$. (Черный цвет).

Координаты точки и функция первого критерия на **минимум:**

В точке $X_1^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_1^0$=$f_1(X_1^o) = 303.66$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_1^{\Delta}(X_1^o) = 296.59$.

Координаты точки и функция первого критерия **при равнозначных критериях:**

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$, целевая функция $f_1(X^o) = 363.96$.

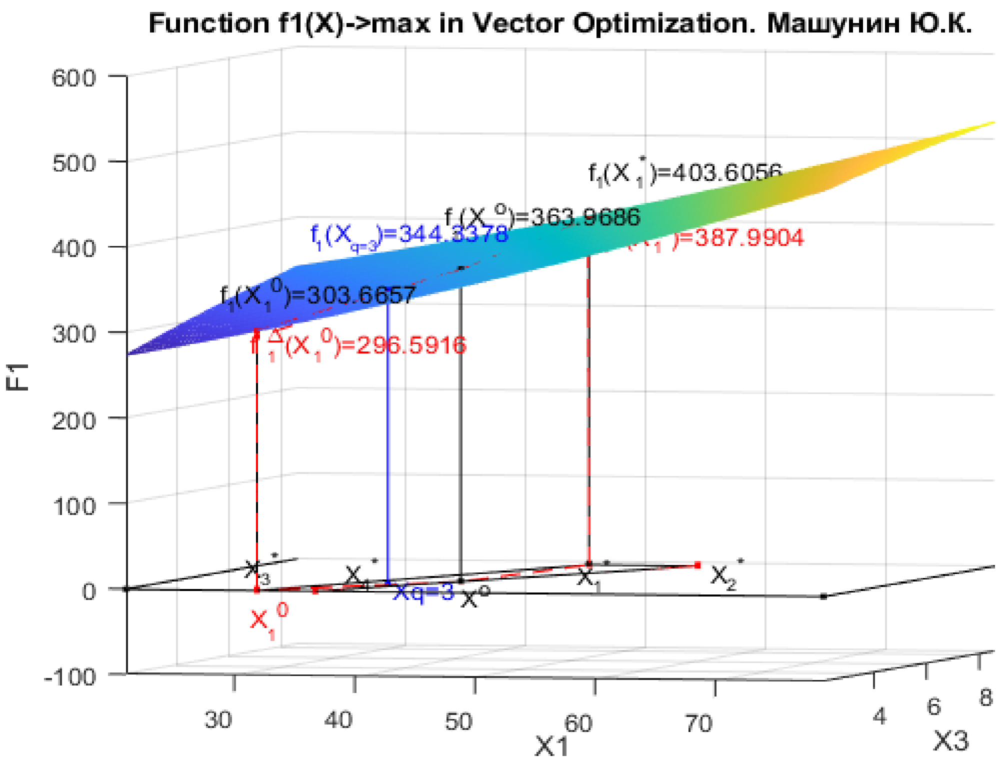


Рис. 7.$k3$. Функция $f_1(X_{q=3})$ с приоритетом третьего критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{q=3})$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Относительная оценка с приоритетом третьего критерия в точке оптимума $X_{q=3}$:

$\lambda_1(X_{q=3}) = \frac{f_1(X_{q=3}) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} = 0.72444$. В физических единицах величина третьего критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=3}$ равна $f_1(X_{q=3}) = 344.83$ (Фиолетовый цвет).

Линейная функция, соединяющая точки $f_1(X^o)$ и $f_1^{\Delta}(X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$.

А в целом отрезки $f_1^{\Delta}(X_1^*)$ -$f_1(X^o)$- $f_1^{\Delta}(X_1^0)$ и $f_1(X_{q=3})$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$.

***2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – второй характеристики*** $f_2(X)$ *с приоритетом третьего критерия структуры материала при проектировании в физических единицах*.

На Рис. 8.*k3* исследованы: точки оптимума $X_2^*$, $X_{q=3}$, и относительными оценками $\lambda_2(X_2^*)$ $\lambda_2(X_{q=3})$; функции $\lambda^o \lambda_2(X_{q=3}) - \lambda_2^\Delta(X_2^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Вторая характеристика структуры материала $h_2(X)$ (6.32) сформирована в 4.1.4:

$min\ f_2(X)$≡ 795.72 +23.89 $x_1$ +30.866 $x_2$ -25.8586 $x_3$ -45.0026 $x_4$ -0.7683 $x_1 x_2$ +0.4703 $x_1 x_3$ +0.7472$x_1 x_4$-0.1283$x_2 x_3$+0.3266$x_2 x_4$-0.0112$x_3 x_4$+0.0398$x_1^2$+0.0365$x_2^2$ +3.2$x_3^2$+2.6457$x_4^2$.

Представим геометрическую интерпретацию функцию $h_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ на рис. 8.*k3*.

Координаты точки и функция второго критерия на **оптимум** (**минимум):**

$Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_2^* = h_2(X_2^*) = 1361.4$

при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_2^\Delta(X_2^*) = 1361.41$.

$Y_2^* = \{x_1 = 55.6, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 8.*k3* обозначена как $X_2^*$). В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_2^*$=$f_2(X_2^*) = 1193.56$. (Черный цвет).

Координаты точки **минимума** (Наихудшее решение – максимальное) в точке

$X_2^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_2^0$=$f_2(X_2^o) = 2207.2$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_2^\Delta(X_2^o) = 2458.5$.

Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях:**

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.34\}$. Величина целевой функции $f_2(X^o) =$ 1790.6.

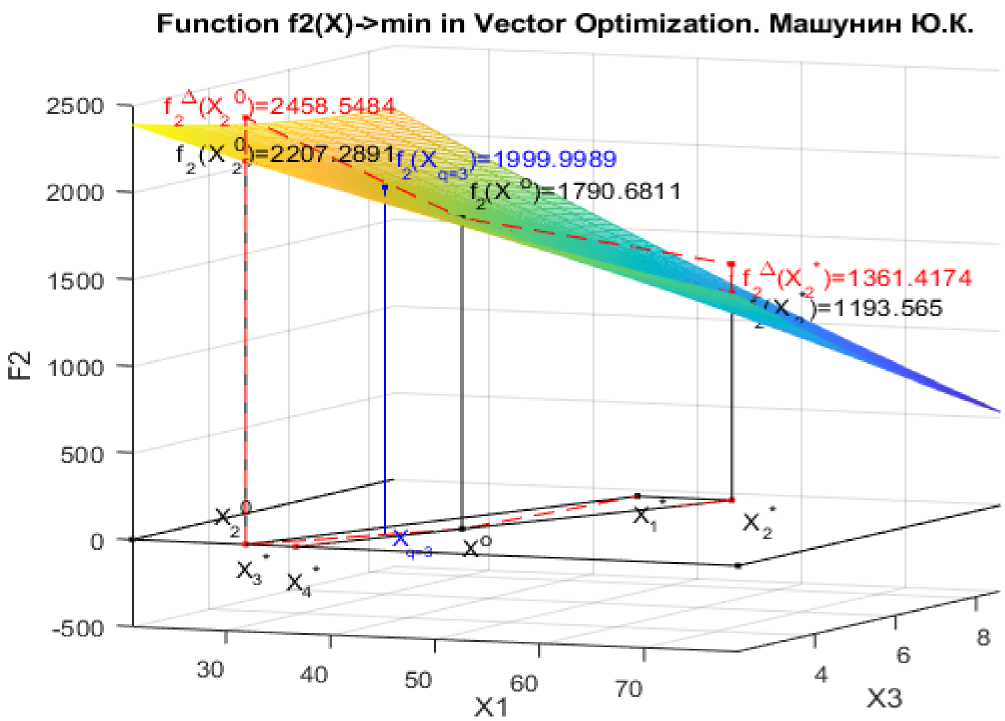


Рис. 8.*k3*. Функция $f_2(X_{q=3})$ с приоритетом третьего критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_2(X_{q=3})$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Относительная оценка с приоритетом третьего критерия в точке оптимума $X_{q=3}$ второго критерия: $\lambda_2(X_{q=3}) = \frac{f_2(X_{q=3})-f_2^0}{f_2^*-f_2^0} = 0.41795$. В физических единицах величина второго критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=3}$ равна $f_2(X_{q=3}) = 1999.99$. (Фиолетовый цвет).

Линейная функция, соединяющая точки $f_2(X^o)$ и $f_2^{\Delta}(X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^{\Delta}(X_2^*)$ -$f_2(X^o)$- $f_2^{\Delta}(X_2^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$.

***3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – третьей характеристики*** $f_3(X)$ *с приоритетом третьего критерия структуры материала при проектировании в физических единицах.*

На Рис. 9.*k3* исследованы: точки оптимума $X_3^*$, $X_{q=3}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_3(X_3^*)$ $\lambda_3(X_{q=3})$, а также линейные функции $\lambda^o\lambda_3(X_{q=3}) - \lambda_3^{\Delta}(X_3^*)\ \lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$. Третья характеристика структуры материала $h_3(X)$ (6.31) сформирована в 6.1.4:

$max\ h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2\}$.

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = 49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ на рис. 9.*k3*.

Координаты точки и функция третьего критерия на **максимум:**

$Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.35$

при расчете по четырем переменным. На рис. 9.*k3* обозначена как $f_3^{\Delta}(X_3^*) = -210.35$

$Y_3^* = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 9.*k3* обозначена как $X_3^*$). В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_3^*$=$f_3(X_3^*) = 195.73$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_3^*$= 210.3.

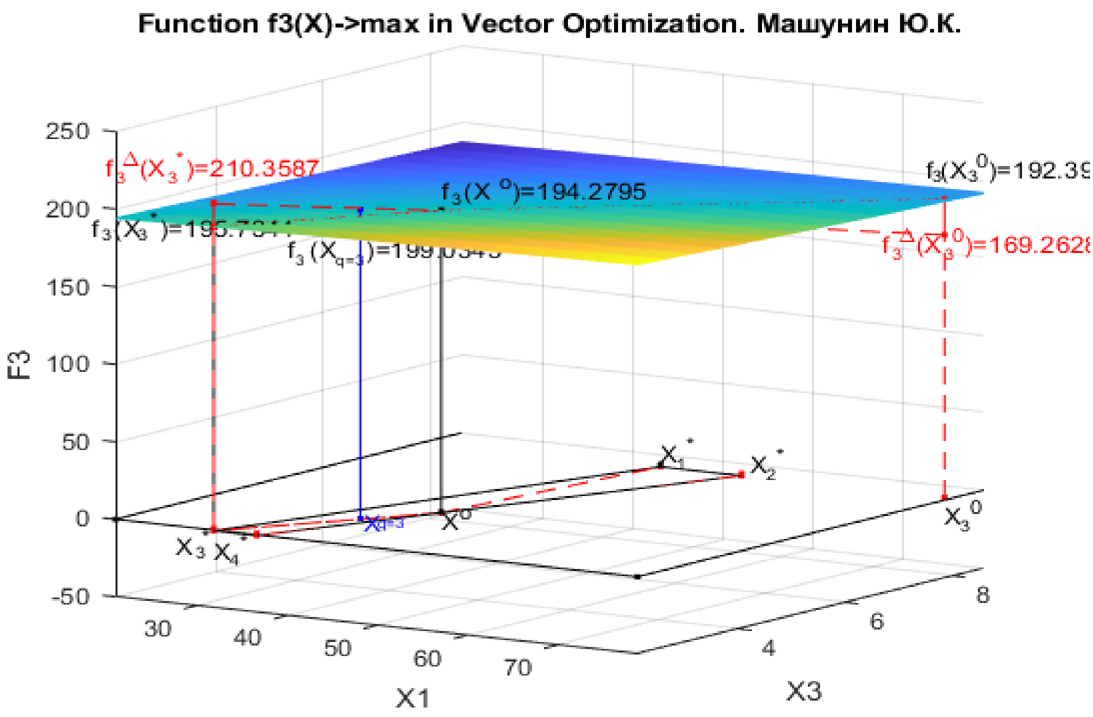


Рис. 9.*k3*. Функция $f_3(X_{q=3})$ с приоритетом третьего критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_3(X_{q=3})$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Координаты точки **минимума** $X_3^0 = \{x_1 = 78.16, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 8.*k3*. Величина целевой функции $f_3^0$=192.39, $f_3^{\Delta}(X_3^*) = 169.26$ (красный цвет).

Координаты точки и функция третьего критерия **при равнозначных критериях:**

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_3(X^o) = 194.27$.

Относительная оценка с приоритетом третьего критерия в точке оптимума $X_{q=3}$ третьего критерия: $\lambda_3(X_{q=3}) = \frac{f_3(X_{q=3}) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} = 0.72444$. В физических единицах величина третьего критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=3}$ равна $f_3(X_{q=3}) = 199.08$ – близка к исследуемой величине $f_3(X) = 200$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_3(X^o)$ и $f_3^{\Delta}(X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_3^{\Delta}(X_1^*)$ -$f_3(X^o)$- $f_3^{\Delta}(X_3^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – четвертой характеристики*** *$f_4(X_{q=3})$ с приоритетом третьего критерия структуры материала при проектировании в физических единицах.*

На Рис. 10.*k3* исследованы: точки оптимума $X_4^*$, $X_{q=3}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_4(X_4^*)$ $\lambda_4(X_{q=3})$, а также линейные функции $\lambda^o \lambda_4(X_{q=3}) - \lambda_4^{\Delta}(X_4^*)$ $\lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Четвертая характеристика структуры материала $h_4(X)$ (113) сформирована в 4.1.4:

$max\, h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}\}$.

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_4(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ на рис. 10.*k3*.

Координаты точки и функция четвертого критерия на **максимум:**

$Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$, $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$ при расчете по четырем переменным. На рис. 9.*k3* обозначена как $f_4^{\Delta}(X_4^*) = 30.714$

$X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 10.*k3* обозначена как $X_4^*$). В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_4^*$=$f_4(X_4^*) = 28.302$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_4^*$= $30.714$.

Координаты точки и функция четвертого критерия **минимума:** $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 8\}$. Величина целевой функции $f_4^0 = f_4^{\Delta}(X_4^*)$=$-73.62$.

Координаты точки и функция четвертого критерия **с равнозначными критериями:** $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (рис. 10.*k3* обозначено как $X^o$). Величина целевой функции $f_4(X^o)$ =47.5.

Относительная оценка с приоритетом третьего критерия в точке оптимума $X_{q=3}$ четвертого критерия: $\lambda_4(X_{q=3}) = \frac{f_4(X_{q=3}) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} = 0.74456$. В физических единицах величина четвертого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=3}$ равна $f_4(X_{q=3}) = 41.87$. (Показана фиолетовым цветом).

Координаты точки **максимума** $X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 11 обозначена как X4omax). Величина целевой функции $F_4^*$=FX4omax = $30.714$.

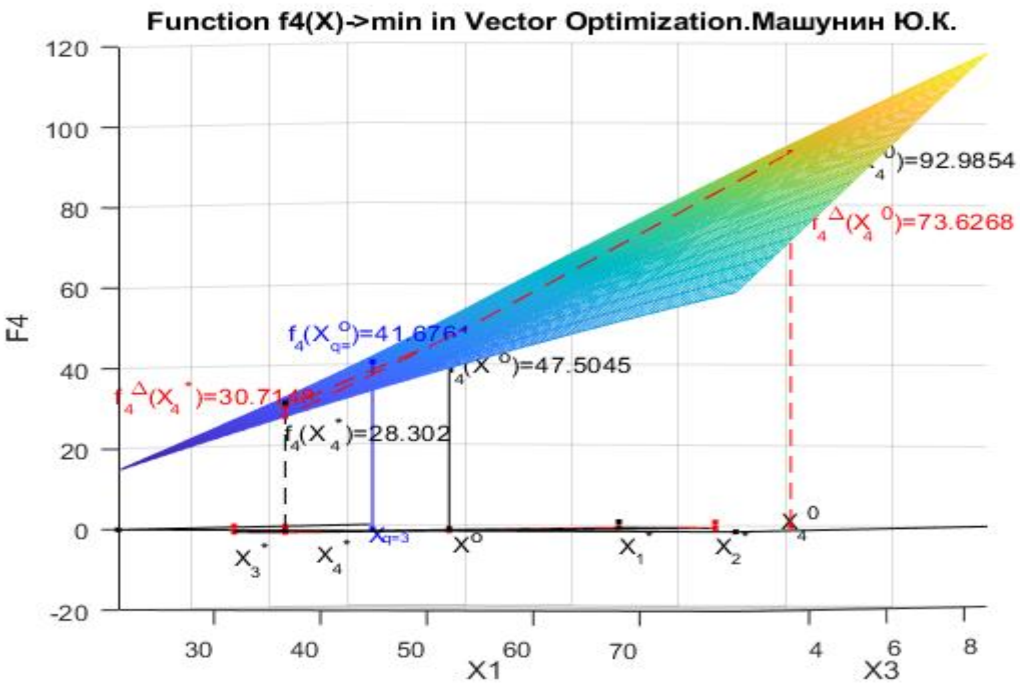


Рис. 10.*k3*. Функция $f_4(X_{q=3})$ с приоритетом третьего критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_4(X_{q=3})$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

***Заключение по разделу: критерий** k3.*

В разделе рассмотрена и решена проблема (фрагмент) разработки и принятия управленческого решения условиях неопределенности в сложной инженерной системы (структуры материала). Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете третьего критерия, представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев), как в относительных единицах, так и в физических единицах.

**4.4.** ***Блок 4.k4. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала - функций: $f_1(X), \ldots, f_4(X)$) по четвертому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.***

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном ***приоритете четвертого критерия*** на базе многомерной математики.

Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете четвертого критерия и представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат ***в относительных единицах***.

Представлена геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом четвертого критерия при проектировании в трехмерной системе координат ***в физических единицах.***

*4.1.k4. Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном приоритете четвертого критерия в многомерной математике. (решение обратной задачи).*

Лицом, принимающим решения, как правило, является конструктор системы.

***Шаг*** 1. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Алгоритм решения векторной задачи представлен на блок 2 – 5, 6 этап. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше.

Множество точек оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$, представленных на рис.1, находится между оптимальными точками $X_1^* \, X_{13}^o \, X_3^* \, X_{34}^o \, X_4^* \, X_{42}^o X_2^* \, X_{21}^o \, X_1^*$ (на рисунках вместо $Y$ используется $X$). Мы проведем анализ множества точек Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_{13}^o \, X_{34}^o \, X_{42}^o \, X_{21}^o$ с точкой $X^o$, которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили четыре подмножеств точек $X \in \boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1,4}$. Первое подмножество $\boldsymbol{S_1^o} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ выделенное точками $X_1^* \, X_{13}^o \, X^o X_{12}^o \, X_1^*$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, то есть в поле первого критерия $\boldsymbol{S_1^o}$ имеет приоритет над остальными. Подобно $\boldsymbol{S_{21}^o}$ подмножества точек $\boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$ - характеризуется тем, что, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, будем обозначать $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o}$. Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1 \; x_3\}$ на рис. 3. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1 \; x_2 \; \lambda\}$ на рис. 4, где третья ось λ-относительная оценка.

Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 4 он снижен до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком инженерной системы.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $\boldsymbol{S_1^o}, \boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 6 надписью в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

***Шаг*** 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории известно, что в оптимальной точке $X^o$ всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in \boldsymbol{K}$ и $p \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}, \tag{170}$$

а для остальных выполняется неравенства: $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, \; q \neq p \neq k$.

В модели материала (97)-(101) и соответствующей λ-задачи (110)-(115) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$= 0.6087, т.е. выполняется числовая симметрия.

Как правило, из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda_4(X^o) =$ 0.6087 противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 4 \in \boldsymbol{K}$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с четвертым критерием $q = 4 \in \boldsymbol{K}$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $\boldsymbol{K} = 4$, показанных на рис. 6.

Дальнейшие шаги расчета представим на примере четвертой функции (критерия).

***Выбор приоритетного критерия:*** На дисплей выдается общая информация для принятия решений: Критерии в точке оптимума $X^o$:

FXo ={363.968 1790.681 194.2795 47.5045}, (171)

Относительные оценки в $X^o$: LXo =0.73718 0.60874 0.60874 0.60874 (172)

Решение на max $(f_4(X) - \min)$ $f_4(X) = 30.7$. Наихудшее решение: $f_4(X) = 73.6$.

Критерий_f4max=30.7148. Точка_x4max= {36.7 59 2.1 2.2}.

Антиоптимум: $Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6$.

ВЫВОД: Критерии 1, 2, 3 наиболее противоречивы, из них выбираем приоритетный. В данном разделе исследуется четвертый критерий (функция) $q = 4 \in \boldsymbol{K}$.

На дисплей выдается сообщение:

q=input('Введите приоритетный критерий (номер) *q*= ') – *Ввели критерий* **q=4**.

***Шаг*** *3*. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 4 \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q = 4 \in \boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума $X^o$ (6.49) в точку $X_q^*$, полученную на первом шаге. Данные о критерии *q*=4 выдаются на экран:

$$f_q(X^o) = 47.5045 \leq f_q(X) \leq 30.7148.35 = f_q(X_q^*), q = 4 \in \boldsymbol{K}. \quad (173)$$

В относительных единицах критерий *q=4* изменяется в следующих пределах:

$\lambda_q(X^o) = 0.6087 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 4 \in \boldsymbol{K}$. Эти данные анализируется.

***Шаг*** 4. Выбор величины приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия *fq*=» - вводим, например, $f_q$=40.

***Шаг*** 5. *Вычисляется относительная оценка*.

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 40$ вычисляется относительная оценка: $\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{40 - 73.6}{30.71 - 73.6} = 0.7836$,

которая при переходе от точки $X^o$ к точке $X_q^*$ лежит в пределах:

$$0.6087 = \lambda_4(X^o) \leq \lambda_4 = 0.7836 \leq \lambda_4(X_4^*) = 1, q \in \boldsymbol{K}, \quad (174)$$

***Шаг*** 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации.

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (119) и соответственно относительной оценки $\lambda_q$ в (120), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, $\lambda_q$, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.7836 - 0.6087}{1 - 0.6087} = 0.4470, q = 4 \in \boldsymbol{K}. \quad (175)$$

***Шаг*** *7*. Вычислим координаты точки приоритета критериев с размерностью $f_q$.

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}, q = 3$ определим координаты для точки с $f_q = 40$ с относительной оценкой (80):

$$x_{\lambda=0.74}^{q=3} = \{x_1 = X^o(1) + \rho(X_q^*(1) - X^o(1)),$$

$$x_2 = X^o(2) + \rho\left(X_q^*(2) - X^o(2)\right),$$

$$x_3 = X^o(3) + \rho\left(X_q^*(3) - X^o(3)\right),$$

$$x_4 = X^o(4) + \rho\left(X_q^*(4) - X^o(4)\right)\}, \quad (176)$$

где $X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}$,

$X_4^* = \{x_1 = 43.9022, x_2 = 49.5492, x_3 = 4.3486, x_4 = 2.2\}$.

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$X^q = \{x_1 = 40.6830, x_2 = 53.7734, x_3 = 3.3435, x_4 = 2.2\}$.

***Шаг** 8*. Вычисление главных показателей точки $X^q$.

Для полученной точки $X^q$, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1,K}\}$,

$f(X^q) = \{f_1(X^q) = 351.0, f_2(X^q) = 1963.8, f_3(X^q) = 200.1, f_4(X^q) = 40.2\}$;

все относительные оценки критериев:

$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\}$, $\lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$:

$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.5950, \lambda_2(X^q) = 0.4508, \lambda_3(X^q) = 0.7504, \lambda_4(X^q) = 0.7800\}$;

минимальная относительная оценка: $\min\lambda(X^q) = \min_{k\in K}(\lambda_k(X^q)) = 0.4508$.

$P^q = [p_1^4 = 1.3109, p_2^4 = 1.7297, p_3^4 = 1.0394, p_4^4 = 1.0]$;

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1,K}\}$:

$\lambda_k(X^q) * P^q = \{p_1^4 * \lambda_1(X^q) = 0.78,\ p_2^4 * \lambda_2(X^q) = 0.78,$
$p_3^4 * \lambda_3(X^q) = 0.78,\ p_4^4 * \lambda_4(X^q) = 0.78\}$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^4\lambda_1(X^q), p_2^4\lambda_2(X^q), p_3^4\lambda_3(X^q), p_4^4\lambda_4(X^q)) = 0.78$$

Аналогично другие точки из области Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S^o}$ могут быть получены.

*4.2.k4. **Анализ результатов решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете критерия**.*

Рассчитанная величина $f_q(X_t^o) = 40.2, q = 4 \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 40$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |40.2 - 40| = 0.20$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.5\%$.

Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |40.2 - 40| = 0.20$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.5\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \le \Delta f$, то вычисления завершаются. ***Конец***.

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения (6.38) и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений). В нашем примере окончательный вариант включает параметры:

$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}$;

параметры структуры материала при заданном приоритете критерия:

$q$=4: $X^q = \{x_1 = 40.6830, x_2 = 53.7734, x_3 = 3.3435, x_4 = 2.2\}$.

*4.3.k4.* ***Геометрическая интерпретация*** *результатов решения векторной задачи - функции* $f_1(X), \dots, f_4(X)$ *выбора оптимальных параметров* ***по четвертому*** *приоритетному критерию* ***в относительных единицах***.

Для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров решения векторной задачи по четвертому приоритетному критерию в относительных единицах сформируем рис. 6.*k4*.

Аналогично рис. 6, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума $Y_k^*$ $\lambda_k(Y_k^*), k = \overline{1,K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = \overline{1,K}$ (красный цвет) и представим их рис. 6.*k4*. На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в (116) в точках оптимума $Y_1^*$, $Y_2^*$, $Y_3^*$, $Y_4^*$ получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*) = \left\| \begin{matrix} L(Y_1^*) \\ L(Y_2^*) \\ L(Y_3^*) \\ L(Y_4^*) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1.0000 & 0.9245 & 0.3560 & 0.1197 \\ 0.9367 & 1.0000 & 0.1968 & 0.0363 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0000 & 1.011 \\ 0.3669 & 0.2257 & 0.9427 & 1.0000 \end{matrix} \right\|$$

Линейная функция, соединяющая точки $\lambda^o = 0.60874$ и $\lambda_4^\Delta(X_4^*)$=1 в относительных единицах характеризует функцию $f_4(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. Эта линейная функция представляет геометрическую интерпретацию функций $f_4(X)$ в относительных единицах из $N$-мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат. Аналогично исследуются все функции на рис. 6.*k4*.

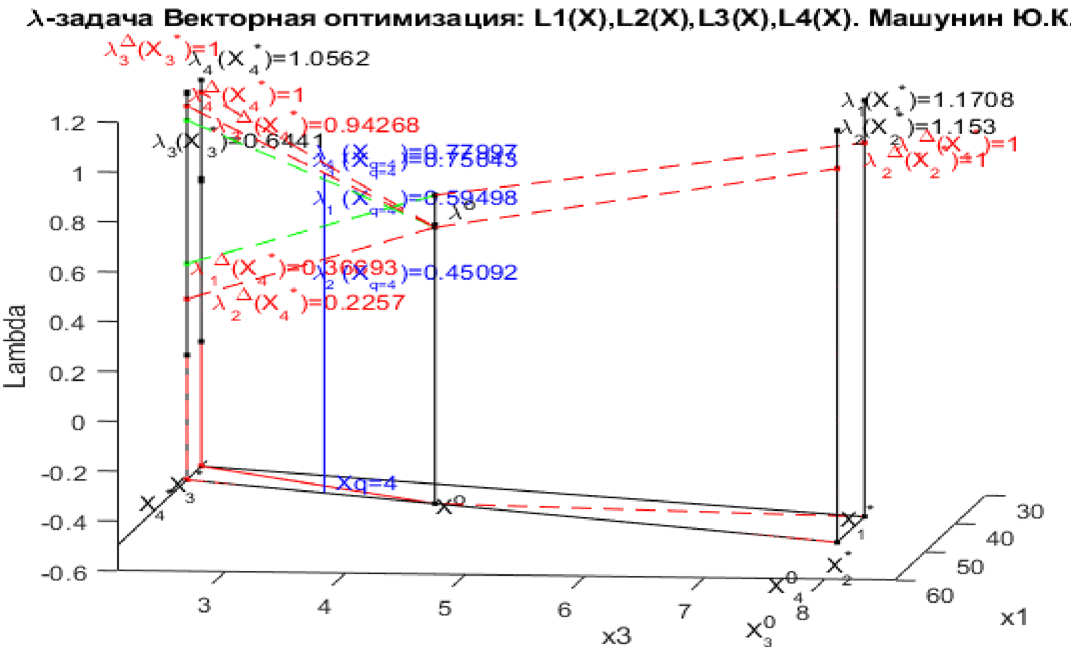


Рис. 6.*k4*. λ-задача в системе координат $x_1\ x_3\ (= y_1\ y_3)$ и λ. Результаты решения: $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = \overline{1,K}$; относительные оценки с приоритетом четвертого критерия в точке оптимума $X_{q=4}$: $\lambda_k(X_{q=4}), k = \overline{1,K}$.

В целом на рис. 6.*k4* в точке $X_4^*$ показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций (критериев):

$f_1(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_1^{\Delta}(X_4^*) = 0.36093$;

$f_2(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_2^{\Delta}(X_4^*) = 0.2257$;

$f_3(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_3^{\Delta}(X_4^*) = 0.94268$;

$f_4(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_4^{\Delta}(X_4^*) = 1.0$.

Относительные оценки с приоритетом четвертого критерия $X_{q=4}$:

$\lambda_k\left(X_{q=4}\right) = \frac{f_k(X_{q=4}) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$ : $\lambda_k\left(X_{q=4}\right) = \{\lambda_1(X_{q=4}) = 0.5949, \lambda_2(X_{q=1}) = 0.4509, \lambda_3(X_{q=1}) = 0.7584, \lambda_4(X_{q=1}) = 0.7799\}$.

Результаты решения показывают, что математические результаты полностью совпадают с геометрическими.

*4.4.4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом четвертого критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат* ***в физических единицах***.

Исходной информацией для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи (ВЗМП) с приоритетом четвертого критерия являются:

параметры точки оптимума при равнозначных критериях:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}$,

рассчитанной на пятом шаге алгоритма в двухмерной системе координат $x_1, x_2$ (см. Рис. 1) и представленной в трехмерной системе координат $x_1, x_2$ и $\lambda$ в относительных единицах на рис. 2, 3, 4 при проектировании.

Исследуем и представим параметры последовательно для каждой характеристики структуры материала (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в ***физических единицах***.

***1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – первой характеристики*** $f_1\left(X_{q=4}\right)$ *с приоритетом четвертого критерия при проектировании в физических единицах*.

На Рис. 7.*k4* исследованы: точки оптимума $X_4^*,\ X_{q=4}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_4(X_4^*)\ \lambda_1(X_{q=4})$, а также линейные функции $\lambda^o\lambda_1\left(X_{q=4}\right) - \lambda_1^{\Delta}(X_4^*)\ \lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_1\left(X_{q=4}\right)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

$\max h_1(X) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2$.

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_1(Y)$ в физических единицах с переменными координатами $\{y_1\ y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ (87) на рис. 7.*k4*.

Координаты точки и функция первого критерия на **максимум:**

$Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.99$ при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_1^{\Delta}(X_1^*) = -387.99$;

$Y_1^* = \{y_1 = 46.5676, y_3 = 8.0\}$ (на рис. $6k4$ обозначена как $X_1^*$). В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_1^* = f_1(X_1^*) = 403.605$ (Черный цвет).

Координаты точки и функция первого критерия на **минимум:**

В точке $X_1^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_1^0 = f_1(X_1^o) = 303.66$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_1^\Delta(X_1^o) = 296.59$.

Координаты точки и функция первого критерия **при равнозначных критериях:**

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_1(X^o) = 363.96$.

Относительная оценка с приоритетом четвертого критерия в точке оптимума $X_{q=4}$: $\lambda_1(X_{q=4}) = \frac{f_1(X_{q=4}) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} = 0.59498$. В физических единицах величина первого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=4}$ равна $f_1(X_{q=4}) = 350.97$. (Показана фиолетовым цветом).

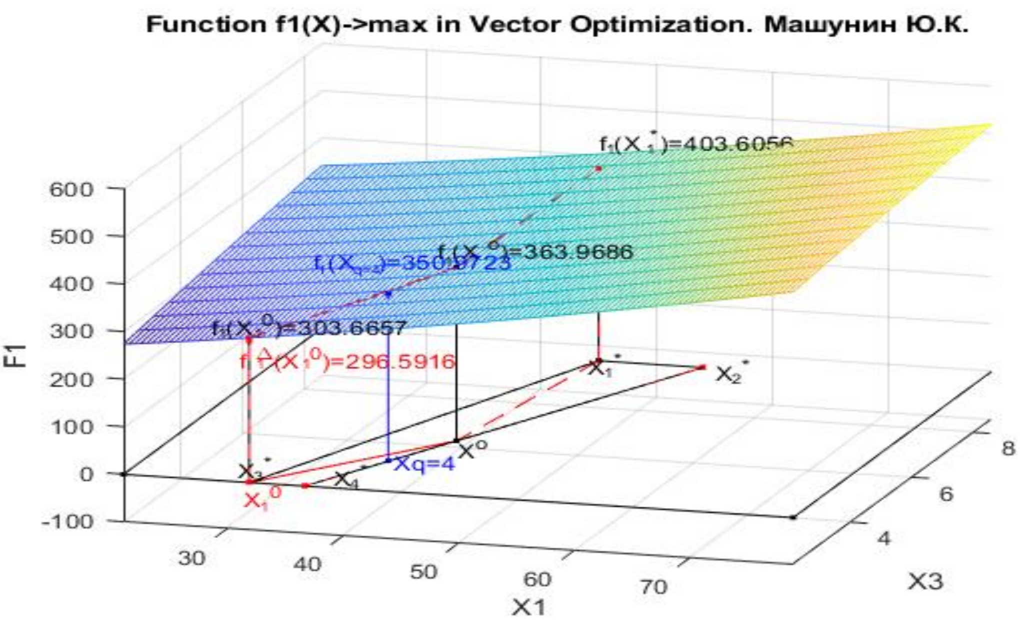


Рис. 7.$k4$. Функция $f_1(X_{q=4})$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{q=4})$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_1(X^o)$ и $f_1^\Delta(X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_1^\Delta(X_1^*)$ - $f_1(X^o)$ - $f_1^\Delta(X_1^0)$ с учетом $f_1(X_{q=4})$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – второй характеристики*** $f_2(X)$ *с приоритетом четвертого критерия - модели структуры материала при проектировании в физических единицах*.

На Рис. 8.*k4* исследованы: точки оптимума $X_2^*$, $X_{q=4}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_2(X_2^*)$ $\lambda_2(X_{q=4})$, а также линейные функции $\lambda^o\lambda_2(X_{q=4}) - \lambda_2^\Delta(X_2^*)$ $\lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Вторая характеристика структуры материала $h_2(X)$ (112) сформирована в 4.1.4:

$min\ f_2(X)$≡795.72 +23.89$x_1$ +30.866$x_2$ -25.8586$x_3$ -45.0026$x_4$ -0.7683$x_1x_2$ +0.4703$x_1x_3$ +0.7472$x_1x_4$-0.1283$x_2x_3$+0.3266$x_2x_4$-0.0112$x_3x_4$+0.0398$x_1^2$+0.0365$x_2^2$ +3.2$x_3^2$+2.6457$x_4^2$.

Представим геометрическую интерпретацию функцию $h_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ (130) на рис. 8.*k4*.

Координаты точки и функция второго критерия на **оптимум (минимум):**

$Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_2^* = h_2(X_2^*) = 1361.4$

при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_2^\Delta(X_2^*) = 1361.41$.

$Y_2^* = \{x_1 = 55.6, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 8.*k4* обозначена как $X_2^*$). В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_2^*$=$f_2(X_2^*) = 1193.56$. (Черный цвет).

Координаты точки **минимума** (Наихудшее решение – максимальное) в точке $X_2^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_2^0$=$f_2(X_2^o) = 2207.2$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_2^\Delta(X_2^o) = 2458.5$.

Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях:**

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$.

Величина целевой функции $f_2(X^o) = 1790.68$.

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=4}$ второго критерия: $\lambda_2(X_{q=4}) = \frac{f_2(X_{q=4}) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} = 0.45092$. В физических единицах величина второго критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=4}$ равна $f_2(X_{q=4}) = 1963.83$. (Показана фиолетовым цветом).

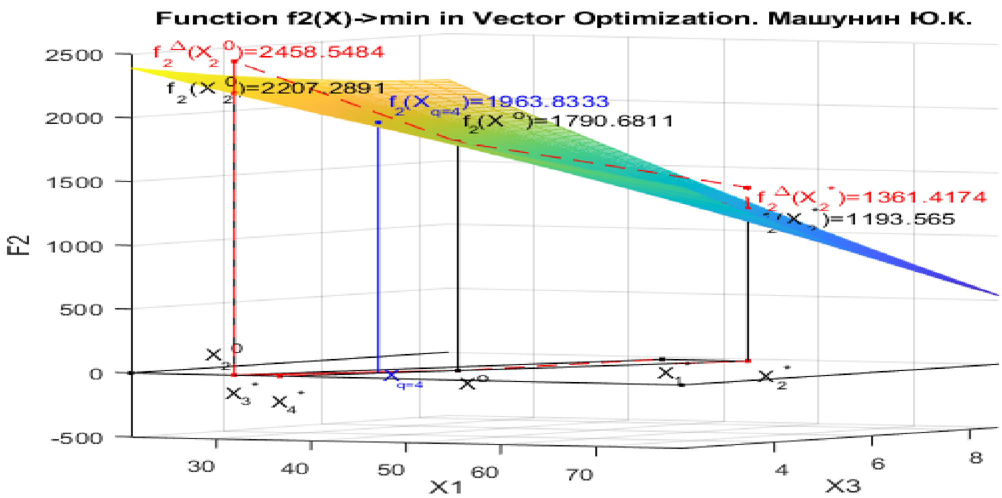


Рис. 8.*k4*. Функция $f_2(X_{q=4})$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_2(X_{q=4})$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_2(X^o)$ и $f_2^{\Delta}(X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^{\Delta}(X_2^*)$ - $f_2(X^o)$ - $f_2^{\Delta}(X_2^0)$ с учетом $f_2\left(X_{q=4}\right)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – третьей характеристики*** $f_3(X)$ *с приоритетом четвертого критерия - модели структуры материала при проектировании в физических единицах.*

На Рис. 9.*k4* исследованы: точки оптимума $X_3^*,\ X_{q=4}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_3(X_3^*)\ \lambda_3(X_{q=4})$, а также линейные функции $\lambda^o \lambda_3\left(X_{q=4}\right) - \lambda_3^{\Delta}(X_3^*)\ \lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_3(X)$ с приоритетом четвертого критерия в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Третья характеристика структуры материала $h_3(X)$ (111) сформирована в 4.1.4:

$max\ h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918 y_1 + 1.73 y_2 - 0.3713 y_3 - 2.20 y_4 - 0.0132 y_1 y_2 - 0.008 y_1 y_3 + 0.0193 y_1 y_4 - 0.0172 y_2 y_3 + 0.0161 y_2 y_4 - 0.0006 y_3 y_4 - 0.0004 y_1^2 - 0.0002 y_2^2 + 0.0335 y_3^2 + 0.124 y_4^2\}$.

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ на рис. 9.*k4*.

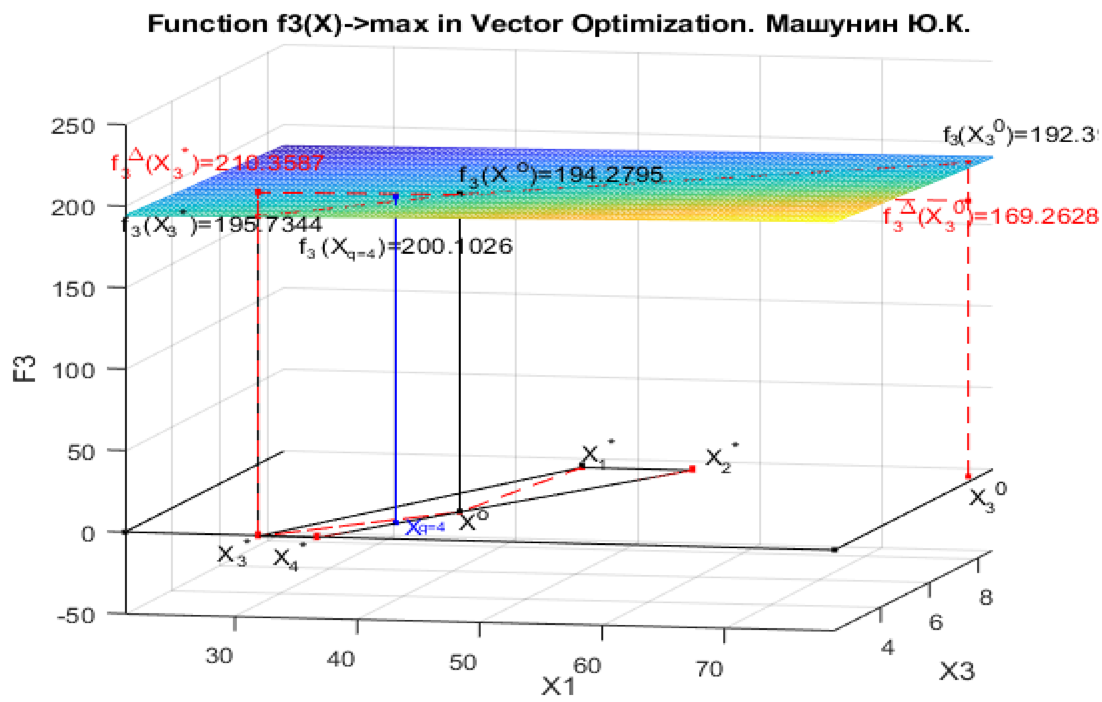


Рис. 9.*k4*. Функция $f_3\left(X_{q=4}\right)$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_3\left(X_{q=4}\right)$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Координаты точки и функция третьего критерия на **максимум:**

$Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.35$ при расчете по четырем переменным. На рис. 9.*k4* обозначена как $f_3^\Delta(X_3^*) = -210.35$

$Y_3^* = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 9.*k4* обозначена как $X_3^*$). В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна $h_3^*$=$f_3(X_3^*) = 195.73$. (Черный цвет). Величина целевой функции $F_3^*$= 210.3.

Координаты точки **минимума** $X_3^0 = \{x_1 = 78.16, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 9.*k4*. Величина целевой функции $f_3^0$=169.26.

Координаты точки и функция третьего критерия **при равнозначных критериях:**

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_2(X^o) =$ 194.27.

Относительная оценка с приоритетом четвертого критерия в точке оптимума $X_{q=4}$ третьего критерия: $\lambda_3(X_{q=4}) = \frac{f_3(X_{q=4})-f_3^0}{f_3^*-f_3^0} = 0.75043$ . В физических единицах величина третьего критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=4}$ равна $f_3(X_{q=4}) = 200.1026$.

Линейная функция, соединяющая точки $f_3(X^o)$ и $f_3^\Delta(X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_3^\Delta(X_1^*)$ - $f_3(X^o)$ - $f_3^\Delta(X_3^0)$ и $f_3(X_{q=4})$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_3(X)$ с учетом $f_3(X_{q=4}) = 200.1$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – четвертой характеристики*** $f_4(X_{q=4})$ *с приоритетом четвертого критерия – модели структуры материала при проектировании в физических единицах.*

На Рис. 10.*k4* исследованы: точки оптимума $X_4^*$ , $X_{q=4}$ , с соответствующими относительными оценками $\lambda_4(X_4^*)$ $\lambda_4(X_{q=4})$, а также линейные функции $\lambda^o\lambda_4(X_{q=4}) - \lambda_4^\Delta(X_4^*)$ $\lambda^o$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Четвертая характеристика структуры материала $h_4(X)$ (113) сформирована в 4.1.4:

$max\ h_4(Y)$≡$21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 +$ $0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 +$ $0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}\}$.

Представим геометрическую интерпретацию функции $f_4(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки $Y^o$ (113) на рис. 10.*k4*.

Координаты точки и функция четвертого критерия на **максимум:**

$Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$, $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$ при расчете по четырем переменным. На рис. 10.*k4* обозначена как $f_4^\Delta(X_4^*) = 30.714$

$X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 10.*k4* обозначена как $X_4^*$).

В двухмерной системе координат $y_1, y_3$ величина целевой функции равна

$h_4^*$=$f_4(X_4^*) = 28.302$. (Черный цвет).

Координаты точки и функция четвертого критерия **минимума** $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 8\}$. Величина целевой функции $f_4^0 = f_4^\Delta(X_4^*) = -73.62$.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. $9k4$ обозначена как $X^o$ ). Величина целевой функции $f_4(X^o) = 47.5$.

Относительная оценка четвертого критерия с приоритетом четвертого критерия в точке оптимума $X_{q=4}$: $\lambda_4(X_{q=4}) = \frac{f_4(X_{q=4}) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} = 0.77997$. В физических единицах величина четвертого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=4}$ равна $f_4(X_{q=4}) = 40.15$ – близка к исследуемой величине $f_4(X) = 40$. (Показана фиолетовым цветом).

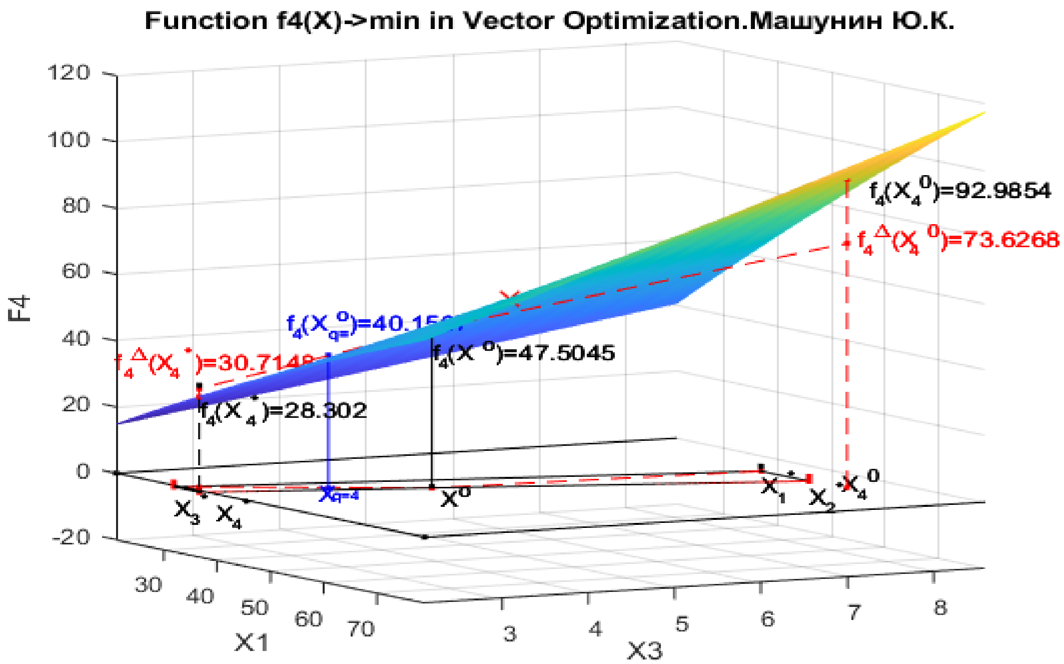


Рис. 10.$k4$. Функция $f_4(X_{q=4})$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_4(X_{q=4})$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_4(X^o)$ и $f_4^\Delta(X_4^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_4^\Delta(X_4^*)$ -$f_4(X^o)$- $f_4^\Delta(X_4^0)$ совместно с $f_4(X_{q=4}) = 40.15$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***Заключение по разделу: критерий** $k4$.*

В разделе рассмотрена и решена проблема (фрагмент) разработки и принятия управленческого решения условиях неопределенности в сложной инженерной системы (структуры материала). Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете четвертого критерия, представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев), во-первых, в относительных единицах, во-вторых, в физических единицах.

**9. Сравнение прикладных методов многомерной математики с методами искусственного интеллекта.**

Оценим прикладные методы многомерной математики - {аксиоматика Машунин Ю.К., принципы оптимальности и методы решения векторных задач математического (выпуклого) программирования, представленные в третьем и четвертом разделе данной работы, и сравним их с методами искусственного интеллекта. Используя теорию векторной оптимизации, мы получили для инженерной системы (в частности, технической системы, структуры материала):

точки оптимума при равнозначных критериях - $X^o = (x_j^o, j = \overline{1,N}\}$;

характеристики (критерии) при равнозначных критериях – $F(X^o) = \{f_k(X^o), k = \overline{1,K}\}$;

относительные оценки при равнозначных критериях – $\lambda(X^o) = \{\lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}\}$, которые лежат в пределах $\{0 \leq \lambda_k(X^o) \leq 1\ (100\%), k = \overline{1,K}\}$, и легко переводится в натуральные (физические) данные.

Может ли эти результаты получить искусственный интеллект, функционирующий, как правило, по принципу перебора. Ответим: «Нет». Искусственный интеллект может получить только приблизительный результат, который задал человек, но чем этот результат лучше других результатов также должен оценить человек на основе интуиции.

Таким образом, разработанная теория векторной оптимизации может являться математическим аппаратом вычислительного интеллекта искусственного интеллекта.

**Оценим математические результаты данной работы** с точки зрения искусственного интеллекта, полученные на основе теории векторной оптимизации: {аксиоматика Машунина Ю.К., принципы оптимальности и методы решения векторных задач математического (выпуклого) программирования}.

Используя теорию векторной оптимизации, мы получили, в частности, для технической системы и структуры материала: точки оптимума - $X^o = (x_j^o, j = \overline{1,N}\}$;

характеристики (критерии) – $F(X^o) = \{f_k(X^o), k = \overline{1,K}\}$;

относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}\}$, которые лежат в пределах $\{0 \leq \lambda_k(X^o) \leq 1(\text{или } 100\%), k = \overline{1,K}\}$, и легко переводится в натуральные единицы.

Может ли эти результаты получить искусственный интеллект, функционирующий, как правило, по принципу перебора. Ответим: «Нет». Искусственный интеллект может получить только приблизительный результат, и то этот результат должен оценить человек.

Таким образом, разработанная теория векторной оптимизации может являться математическим аппаратом вычислительного интеллекта искусственного интеллекта.

**10. Заключение**

Проблема разработки математических методов многомерной математики в приложении к векторной задаче оптимизации и принятия оптимального решения на их основе в сложной технической системе по некоторому набору функциональных характеристик и экспериментальных данных является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования инженерно-технических систем.

В работе разработана теория и конструктивные методы решения векторных (многокритериальных) задач математического программирования, *во-первых*, при равнозначных критериях (характеристик инженерных систем), *во-вторых*, при заданной числовой величине приоритетного (представляющего интерес для разработчика) критерия.

В работе на базе векторной оптимизации разработана методология проектирования инженерных систем путем: 1) построения *математической* модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности; разработки конструктивных методов решения векторной задачи; 2) представлено построение численной модели выбора оптимальных параметров сложной инженерной системы (материала сложной структуры: много параметрической и много функциональной); 3) представлена численная реализация модели структуры материала при равнозначных критериях; 4) представлена численная реализация модели структуры материала при заданном приоритете любого критерия; 5) представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев) в относительных и физических единицах.

программирования. Автор готов участвовать в решении векторных задач линейного и нелинейного программирования. Mashunin@mail.ru

*Список литературы*

1. Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.
2. Математическая энциклопедия. Редакционная коллегия: И.М. Виноградов и другие. - М.: «Советская энциклопедия», 1977. – 1152 с.
3. Carlin S. Mathematical methods in a game theory, programming and economy. - M.: World, 1964, p. 837.
4. Zak Yu. A. Multi-stage decision-making processes in the problem of vector optimization // A.iT. 1976. No. 6, pp. 41-45.
5. Mikhailevich V. S., Volkovich V. L. Computational methods of research and design of complex systems. M.: Science, 1979, p. 319.
6. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. М.: Наука, 1986. 141 с.
7. Машунин Ю. К. , Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем: монография. - Владивосток: ДВГАЭУ, 1996. 131 с.
8. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93.

Yu. K. Mashunin, "Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector_optimization methods," Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus)

9. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.

Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Descision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)

10. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономических системах. – М.: Логос. 2013. 448 с. (Новая университетская библиотека)
11. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(9): September, 2014. P. 84-96 .

12. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(10): October, 2014. P. 224-240.

13. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.

14. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.

15. Yu. K. Mashunin, "Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data."*American Journal of Modeling and Optimization*, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.

16. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.

17. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation Technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.

18. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

19. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

20. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. https://rdcu.be/bhZ8i (Scopus)

21. Mashunin Yu.K. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization," Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. https://doi.org/10.3390/asi2040032

22. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7

23. Торгашов А.Ю., Кривошеев В.П., Машунин Ю.К., Холланд Ч.Д. Расчет и многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения // Изв. ВУЗов. Нефть и газ, 2001, №3, с. 82-86.

24. Кетков Ю. Л., Кетков А.Ю., Шульц М. М. МАТЛАБ 6.х.: программирование численных методов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. - 672 с.

25. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Шахнова. - М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

26. Jahn Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 2010. 460 p.

27. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. London. New York. 2010. 550 p.

28. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg . 2009. 197 p.

29. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.

30. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.

31. Walras L. 1874. Elements of Pure Economies , or the theory of social wealth, Lau-sanne.

32. Samuelson P. 1964. Economics. Part 1. -M: Progress.

33. Marshall A. 1993. Principles of economic science. Tom 2. -M: Progress, 145 p.

34. Coase, Ronald. The Institutional Structure of Production // The American Economic Re-view, vol.82, n°4, pp. 713-719, 1992. (Nobel Prize lecture)Gilbert, J., 1976. Economic theory and goals of the society. - M: Progress. - 230 p.

35. Saimone, G., 1995. Theory of decision making in economic theory and the behav-ioral Sciences. // In the book: The theory of the firm. St. Petersburg.

36. Seo, K.K., 2000. Managerial Economics: Text, Problems, and Short cases. Per. from English. - M: INFA-M. - 671 p.

37. Khan K. 2004. Controlling. - M: INFA-M. - 671 p.

38. Fayol A. (1992). General and industrial management. - M: Controlling.

39. Mashunin Yu. K., 2010. Theory and modeling of the market on the basis of vector optimization. - M: University book. - 352 p.

40. Mashunin, Yu. K., Mashunin, K., Yu. Numerical realization of innovative development of the industrial enterprise//Global challenges in economy and development of the industry (INDUSTRY-2016): proceedings of scientific – practical Konf. with foreign participation on March 21-23 2016/under the editorship of the Dr. of economic Sciences, prof. A. V. Babkin. – SPb.: Publishing house Politekhn. University, 2016. 455-484. (rus.).

41. Mashunin, Yu. K., 2016. Modeling and software implementation of innovative development of the industrial enterprise. St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, no. 3(245), pp. 78-92. (rus)

42. Mashunin, Yu. K., Mashunin, K., Yu., 2017. Analysis of the organization of control, optimization and practice of innovative development of the industrial cluster, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 10(4), 187-197. DOI: 10.18721/JE. 10418

43. Mashunin, Yu. K., 2017. Management of the region economy. M: RuSCIence. - 344. (rus) ISBN 978-5-4365-1984-5

44. Mashunin Yu. K., K. Yu. Mashunin, Strategic and Innovative Development of the Cluster based on the digital economy, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 11 (4) (2018) 85—99. DOI: 10.18721/JE.11406

45. Mashunin, Yu. K., 2019. Theory of management and the practice of making managerial decisions: textbook. - Moscow: RuSCIence. – 494 p. (rus) ISBN 978-5-4365-3088-8