Баадыр Динара Павловна, магистрант 3 курс
МО_311 группа МБОУ Кызыл-Сылдысская СОШ
с. Булун-Бажы Эрзинского кожууна Республики Тыва

РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Аннотация: В жизни каждого из нас встречаются такие задачи, которые необходимо решить наиболее рациональным и быстрым способом. С помощь математических действий возможно решить эти задачи оптимальным способом. Чтобы повысить эффективность производства и улучшить качество продукции внедряют в работу математические методы. Рассмотрим один из этих методов, а точнее нахождение экстремумов, то есть нахождение наибольшего и наименьшего значения, наиболее лучшего решения для поставленной задачи.

Задачи на оптимизацию решают, используя принцип математического моделирования, который состоит из трех этапов:

1.Составление математической модели
2.Работа с составленной моделью
3.Ответ на вопрос задачи.

Обратимся к примерам.

Abstract: In the life of each of us, there are such tasks that need to be solved in the most rational and fastest way. With the help of mathematical actions, it is possible to solve these problems in an optimal way. In order to increase production efficiency and improve product quality, mathematical methods are introduced into the work. Let's consider one of these methods, or rather, finding extremes, that is, finding the largest and smallest values, the best solution for the task. Optimization tasks are solved using the principle of mathematical modeling, which consists of three stages:

1. Drawing up a mathematical model.
2.Working with the compiled model.
3. The answer to the question of the task. Let's turn to the examples.

Ключевые слова: производная, экстремумы.
Keywords: derivative, extremes.

Задача 1.

Снаряд массой $m = 20$ *кг выпущен вертикал*ьно вверх из зенитного орудия с начальной скоростью $v_0 = 100\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Найдите кинетическую энерги. снаряда в момент времени t = 10 с. На какой высоте кинетическая энергия равна нулю?

Решение: а) Высота h снаряда подчиняется закону $h(t) = V0t - \frac{gt^2}{2}$, где g – ускорение свободного падение, $g \approx 9.8\ м/с^2$. Следовательно, скорость снаряда в момент времени t равна $v(t)=h'(t)= v_0-gt$.

$$V(10)=100-g\cdot 10\approx 100-9{,}8\cdot 10=100-98=2\ (м/с)$$

$$E_к=\frac{mv^2}{2};\ E_к=\frac{20\cdot 4}{2}=40\ (Дж)$$

б) Кинетическая энергия равна нулю, когда скорость равна нулю, т.е.

v_0-gt=0, откуда t=$\frac{v_0}{g}$. $E_к$=0, если снаряд находится на высоте

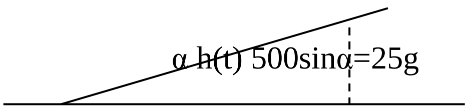
$$h(t)=V_0\cdot\frac{V_0}{g}-\frac{g}{2}\cdot\frac{V_0^{\ 2}}{g^2}=\frac{V_0^{\ 2}}{g}-\frac{V_0^{\ 2}}{2g}=\frac{V_0^{\ 2}}{2g};\ h\approx\frac{100^2}{2\cdot 9{,}8}=\frac{10000}{19{,}6}\approx 510\ (м)$$

Ответ: $E_к \approx$ 40 Дж, h ≈ 510 м.

Задача 2. Высота снаряда, вылетевшего с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту измеряется по закону h(t)=V₀sinα$\cdot t-\frac{g}{2}t^2$. Известно, что v_0=500 м/с, а через 1с скорость изменения высоты снаряда была равна 24g м/с. Под каким углом к горизонту вылетел снаряд?

При решении взять g≈10 м/с^2.

Решение: V(t)=h′(t)=$\left(V_0\sin\alpha t-\frac{g}{2}t^2\right)'$=$v_0 sin\propto -gt$;



$v(1)$=$500sin\propto -g$;

$500sin\propto -g$ =24g;

sinα=$\frac{25g}{500}=\frac{g}{20};\sin\alpha\approx\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

α ≈ 30^0.

Ответ: снаряд вылетел под углом 30^0 к горизонту.

Задача 3. Исследуйте функцию на монотонность и экстремум и постройте ее график:

$a)\ y=\sqrt{x}-x$; б) $y=x\sqrt{x+2}$;

Решение: а) $y=\sqrt{x}-x$;

Сначала находим производную функции:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=\frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}};$$

Находим промежутки возрастания:

$$1-2\sqrt{x}\geq 0$$
$$2\sqrt{x}\leq 1$$
$$x\leq\frac{1}{4}, x\geq 0$$

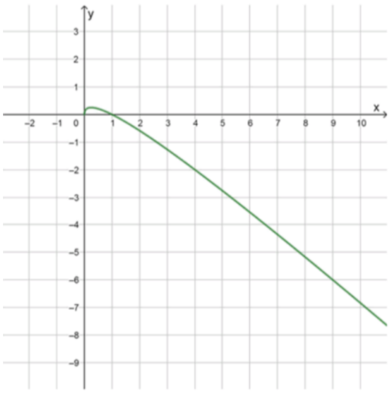
Точки максимума:

$$y\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$$

Координаты точек:

x	0	1	4
y	0	0	-2

График функции:



Ответ: Функция возрастает на [0;0,25] и убывает на [0,25; + ∞).
x = 0,25 – точка максимума, $y_{max} = 0{,}25$.
б) $y = x\sqrt{x+2}$;
Сначала находим производную функции:

$$y' = u'v + uv' = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}} = \frac{2(x+2)+x}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}};$$

Промежутки возрастания:

$$3x + 4 \geq 0$$
$$3x \leq -4$$
$$x \leq -\frac{4}{3}, x \geq -2$$

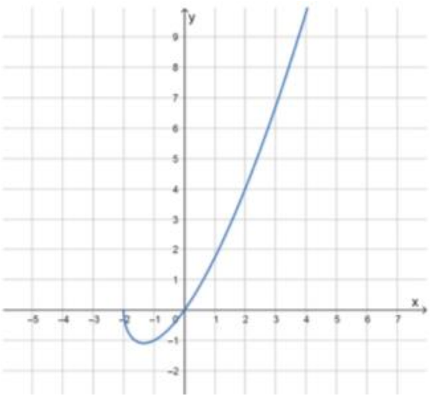
Точки максимума:

$$y\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}+2} = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}};$$

Координаты точек:

x	-2	-1	0	2
y	0	-1	0	4

График функции:



Ответ: Функция возрастает на [$-\frac{4}{3}$;+∞] и убывает на [2; $-\frac{4}{3}$].
x = $-\frac{4}{3}$ – точка минимума, $y_{min} = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$.

Задача 4. Используя свойство монотонности функции, решите уравнение:
а) $2x^5 + x^3 + 5x - 80 = \sqrt[3]{14 - 3x}$; б) $\sqrt[4]{10 + 3x} = 74 - x^5 - 3x^3 - 8x$;
Решение: а) $2x^5 + x^3 + 5x - 80 = \sqrt[3]{14 - 3x}$;
$f(x) = 2x^5 + x^3 + 5x - 80$; $g(x) = \sqrt[3]{14 - 3x}$;
Находим производные функции:
$f'(x) = 10x^4 + 3x^2 + 5$; $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(14-3x)^2}}$;
Методом подбора находим решение:
$f(2) = 2 * 2^5 + 2^3 + 5 * 2 - 80 = 2$; $g(2) = \sqrt[3]{14 - 3 * 2 = 2}$;
б) $\sqrt[4]{10 + 3x} = 74 - x^5 - 3x^3 - 8x$;
$f(x) = \sqrt[4]{10 + 3x}$; $g(x) = 74 - x^5 - 3x^3 - 8x$;
Находим производные функции:
$f'(x) = \frac{3}{4\sqrt[3]{(10+3x)^3}}$; $g'(x) = -5x^4 - 9x^2 - 8$;
Методом подбора находим решение:
$f(2) = \sqrt[4]{10 + 3 * 2} = 2$; $g(2) = 74 - 2^5 - 3 * 2^3 - 8 * 2 = 2$;

Список литературы:

1. Виленкин Н.Я. Математический анализ: Дифференц. исчисление. Учебн. пособие для студентов-заочников I курс физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Н.Я. Виленкин, А.Г. Мордкович, Е.С. Куницкая.- 2-е изд., перераб.- М.: Просвещение, 1984.- 175 с.
2. Алгебра и начала анализа, 10 класс (в двух частях). Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) под ред. А. Г. Мордковича. –М.: Мнемозина, 2009.
3. Глазырина, М. В. Обучение учащихся решению задач прикладного характера на оптимизацию на разных уровнях / М. В. Глазырина – Текст: непосредственный // Актуальные проблемы развития среднего и высшего образования: XII межвузовский сборник научных трудов. – Челябинск, 2020. – С. 79-83.