DOI 10.37539/2949-1991.2025.34.11.018

Березин Сергей Викторович,
Электрик «МБУ»
РФ, Респ. Башкортостан, с. Иглино
https://orcid.org/0000-0001-8086-8288
Berezin Sergey Viktorovich,
Electrician "MBU"
RF, r. Bashkortostan, s. Iglino
https://orcid.org/0000-0001-8086-8288

УЛЬТРАРАДИКАЛ: ГЕОМЕТРИЯ МАСТЕР-РЯДОВ
ULTRARADICAL: THE GEOMETRY OF MASTER SERIES

Аннотация. Для каждого корня алгебраического уравнения за радиусом сходимости строится единственный степенной ряд, обеспечивающий непрерывность данной ветви.

Abstract. For each root of an algebraic equation beyond the radius of convergence, a unique power series is constructed that ensures the continuity of the given branch.

Keywords: ultra-radical, analytic continuation, branch points, master series.

Ключевые слова: ультрарадикал, аналитическое продолжение, мастер-ряд, точки ветвления.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Одной из фундаментальных проблем комплексного анализа является **проблема монодромии** – поведение аналитического продолжения функции вдоль путей, огибающих точки ветвления.

Для ультрарадикала $\sqrt[n;r;s]{x}$ и других многозначных функций традиционные методы степенных рядов не позволяют систематически отслеживать монодромию, то есть, то, как конкретная ветвь функции преобразуется при аналитическом продолжении за **окружность сходимости** |x| = R, где происходит переключение на сопряжённые степенные ряды.

В данной работе предлагается **геометрический критерий** выбора ветвей, основанный на методе Master-J [2], который решает эту проблему. Критерий обеспечивает **непрерывность ветвления** при аналитическом продолжении через границу сходимости и предсказуемое поведение относительно **группы монодромии**, отвечающей за циклическое перестроение ветвей при обходе вокруг истинных точек ветвления функции.

1. **Ультрарадикал**

Ультрарадикал - это многозначная функция $\sqrt[n;r;s]{x}$ которая является решением уравнения

$$y^r = 1 + rxy^s \tag{1}$$

для заданного комплексного числа (x). Для целых r>4 общее алгебраическое уравнение степени r неразрешимо в радикалах [3]. Хотя данное частное уравнение может иметь разрешимую группу Галуа для некоторых параметров, в общем случае для его вычисления требуется использовать степенные ряды, где каждому возможному решению соответствует своя "ветвь", обозначаемая целым числом (n).

$$y_n = \sqrt[n;r;s]{x} \equiv U_n(r;s;x) \tag{2}$$

Для разложения элементарных функций, обобщений функции Ламберта и ультрарадикала в степенной ряд, эффективным инструментом является метод Master-J, универсальный степенной ряд (мастер-ряд) которого использует 3 параметра m; s; r и независимый аргумент x.

$$\mathrm{M}(m;s;r;x) = m + x + \sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{x^t}{t!}\prod_{j=1}^{t-1}(m+st-rj)\right) = m + x + (m+2s-r)\frac{x^2}{2} + (m+3s-r)(m+3s-2r)\frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{3}$$

Когда r или s неравны нулю, мастер-ряд имеет ограниченный радиус сходимости.

$$R = \left| |s|^{\frac{-s}{r}} \cdot |s-r|^{\frac{s-r}{r}} \right|, r \neq 0, s \neq r \tag{4}$$

Примечание: Данное выражение для R корректно и для комплексных параметров r,s, если комплексная степенная функция определена через главную ветвь логарифма [4].

При $|x| < R$, используется исходный степенной ряд

$$y_n = vM(1;s;r;xv^s), v = e^{\frac{2\pi i n}{r}}, n \in Z \tag{5, 6}$$

При $|x| \geq R$, исходный ряд расходится, и для аналитического продолжения ветви с индексом n используется одна из двух альтернативных форм ряда с индексами h и H.

$$y(h) = vM\left(1; -r; s-r; \frac{v^{-r}}{r-s}\right), v = e^{\frac{\ln\left|\frac{1}{rx}\right| + \left(arg\left(\frac{1}{rx}\right) + 2\pi h\right)i}{s-r}}, h \in Z \tag{7, 8}$$

или

$$y(H) = vM\left(1; r-s; -s; \frac{v^{r-s}}{srx}\right), v = e^{\frac{\ln|rx| + (arg(-rx) + 2\pi H)i}{-s}}, H \in Z \tag{9,10}$$

При этом целочисленный параметр h (или H) выбирается из условия непрерывности при переходе через круг |x|=R.

2. **Алгоритм выбора ветвей аналитического продолжения**

Для обеспечения непрерывности ветви ультрарадикала y_n при аналитическом продолжении за круг сходимости $|x| = R$ необходимо установить соответствие между исходной ветвью с индексом «n» (определённой при $|x| < R$) и подходящими ветвями $y(h)$ или $y(H)$ (определёнными при $|x| \geq R$).

2.1. Секторная структура на единичной окружности

Ключевым для алгоритма является понятие "сектора единичной окружности". При целых значениях параметров r и s комплексная единичная окружность разбивается на r секторов. Направления на центры этих секторов задаются лучами, исходящими из начала координат в направлении $\arg\big(v(n)\big) = \frac{2\pi in}{r}, n \in Z$

2.2. Критерий непрерывности

В качестве продолжения y_n при $|x| \geq R$ выбирается та ветвь $y(h)$ или $y(H)$, у которой $\arg\big(v(h)\big)$ (соответственно $\arg\big(v(H)\big)$) попадает в сектор с центром $\arg\big(v(n)\big)$.

Этот **геометрический критерий** гарантирует, что при пересечении окружности $|x| = R$ значение функции $y_n(x)$ изменяется непрерывно.

2.3. Случай вырождения (пересечение графиков)

В особых случаях, когда два различных кандидата на продолжение оказываются **на границе секторов**, графики соответствующих корней пересекаются когда arg(x) лежит на этих границах и при $|x| = R$. С точки зрения непрерывности, любой из двух кандидатов корректен. При $|x| \geq R$ эти корни отличаются по модулю, в этом случае необходимо выбирать ветвь опираясь на модули корней.

3. Примеры работы алгоритма

В данном разделе представлены примеры, иллюстрирующие применение геометрического критерия для аналитического продолжения ветвей ультрарадикала. Цель – наглядно показать, как обеспечивается непрерывность корней при переходе через окружность сходимости $|x| = R$

Пример 1: аргументы продолжений лежат внутри секторов (r=5, s=2, x=7)

Рассмотрим ультрарадикал $\sqrt[n;5;2]{x}$, являющийся решением уравнения $y^5 = 1 + 5xy^2$.

Задача. Найти асимптотическое разложение ветви (n=2) ультрарадикала степеней 5;2 от независимого аргумента x=7.

Решение.

1. Находим центр сектора данной ветви $\arg\big(v(n=2)\big) = \arg\left(e^{\frac{2\pi in}{r}}\right) = \frac{4\pi}{5} = 144°$

2. Определяем границы этого сектора $\left(\frac{4}{5} \pm \frac{2}{5}\right)\pi$, [108°, 180°]

3. Выбираем тот y(h) или y(H) чей arg(v) находится в этом секторе

$$v(h) = e^{\frac{\ln\left|\frac{1}{rx}\right| + \left(arg\left(\frac{1}{rx}\right) + 2\pi h\right)i}{s-r}} = e^{\frac{2\pi hi}{-3}} \tag{11}$$

$$\arg\big(v(h=0)\big) = 0, \arg\big(v(h=1)\big) = \frac{2\pi}{-3} = 300°, \arg\big(v(h=2)\big) = \frac{4\pi}{-3} = \frac{2\pi}{3} = 120° \tag{12}$$

$$v(H) = e^{\frac{\ln|rx| + (arg(-rx) + 2\pi H)i}{-s}} = e^{\frac{(\pi + 2\pi H)i}{-2}} \tag{13}$$

$$\arg\big(v(H=0)\big) = \frac{\pi}{-2} = 270°, \arg\big(v(H=1)\big) = \frac{3\pi}{-2} = \frac{\pi}{2} = 90° \tag{14}$$

Сравнивая рассчитанные аргументы с границами сектора [108°, 180°], получаем, что только $\arg\big(v(h=2)\big) = \frac{2\pi}{2} = 120°$ находится в секторе корня y_2.

Вывод: аналитическим продолжением расходящегося ряда ветки

$$y_2 = vM(1;2;5;7v^2), v = e^{\frac{4\pi i}{5}} \tag{15}$$

Является сходящийся ряд ветки

$$y(h=2) = vM\left(1;-5;-3;\frac{v^{-5}}{2}\right), v = e^{\frac{\ln\left|\frac{1}{35}\right| + 4\pi i}{-3}} \tag{16}$$

где

$$\text{M}(1;s;r;z) = 1 + z + \sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{z^t}{t!}\prod_{j=1}^{t-1}(1 + st - rj)\right) \tag{17}$$

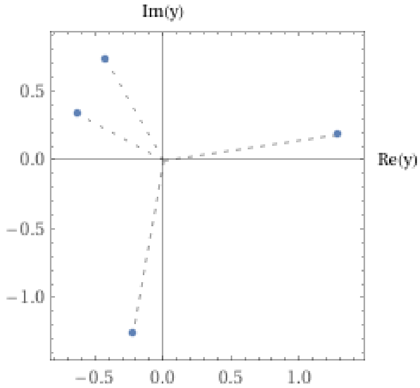
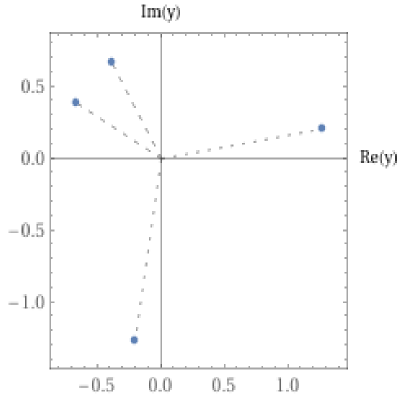
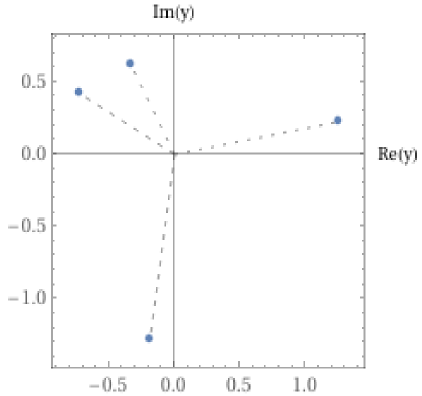
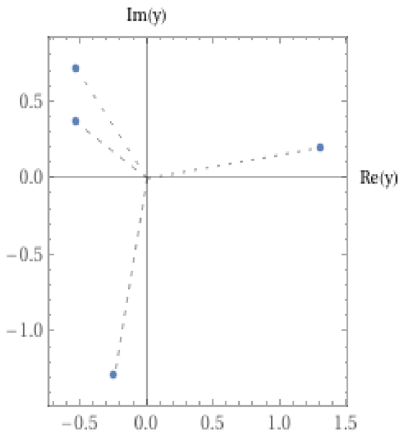
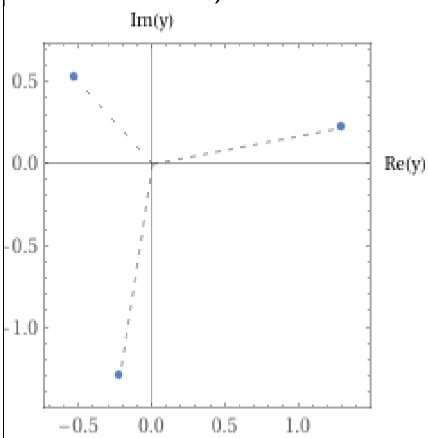
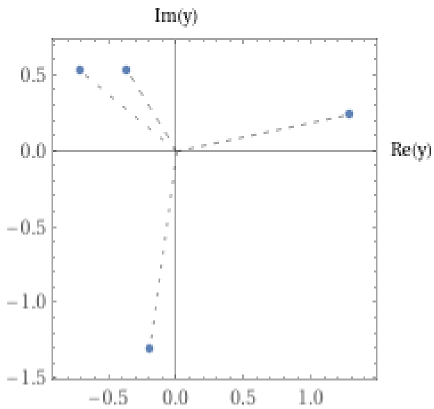
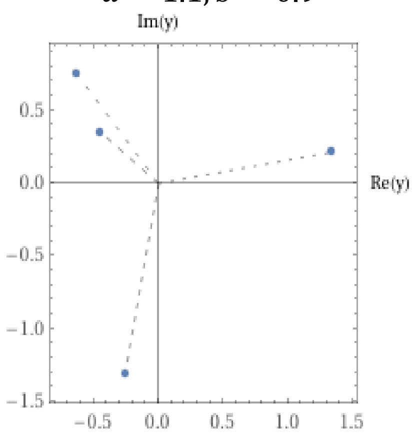
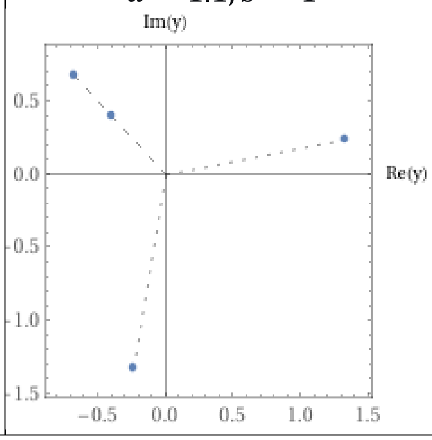
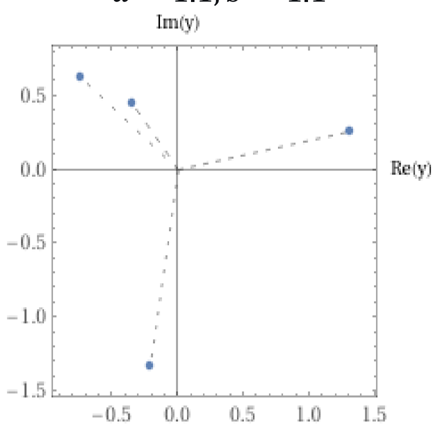
так как её параметр «v» попадает в сектор, соответствующий исходной ветви.

Пример 2: аргументы продолжений лежат на границе секторов (r=4, s=1, $\arg(x) = \frac{\pi i}{4}$)

Рассмотрим ультрарадикал $\sqrt[n;4;1]{x}$, являющийся решением уравнения $y^4 = 1 + 4xy$. При таких значениях «x» когда два корня приближаются к точке их пересечения.

Таблица 1

$$x = aRe^{b\frac{\pi i}{4}}$$

<table>
<tr><td>$a = 0.9, b = 0.9$

</td><td>$a = 0.9, b = 1$

</td><td>$a = 0.9, b = 1.1$

</td></tr>
<tr><td>$a = 1, b = 0.9$

</td><td>$a = 1, b = 1$

</td><td>$a = 1, b = 1.1$

</td></tr>
<tr><td>$a = 1.1, b = 0.9$

</td><td>$a = 1.1, b = 1$

</td><td>$a = 1.1, b = 1.1$

</td></tr>
</table>

При a<1, все корни устойчиво определяются исходными рядами

При a = 1 и b = 1, наблюдается точка бифуркации - два корня совпадают

При a ≥ 1 происходит перераспределение ветвей по секторам (см. пример 1)

При a > 1 и b = 1, требует сравнения модулей корней для определения правильного продолжения

4. **Обобщения**

4.1. Уравнения с произвольными коэффициентами

$$pu^r = q + zu^s \tag{18}$$

Сделаем замену $u = y\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{r}}, z = qx\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{s}{r}}$

$$qy^r = q + qxy^s \tag{19}$$

$$y^r = 1 + xy^s \tag{20}$$

4.2. Уравнения с произвольным количеством членов

$$py^r = q + x_1 y^{s_1} + x_2 y^{s_2} + \cdots \tag{21}$$

Такие уравнения решаются с помощью слияния нескольких ультрарадикалов.

$$y = v \cdot {}^{\frac{1}{r};s_1,s_2,\cdots}_{\frac{x_1 v^{s_1}}{rq},\frac{x_2 v^{s_2}}{rq},\dots},\ \ v = \sqrt[r]{\left|\frac{q}{p}\right|}\,e^{\frac{\left(\arg\left(\frac{q}{p}\right)+2\pi n\right)i}{r}}, n \in Z \tag{22, 23}$$

Операция слияние мастер-рядов будет подробно рассмотрена в приложениях.

Заключение

В данной работе представлен последовательный подход к решению фундаментальной проблемы анализа — обеспечению непрерывности ветвей многозначной функции при её аналитическом продолжении за радиус сходимости степенного ряда.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Для ультрарадикала $\sqrt[n;r;s]{x}$ – решения уравнения $y^r = 1 + rxy^s$ – предложен **геометрический критерий** выбора ветвей. Критерий основан на секторной структуре единичной окружности, определяемой параметром r, и гарантирует непрерывность корня при переходе через круг $|x| = R = \frac{|1-r/s|^{\frac{s}{r}}}{|s-r|}$.

2. Разработан и протестирован на примерах **детерминированный алгоритм** аналитического продолжения, включающий стандарт для разрешения неоднозначностей в вырожденных случаях (на границах секторов).

3. Показано, что метод допускает **естественное обобщение** на уравнения с произвольными коэффициентами и количеством членов, что открывает путь к его применению для более широкого класса трансцендентных уравнений.

Перспективы дальнейших исследований видятся в применении предложенного алгоритма к задачам математической физики и динамическим системам, где непрерывность ветвей часто имеет принципиальное значение, а также в строгом обосновании области его применимости для уравнений с произвольным количеством членов.

Приложение A. Получение мастер-ряда

Дано уравнение:

$$y^r = 1 + rxy^s \tag{24}$$

Будем искать решение в виде степенного ряда:

$$y = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \tag{25}$$

Подстановка ряда в уравнение

Разложим левую часть $\boldsymbol{y^r}$ с помощью биномиального разложения:

$$y^r = 1 + ra_1x + \left(ra_2 + \frac{r(r-1)}{2}{a_1}^2\right)x^2 + \left(ra_3 + r(r-1)a_1a_2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{6}{a_1}^3\right)x^3 + \cdots \tag{26}$$

Разложим правую часть $1 + rxy^s$:

$$y^s = 1 + sa_1x + \left(sa_2 + \frac{s(s-1)}{2}{a_1}^2\right)x^2 + \left(sa_3 + s(s-1)a_1a_2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}{a_1}^3\right)x^3 + \cdots \quad (27)$$

$$1 + rxy^s = 1 + rx + rsa_1x^2 + \left(rsa_2 + \frac{rs(s-1)}{2}{a_1}^2\right)x^3 + \cdots \quad (28)$$

Приравнивание коэффициентов

При x:

$$ra_1 = r \Longrightarrow a_1 = 1 \quad (29)$$

При x^2:

$$ra_2 + \frac{r(r-1)}{2} = rs \quad (30)$$

$$a_2 = s - \frac{r-1}{2} = \frac{1+2s-r}{2} \quad (31)$$

При x^3:

$$ra_3 + r(r-1)a_2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{6} = rsa_2 + \frac{rs(s-1)}{2} \quad (32)$$

Подставляем $a_2 = \frac{1+2s-r}{2}$

$$a_3 = \frac{(1+3s-r)(1+3s-2r)}{3!} \quad (33)$$

При x^4:

$$a_4 = \frac{(1+4s-r)(1+4s-2r)(1+4s-3r)}{4!} \quad (34)$$

Общая формула коэффициентов

Общий член ряда имеет вид:

$$a_t = \frac{\prod_{j=1}^{t-1}(1+st-rj)}{t!} \quad (35)$$

Таким образом, решение уравнения $y^r = 1 + rxy^s$ выражается степенным рядом:

$$y = 1 + x + \sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{x^t}{t!}\prod_{j=1}^{t-1}(1 + st - rj)\right) \quad (36)$$

Введём единое обозначение M(m; s; r; x) для мастер-ряда

$$\mathrm{M}(m; s; r; x) = m + x + \sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{x^t}{t!}\prod_{j=1}^{t-1}(m + st - rj)\right) = m + x + (m + 2s - r)\frac{x^2}{2} + (m + 3s - r)(m + 3s - 2r)\frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (37)$$

Получим тождество неизвестной, её уравнения и мастер-ряда:

$$y = (1 + rxy^s)^{\frac{1}{r}} = \mathrm{M}(1; s; r; x) \quad (38)$$

Приложение B. **Получение других канонических мастер-уравнений при обнулении параметров**

Если в тождестве $y = (1 + rxy^s)^{\frac{1}{r}} = \mathrm{M}(1; s; r; x)$, s=0, то получается степенной ряд корня степени «r»

$$y = (1 + rx)^{\frac{1}{r}} = \mathrm{M}(1; 0; r; x) = 1 + x + (1 - r)\frac{x^2}{2} + (1 - r)(1 - 2r)\frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (39)$$

Если в тождестве $y = (1 + rxy^s)^{\frac{1}{r}} = \mathrm{M}(1; s; r; x)$, r=0, то получим степенной ряд корня другого уравнения

$$\lim_{r\to 0} y = \lim_{r\to 0}(1 + rxy^s)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r\to 0} \mathrm{M}(1; s; r; x) \quad (40)$$

$$y = e^{xy^s} = \mathrm{M}(1; s; 0; x) = 1 + x + (1 + 2s)\frac{x^2}{2} + (1 + 3s)(1 + 3s)\frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (41)$$

При r=0, s=0

$$y = e^x = \mathrm{M}(1; 0; 0; x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (42)$$

Мы получили степенные ряды корней четырёх разных уравнений через мастер-ряд с первым параметром m=1:

$$y = e^x = \mathrm{M}(1;0;0;x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (43)$$

$$y = e^{xy^s} = \mathrm{M}(1;s;0;x) = 1 + x + (1+2s)\frac{x^2}{2} + (1+3s)(1+3s)\frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (44)$$

$$y = (1+rx)^{\frac{1}{r}} = \mathrm{M}(1;0;r;x) = 1 + x + (1-r)\frac{x^2}{2} + (1-r)(1-2r)\frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (45)$$

$$y = (1+rxy^s)^{\frac{1}{r}} = \mathrm{M}(1;s;r;x) = 1 + x + (1+2s-r)\frac{x^2}{2}$$

$$+(1+3s-r)(1+3s-2r)\frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (46)$$

Заменим неизвестные «y» на e^y и прологарифмируем две левые части этих уравнений, в первый параметр мастер-ряда «m» подадим значение 0. Получим степенные ряды корней ещё четырёх уравнений.

$$y = x = \mathrm{M}(0;0;0;x) = x \quad (47)$$

$$y = xe^{sy} = \mathrm{M}(0;s;0;x) = x + (2s)\frac{x^2}{2} + (3s)(3s)\frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (48)$$

$$y = \frac{\ln(1+rx)}{r} = \mathrm{M}(0;0;r;x) = x + (-r)\frac{x^2}{2} + (-r)(-2r)\frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (49)$$

$$y = \frac{\ln(1+rxe^{sy})}{r} = \mathrm{M}(0;s;r;x) = x + (2s-r)\frac{x^2}{2} + (3s-r)(3s-2r)\frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (50)$$

Три измерения (три параметра) мы раскладываем в двумерную таблицу, используя в качестве третьего измерения чётность и нечётность столбцов. Для удобства ссылок в тексте назначим ячейкам таблицы мастер-уравнений краткие буквенные имена.

Таблица 2

Короткая таблица канонических мастер-уравнений

$y = x$ mo'so'ro	$y = xe^{sy}$ mo'sa'ro	$y = \frac{\ln(1+rx)}{r}$ mo'so'ra	$y = \frac{\ln(1+rxe^{sy})}{r}$ mo'sa'ra	$m = 0$
$y = e^x$ ma'so'ro	$y = e^{xy^s}$ ma'sa'ro	$y = (1+rx)^{\frac{1}{r}}$ ma'so'ra	$y = (1+rxy^s)^{\frac{1}{r}}$ ma'sa'ra	$m = 1$
	$s \neq 0$	$r \neq 0$	$r \neq 0, s \neq 0$	

Все эти канонические уравнения решает один единый мастер-ряд. Нулевые значения параметров m, s, r в мастер-ряде обозначаются буквой «o» в соответсвующем слоге. Суффиксы указывают на значения коэффициентов уравнений p и q:

- one: p = 1 и q = 1 (единичные коэффициенты)
- gen: p ≠ 1 и/или q ≠ 1 (обобщённые коэффициенты)

Приложение C. **Тождества мастер-рядов**

1. Мы уже знаем первое тождество M(1;s;r;x)=exp(M(0;s;r;x))

2. Тождество масштабирования $\mathrm{c} \cdot \mathrm{M}(0;s;r;x) = \mathrm{M}(0;s/c;r/c;cx)$ проверяется через степенной ряд

$$\mathrm{c} \cdot \mathrm{M}(0;s;r;x) = cx + (2s/c - r/c)\frac{(cx)^2}{2} + (3s/c - r/c)(3s/c - 2r/c)\frac{(cx)^3}{3!} + \cdots \quad (51)$$

3. Из второго тождества через первое можно получить степенное тождество

$$\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(1;s;r;x) = \mathrm{M}(1;s/c;r/c;cx) \quad (52)$$

4. Дифференциальное тождество получается при сравнении производной логарифма и степенной функции.

$$\frac{d\mathrm{M}(1;s;r;x)}{dx} = \mathrm{M}(1;s;r;x)\frac{d\mathrm{M}(0;s;r;x)}{dx} \quad (53)$$

$$\mathrm{M}(1;s;r;x) = \frac{d\mathrm{M}(1;s;r;x)}{d\ln\mathrm{M}(1;s;r;x)} = \frac{de^{\mathrm{M}(0;s;r;x)}}{d\mathrm{M}(0;s;r;x)} = e^{\mathrm{M}(0;s;r;x)} \quad (54)$$

5. Изокоренное тождество мастер-ряды наследуют от мастер-чисел. О них мы расскажем перед операцией слияния степенных рядов.

$$\mathrm{M}(m;s;r;x)=\mathrm{M}(m;s-r;-r;x) \quad (55)$$

6. Тождества между одним мастером и слиянием можно получить из различных преобразований мастер-уравнений. Например,

$$y=ve^{xy^s}=v\cdot\mathrm{M}(1;s;0;xv^s) \quad (56)$$

$$y=e^{xy^s+\ln v}=\mathrm{M}(1;s,0;0;x,\ln v) \quad (57)$$

Следовательно

$$\mathrm{M}(1;s,0;0;x,\ln v)=v\cdot\mathrm{M}(1;s;0;xv^s) \quad (58)$$

7. Тождество от арксинусов

$$\mathrm{M}(0;1;2;x)=x+(3-2)(3-4)\frac{x^3}{3!}+(5-2)(5-4)(5-6)(5-8)\frac{x^5}{5!}+\cdots \quad (59)$$

$$\mathrm{M}(0;1;2;-x)=-x-(3-2)(3-4)\frac{x^3}{3!}-(5-2)(5-4)(5-6)(5-8)\frac{x^5}{5!}+ \quad (60)$$

$$\mathrm{M}(0;1;2;x)=-\mathrm{M}(0;1;2;-x) \quad (61)$$

8. Тождество от корней квадратного уравнения

$$\mathrm{M}(1;1;2;x)=\frac{1}{\mathrm{M}(1;1;2;-x)} \quad (62)$$

Приложение D. **Общий вид мастер-уравнений**

В таблице 2 показаны канонические (единичные 'one) виды мастер-уравнений. Любой их общий вид ('gen) можно привести к каноническому виду.

Например, трёхчлен ma'sa'ro'gen

$$pu=qe^{zu^s} \quad (63)$$

Сделаем замену $u=y\frac{q}{p}, z=x\left(\frac{p}{q}\right)^s$, получим ma'sa'ro'one

$$y=e^{xy^s} \quad (64)$$

Почти такую же замену можно сделать чтобы привести трёхчлен ma'sa'ra'gen к его каноническому виду ma'sa'ra'one

$$pu^r=q+zu^s \quad (65)$$

Сделаем замену $u=y\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{r}}, z=qx\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{s}{r}}$

$$qy^r=q+qxy^s \quad (66)$$

$$y^r=1+xy^s \quad (67)$$

Совершенно разные виды многочленов, имеют практически одинаковое решение через мастер-ряд. Единственное отличие заключается в том, что $\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{r}}$ имеет r корней.

Корень ma'sa'ro'gen:

$$y=ve^{xy^s}=v\cdot\mathrm{M}(1;\ s;\ 0;\ z),\ z=xv^s \quad (68, 69)$$

Корни ma'sa'ra'gen:

$$py^r=q+xy^s \quad 70)$$

$$y=v\cdot\mathrm{M}(1;\ s;\ r;\ z),\ z=\frac{xv^s}{rq}m \quad (71, 72)$$

$$v=e^{\frac{\ln\left|\frac{q}{p}\right|+\left(\arg\left(\frac{q}{p}\right)+2\pi n\right)i}{r}} \quad (73)$$

$$n\in Z$$

Уравнения ma'gen можно преобразовать в уравнения mo'gen, заменив неизвестную на экспоненту от неё.

$$pu^r=q+xu^s \quad (74)$$

$$u=e^y$$

$$pe^{ry} = q + xe^{sy} \quad (75)$$

Уравнение гиперболического арксинуса это уравнение mo'1'2'one

$$e^{2y} = 1 + 2xe^{y} \quad (76)$$

Его корни - это логарифмы (значит бесконечное разветвление) корней квадратного уравнения ma'1'2'one

$$y^2 = 1 + 2xy \quad (77)$$

$$\mathrm{Arcsinh}\, x = \mathrm{Ln}\, y \quad (78)$$

Уравнение ma'sa'ro таким же образом можно привести к уравнению mo.

$$u = e^{xu^s} \quad (79)$$

$$u = e^{y} \quad (80)$$

$$e^{y} = e^{xe^{sy}} \quad (81)$$

$$y = xe^{sy} \quad (82)$$

При s=-1, получим уравнение функции Ламберта ma'-1'ro'one

$$y = xe^{-y} = \mathrm{M}(0;-1;0;x) \quad (83)$$

Приложение E. **Радиус сходимости мастер-ряда**

Степенной ряд $\mathrm{M}(m;s;r;x) = m + \sum_{t=1}^{\infty} a_t x^t$, где

$$a_t = \frac{\prod_{j=1}^{t-1}(m+st-rj)}{t!} \quad (84)$$

имеет радиус сходимости R, определяемый через асимптотику коэффициентов по формуле Коши–Адамара:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{t\to\infty} |a_t|^{\frac{1}{t}} \quad (85)$$

При $t \Longrightarrow \infty$ главный вклад даёт множитель $\prod_{j=1}^{t-1}(st-rj)$, так как m постоянно. Заменяя сумму на интеграл:

$$\ln|a_t| \sim t\int_0^1 \ln|s-ru|du - (t\ln t - t) + o(t) \quad (86)$$

Интеграл вычисляется аналитически:

$$I = \int_0^1 \ln|s-ru|du = \frac{s\ln|s| - (s-r)\ln|s-r|}{r} - 1 \;\; (r \neq 0) \quad (87)$$

Тогда

$$ln|a_t| \sim t[I+1] - t\ln t + o(t) \quad (88)$$

$$|a_t|^{\frac{1}{t}} \sim e^{I} \quad (89)$$

Следовательно,

$$R = e^{-I} = |s|^{\frac{-s}{r}} \cdot |s-r|^{\frac{s-r}{r}} = \frac{|1-r/s|^{\frac{s}{r}}}{|s-r|}, r \neq 0, s \neq r \quad (90)$$

$$R = \frac{1}{|se|}, r = 0 \quad (91)$$

$$R = \frac{1}{|r|}, s = 0 \quad (92)$$

M(m;s;r;x) сходится, если |x|<|R|

Если s/r комплексное число, то для правильного определения R, брать нужно только главную ветвь комплексного логарифма при вычислении комплексной степени.

Приложение F. **Изокоренные мастер-уравнения**

! Два разных мастер-уравнения называются изокоренными, если они имеют одинаковое множество решений.

Например, если мастер-уравнение ma'so'ra $y^r = 1 + rx, y = \mathrm{M}(1;0;r;x)$ разделить на y^r, получится мастер-уравнение ma'sa'ra $y^{-r} = 1 - rxy^{-r}, y = \mathrm{M}(1;-r;-r;x)$. Согласно тождеству $\mathrm{M}(1;s;r;x) = \mathrm{M}(1;s-r;-r;x)$, в обоих случаях получим одинаковые корни.

Поэтому в уравнениях ma'sa'ra иногда нужно показывать равны ли параметры r и s. Если нужно показать, что равны, используется гласная e - equal ma'se'ra, если нужно показать что они неравны нулю и друг другу, u - unequal ma'su'ra.

Приложение G. **Аналитические продолжения рядов (сопряжённые мастер-ряды)**

Радиус сходимости экспоненты, синусов и косинусов, бесконечен. Биномиальный ряд имеет ограниченное количество членов, так как все последующие члены мастер-ряда равны нулю. Поэтому вопрос о сходимости для данного ряда неактуален.

$$(1+x)^r = \mathrm{M}(1;0;1/r;rx)\ ,\ r \in N \tag{93}$$

$$\mathrm{M}(1;0;1/2;2x) = 1+2x+\frac{4x^2}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{8x^3}{3!}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{2}\right) = 1+2x+x^2 \tag{94}$$

$$\mathrm{M}(1;0;1/3;3x) = 1+3x+\frac{9x^2}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{27x^3}{3!}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)+0+0+\cdots \tag{95}$$

В остальных функциях вопрос об ограниченности радиуса сходимости, важен. Когда один степенной ряд сходится в области, где исходный ряд расходится, и совпадает с исходной функцией в общей области сходимости — это называется аналитическим продолжением.

Мастер-ряд M(m;s;r;x) некоторой функции сходится при |x|<|R|, где R задаётся формулой $\frac{|1-r/s|^{\frac{s}{r}}}{|s-r|}$. При |x|>|R| исходный ряд расходится, функция представляется аналитическим продолжением в виде альтернативного мастер-ряда M(m′;s′;r′;x′) с другими параметрами и независимым аргументом, сходящегося в требуемой области. Например, для натурального логарифма ln(x) (от вещественного положительного «x») при 0<x<1 справедливо разложение M(0;0;1;x-1), а при x>1 — его аналитическое продолжение M(0;0;-1;(x-1)/x).

! Два или более мастер-ряда, представляющие одно и то же решение уравнения в разных областях комплексной плоскости, называются сопряжёнными.

Рассмотрим уравнение корня любой степени r, в том числе и комплексной от любого числа x.

$$y = x^{\frac{1}{r}} \tag{96}$$

«y» определяется через модуль «x» и имеет множество ветвей

$$x^{\frac{1}{r}} = |x|^{\frac{1}{r}} e^{\frac{(\arg(x)+2\pi n)i}{r}}, n \in \mathrm{Z} \tag{97}$$

От модуля «x», то есть в положительной области чисел, мы уже можем получить корень любой (в том числе и комплексной) степени r через мастер-ряд $|x|^{\frac{1}{r}} = \mathrm{M}\left(1;0;r;\frac{|x|-1}{r}\right)$, но только если $|x| \le 2$. Если $|x| > 1$ нужно взять сам «x» в степень -1, и степень корня «r» умножить на -1, чтобы получить сопряжённый мастер-ряд, который сойдётся в данной комплексной области ($|x| \ge 1$).

$$|x^{-1}|^{\frac{1}{-r}} = \mathrm{M}\left(1;0;-r;\frac{|x^{-1}|-1}{-r}\right) \tag{98}$$

$$y = x^{\frac{1}{r}} = \mathrm{M}\left(1;0;hr;\frac{|x^h|-1}{hr}\right) e^{\frac{(\arg(x)+2\pi n)i}{r}}, n \in \mathrm{Z}, \begin{cases} h = 1, |x| < 1 \\ h = -1, |x| \ge 1 \end{cases} \tag{99, 100}$$

Уравнение гиперболического арксинуса имеет 2 корня, каждый из которых имеет бесконечное количество ветвей. Каждый корень определяется одним из сопряжённых мастер-рядов, в зависимости от значения независимого аргумента. Преобразуем это mo'1'2'one уравнение в уравнение ma'1'2'one.

$$e^{2u} = 1 + 2we^u \tag{101}$$

$$u = \ln y \tag{102}$$

$$y^2 = 1 + 2wy \tag{103}$$

$$y^2 - 2wy - 1 = 0 \tag{104}$$

Используем метод решения ma'su'ra'gen.

$$\mathrm{A}y^a + By^b + C = 0 \tag{105}$$

$$a \neq b$$

Существует 6 способов преобразовать исходное уравнение в мастер-уравнение. 2 способа используют только перестановку членов уравнения. 4 способа, на жёлтом фоне используют деление всего уравнения на неизвестную в определённой степени. Если одна из степеней дробная, лучше выбирать тот способ, где деление было на неизвестную в целой степени.

Таблица 2

Изокоренные пары мастер-уравнений ma'sa'ra'gen

$\mathrm{A}y^a = -\mathrm{C} - By^b \quad (1a)$	$Cy^{-a} = -\mathrm{A} - By^{b-a} \quad (1b)$
$By^{b-a} = -\mathrm{A} - Cy^{-a} \quad (2a)$	$\mathrm{A}y^{a-b} = -B - Cy^{-b} \quad (2b)$
$Cy^{-b} = -B - \mathrm{A}y^{a-b} \quad (3a)$	$By^b = -C - \mathrm{A}y^a \quad (3b)$

Для решения трёхчленного уравнения достаточно трёх мастер-уравнений – остальные три являются их зеркальными отражениями и дают те же корни.

Для любого из этих шести преобразований существует один метод решений.

$py^r = q + xy^s$ (106)

$$y = v \cdot \mathrm{M}(1; s; r; z)\,,\ z = \frac{xv^s}{rq},\ v = e^{\frac{\ln\left|\frac{q}{p}\right| + \left(\arg\left(\frac{q}{p}\right) + 2\pi n\right)i}{r}}, n \in Z \tag{107, 108, 109}$$

Если степени «a» и «b» вещественные, положительные, и $a > b$ можно использовать простой алгоритм выбора преобразования исходного уравнения в мастер-уравнение.

$$T = \left|\frac{b}{A}\right|^b \left|\frac{B}{a}\right|^a \left|\frac{a-b}{C}\right|^{a-b} \tag{110}$$

Если T<1, все корни определяются через уравнение 1a (или 1b). Иначе степенной ряд от этих уравнений будет расходиться. Нужно использовать уравнения 2 и 3, a-b корней определяются через уравнение 2, и ещё b корней определяются через уравнение 3.

Если степени комплексные, то для каждого «n», всех троих мастер-уравнений нужно проверять сходимость через |R|. В примере с гиперболическим арксинусом

$$\mathrm{R} = \frac{|1 - r/s|^{\frac{s}{r}}}{|s-r|} = \frac{|1-2/1|^{\frac{1}{2}}}{|2-1|} = 1 \tag{111}$$

При T<1, оба корня квадратного уравнения определяются через мастер-уравнение

$$\mathrm{A}y^2 = -C - By \tag{112}$$

Которое решается методом ma'su'ra'gen

$$py^r = q + xy^s \tag{113}$$

$$y = v \cdot \mathrm{M}(1; s; r; z)\,,\ z = \frac{xv^s}{rq},\ v = e^{\frac{\ln\left|\frac{q}{p}\right| + \left(\arg\left(\frac{q}{p}\right) + 2\pi n\right)i}{r}}, n \in Z \tag{114, 115, 116}$$

P=A, r=2, q=-C, x=-B, s=1 (117)

$$y = v\,\mathrm{M}(1; 1; 2; z),\ z = \frac{Bv}{2C},\ v = \frac{\ln\left|\frac{C}{A}\right| + \left(\arg\left(\frac{-C}{A}\right) + 2\pi n\right)i}{2}, n \in Z \tag{118, 119, 120}$$

При n=0, $v = 1, z = w$

При n=1, $v = -1, z = -w$

Используем тождество

$$\mathrm{M}(1; 1; 2; w) = \frac{1}{\mathrm{M}(1;1;2;-w)} \tag{121}$$

При n=0,

$$\mathrm{y}_0 = \mathrm{M}(1; 1; 2; w) \tag{122}$$

При n=1,

$$y_1 = -\frac{1}{\mathrm{M}(1;1;2;w)} = -\frac{1}{y_0} \tag{123}$$

При $|w| \geq 1$, степенной ряд одного корня сойдётся при преобразовании (2) $By^{b-a} = -\mathrm{A} - Cy^{-a}$, степенной ряд другого корня сойдётся при преобразовании (3) $Cy^{-b} = -B - \mathrm{A}y^{a-b}$.

при преобразовании (2)

$$By^{b-a} = -\mathrm{A} - Cy^{-a} \tag{124}$$

$$2wy^{-1} = 1 - y^{-2} \tag{125}$$

Используем метод ma'su'ra'gen(h)

$$py^r = q + xy^s \tag{126}$$

$$y = v \cdot \mathrm{M}(1; s; r; z)\,,\ z = \frac{xv^s}{rq},\ v = e^{\frac{\ln\left|\frac{q}{p}\right| + \left(\arg\left(\frac{q}{p}\right) + 2\pi h\right)i}{r}}, h \in Z \quad (127, 128, 129)$$

$$y = v \cdot \mathrm{M}(1; -2; -1; z)\,,\ z = v^{-2},\ v = 2w \quad \textit{(130)}$$

при преобразовании (3)

$$Cy^{-b} = -B - \mathrm{A}y^{a-b} \tag{131}$$

$$y^{-1} = -2w + y^1 \tag{132}$$

Используем метод ma'su'ra'gen(H)

$$py^r = q + xy^s \tag{133}$$

$$y = v \cdot \mathrm{M}(1; s; r; z)\,,\ z = \frac{xv^s}{rq},\ v = e^{\frac{\ln\left|\frac{q}{p}\right| + \left(\arg\left(\frac{q}{p}\right) + 2\pi H\right)i}{r}}, H \in Z \quad (134, 135, 136)$$

$$y = v \cdot \mathrm{M}(1; 1; -1; z)\,,\ z = \frac{v}{2w},\ v = -\frac{1}{2w} \quad (137, 138, 139)$$

Мы получили аналитическое продолжение двух корней уравнения $y^2 - 2wy - 1 = 0$, когда $|w| \geq 1$.

$$y(h) = 2w \cdot \mathrm{M}\left(1; -2; -1; \frac{1}{4w^2}\right) \tag{140}$$

и

$$y(H) = -\frac{1}{2w} \cdot \mathrm{M}\left(1; 1; -1; -\frac{1}{4w^2}\right) \tag{141}$$

Итого, мы получили 2 пары степенных рядов для $|w| < 1$

$$y_0 = \mathrm{M}(1; 1; 2; w) \tag{142}$$

$$y_1 = -\mathrm{M}(1; 1; 2; -w) \tag{143}$$

и 2 пары степенных рядов для $|w| \geq 1$

$$y(h) = 2w \cdot \mathrm{M}\left(1; -2; -1; \frac{1}{4w^2}\right) \tag{144}$$

$$y(H) = -\frac{1}{2w} \cdot \mathrm{M}\left(1; 1; -1; -\frac{1}{4w^2}\right) \tag{145}$$

которые являются корнями квадратного уравнения

$$y^2 - 2wy - 1 = 0 \tag{146}$$

Выбор корня h и H осуществляется методом секторов (см. раздел 2).

! Таким образом, полное решение уравнения - это не один ряд, а сеть сопряжённых рядов, связанных преобразованиями и покрывающих всю комплексную плоскость для каждой ветви многозначной функции.

Разложение гиперболического арксинуса.

$$\ln \mathrm{M}(1; s; r; w) = \mathrm{M}(0; s; r; w) \tag{147}$$

$$\mathrm{Arsinh}_0(w) = \mathrm{Ln}(y_0) = \mathrm{M}(0; 1; 2; w) + 2\pi k i, k \in Z \tag{148}$$

$$\mathrm{M}(0; 1; 2; w) = w + (3-2)(3-4)\frac{w^3}{3!} + (5-2)(5-4)(5-6)(5-8)\frac{w^5}{5!} + \cdots \tag{149}$$

$$\ln \mathrm{M}\left(1; -2; -1; \frac{1}{4w^2}\right) = \mathrm{M}\left(0; -2; -1; \frac{1}{4w^2}\right) \tag{150}$$

$$\mathrm{Arsinh}_h(w) = \mathrm{Ln}(y_0) = \mathrm{Ln}(2w) + \mathrm{M}\left(0; -2; -1; \frac{1}{4w^2}\right) \quad (151)$$

Другие разложения

$$y_1 = -\mathrm{M}(1; 1; 2; -w) \quad (152)$$

$$\mathrm{Arsinh}_1(w) = \mathrm{Ln}(y_1) = \mathrm{M}(0; 1; 2; -w) + (\pi + 2\pi k)i, k \in Z \quad (153)$$

$$\mathrm{M}(0; 1; 2; -w) = -w - (3-2)(3-4)\frac{w^3}{3!} - (5-2)(5-4)(5-6)(5-8)\frac{w^5}{5!} + \cdots \quad (154)$$

Приложение Н. **Мастер-числа (обобщение факториалов и степеней)**

Мастер-число от t – это произведение множителей (m+st−rj). Их количество равно t−1. Поэтому при t<2 мастер-число возвращает 1. Мы будем обозначать мастер числа и в строчку (N), и коротким обозначением, как это принято в обозначениях различных обобщений факториалов, степеней и прочих чисел.

$$\mathrm{N}(m;\ s;\ r;\ t) = {}^{m}_{r}!^{s}_{t} = \prod_{j>0}^{j<t}(m + st - rj) \quad (155)$$

$${}^{m}_{r}!^{s}_{t} = (m + st - r)(m + st - 2r)\cdots\big(m + st - r(t-1)\big) \quad (156)$$

Важное тождество:

$${}^{m}_{r}!^{s}_{t} = (m + st - r)(m + st - 2r)\cdots\big(m + st - r(t-2)\big)\big(m + st - r(t-1)\big) \quad (157)$$

$${}^{m}_{-r}!^{s-r}_{t} = \big(m + st - r(t-1)\big)\big(m + st - r(t-2)\big)\cdots(m + st - 2r)(m + st - r) \quad (158)$$

Вывод:

N(m; s; r; t) = N(m; s-r; -r; t)

$${}^{m}_{r}!^{s}_{t} = {}^{m}_{-r}!^{s-r}_{t} \quad (159)$$

Примеры:

$${}^{1}_{-2}!^{0}_{4} = (1+2)(1+4)(1+6) = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$${}^{1}_{2}!^{2}_{4} = (1+8-2)(1+8-4)(1+8-6) = 7 \cdot 5 \cdot 3$$

Таблица 3

Примеры использования мастер-чисел

Гамма-функция	$\Gamma(t)$	${}^{0}_{1}!^{1}_{t}$	${}^{0}_{1}!^{1}_{3} = \Gamma(3) = 2 \times 1$
Факториал	$t!$	${}^{1}_{1}!^{1}_{t}$	${}^{1}_{1}!^{1}_{3} = 3! = 3 \times 2$
r-кратный факториал от n	$n!_{(r)}$	${}^{n-rt}_{r}!^{r}_{t+1}$	$\mathrm{t} = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$
Убывающий !	$(n)_k$	${}^{n+1}_{1}!^{0}_{k+1}$	$(5)_3 = {}^{6}_{1}!^{0}_{4} = 5 \times 4 \times 3$
Биномиальный коэф.	$\binom{n}{k}$	$\frac{{}^{n+1}_{1}!^{0}_{k+1}}{k!}$	$\binom{4}{2} = \frac{{}^{5}_{1}!^{0}_{3}}{2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$
Возрастающий !	$n^{(k)}$	${}^{n-1}_{1}!^{1}_{k+1}$	$3^{(3)} = {}^{2}_{1}!^{1}_{4} = 3 \times 4 \times 5$

Примеры тройного факториала от чисел 5, 6 , 7

$5!!! = 5!_{(3)} = {}^{5-3t}_{3}!^{3}_{t+1}, \mathrm{t} = \left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil = 2$

${}^{-1}_{3}!^{3}_{3} = (-1+9-3)(-1+9-6) = 5 \cdot 2$

$6!_{(3)} = {}^{6-3t}_{3}!^{3}_{t+1}, \mathrm{t} = \left\lceil \frac{6}{3} \right\rceil = 2$

${}^{0}_{3}!^{3}_{3} = (9-3)(9-6) = 6 \cdot 3$

$7!_{(3)} = {}^{7-3t}_{3}!^{3}_{t+1}, \mathrm{t} = \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil = 3$

${}^{-2}_{3}!^{3}_{4} = (-2+12-3)(-2+12-6)(-2+12-9) = 7 \cdot 4 \cdot 1$

Слияние мастер-чисел

$$\mathrm{N}(m;\ s_1;\ r;\ t_1)@\mathrm{N}(m;\ s_2;\ r;\ t_2)@\cdots = \mathrm{N}(m;\ s_1, s_2, \cdots;\ r;\ t_1, t_2, \cdots) =$$
$${}^{m}_{r}!^{s_1}_{t_1} @ {}^{m}_{r}!^{s_2}_{t_2} @ \cdots = {}^{m}_{r}!^{s_1,s_2,\cdots}_{t_1,t_2,\cdots} = \prod_{j=1}^{j<T}(m + S - rj), T = t_1 + t_2 + \cdots, S = s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots \quad (160)$$

Приложение I. **Добавление членов уравнений (операция слияния рядов)**

Слияние позволяет объединять ряды в единую структуру. Это необходимо для решения многокомпонентных уравнений, например

$$y = ve^{x_1 y^{s_1} + x_2 y^{s_2} + \cdots} = v \cdot {}^{1}_{0}:^{s_1, s_2, \dots}_{x_1 v^{s_1}, x_2 v^{s_2}, \dots} \tag{161}$$

или

$$py^r = q + x_1 y^{s_1} + x_2 y^{s_2} + \ldots = q \cdot {}^{1}_{1}:^{s_1/r, s_2/r, \cdots}_{\frac{x_1 (q/p)^{s_1/r}}{q}, \frac{x_2 (q/p)^{s_2/r}}{q}, \dots} \tag{162}$$

где каждому члену уравнения со своим независимым аргументом (x_n) нужен свой мастер-ряд.

Слияние (специальное умножение) степенных рядов производится также, как обычное умножение степенных рядов, когда каждый член одного ряда умножается на каждый член другого ряда, кроме таких множителей членов ряда, как мастер-числа.

Операцию слияния мастер-чисел невозможно заменить операциями сложения или умножения исходных чисел. В результате слияния получается монолит мастер-чисел, который используется в монолитах мастер-рядов и, возможно может быть использован в более сложных областях комбинаторики. Операция слияния обозначается символом @.

$${}^{m}_{r}!^{s_1}_{t_1} @ {}^{m}_{r}!^{s_2}_{t_2} @ \cdots = {}^{m}_{r}!^{s_1, s_2, \cdots}_{t_1, t_2, \cdots} = \prod_{j=1}^{j < t_1 + t_2 + \cdots} (m + s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots - rj) \tag{163}$$

Слияние (специальное умножение) функций выполняется перед всеми остальными операциями и применяется одновременно ко всем функциям или их степенным рядам, соединённым знаком @.

$$\mathrm{M}(m; s_1, s_2, \cdots; r; x_1, x_2, \cdots) = \mathrm{M}(m; s_1; r; x_1) @ \mathrm{M}(m;\ s_2; r;\ x_2) @ \cdots \tag{164}$$

При слиянии степенных рядов (m = 1)

$$\left(1 + \sum_{t_1=1}^{\infty} \frac{x_1^{t_1}}{t_1!} {}^{m}_{r}!^{s_1}_{t_1}\right) @ \left(1 + \sum_{t_2=1}^{\infty} \frac{x_2^{t_2}}{t_2!} {}^{m}_{r}!^{s_2}_{t_2}\right) @ \left(1 + \sum_{t_3=1}^{\infty} \frac{x_3^{t_3}}{t_3!} {}^{m}_{r}!^{s_3}_{t_3}\right) \tag{165}$$

каждый член одного ряда объединяется с каждым членом всех остальных рядов:

$$\left(\frac{x_1^{t_1}}{t_1!} {}^{m}_{r}!^{s_1}_{t_1}\right) @ \left(\frac{x_2^{t_2}}{t_2!} {}^{m}_{r}!^{s_2}_{t_2}\right) @ \left(\frac{x_3^{t_3}}{t_3!} {}^{m}_{r}!^{s_3}_{t_3}\right) = \frac{x_1^{t_1}}{t_1!} \frac{x_2^{t_2}}{t_2!} \frac{x_3^{t_3}}{t_3!} {}^{m}_{r}!^{s_1, s_2, s_3}_{t_1, t_2, t_3} \tag{166}$$

Особенности слияния членов:

1. Независимые дроби перемножаются.

2. Мастер-числа всех объединяемых членов образуют единый монолит, который невозможно получить простым умножением исходных мастер-чисел.

$${}^{m}_{r}!^{s_1, s_2, s_3}_{t_1, t_2, t_3} = \prod_{j=1}^{t_1 + t_2 + t_3 - 1} (m + s_1 t_1 + s_2 t_2 + s_3 t_3 - rj) \tag{167}$$

3. У степенных рядов (m=0) нулевой член равен нулю $w_0 = 0$. Слияние таких рядов производится по тем же правилам. Но, на время слияния нулевой член степенного ряда делаем равным 1. $w_0 = 1$. Когда слияние таких рядов будет завершено, от монолита нужно будет отнять 1.

4. Мастер-число от 1 всегда равен 1, независимо от параметров, так как количество мастер-множителей на 1 меньше t. Монолит первых членов уже не равен 1, так как сумма порядковых номеров этих членов больше 1.

$${}^{m}_{r}!^{s_1}_{1} = 1,\ {}^{m}_{r}!^{s_2}_{1} = 1,\ {}^{m}_{r}!^{s_3}_{1} = 1 \tag{168, 169, 170}$$

$${}^{m}_{r}!^{s_1}_{1} @ {}^{m}_{r}!^{s_2}_{1} = {}^{m}_{r}!^{s_1, s_2}_{1,1} = (m + s_1 + s_2 - r) \tag{171}$$

$${}^{m}_{r}!^{s_1}_{1} @ {}^{m}_{r}!^{s_2}_{1} @ {}^{m}_{r}!^{s_3}_{1} = {}^{m}_{r}!^{s_1, s_2, s_3}_{1,1,1} = (m + s_1 + s_2 + s_3 - r)(m + s_1 + s_2 + s_3 - 2r) \tag{172}$$

Для краткости введём обозначение мастер-ряда, аналогично обозначению мастер-чисел:

$$\mathrm{M}(m; s; r; x) = {}^{m}_{r}:^{s}_{x} \tag{173}$$

Слияние функций – это такая же распространённая в природе операция, как сложение и умножение. Например, биномиальный ряд можно расширить на любое количество членов, но и здесь используется операция слияния.

$$(1+x_1+x_2+\cdots)^r = {}^{1.0,0,\cdots}_{1/r\cdot rx_1,rx_2,\cdots}\ ,\ r\in N \tag{173}$$

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 = {}^{1.0}_{1/2\cdot x} = 1+x+\frac{x^2}{4} \tag{174}$$

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^3 = {}^{1.0}_{1/3\cdot x} = 1+x+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{27} \tag{175}$$

$$\left(1+\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)^2 = {}^{1.0,0}_{\substack{1\\ \frac{1}{2}}\cdot x_1,x_2} = \left(1+\frac{{x_1}^1}{1!}\,{}^{1}_{\substack{1\\ \frac{1}{2}}}!^{0}_{1}+\frac{{x_1}^2}{2!}\,{}^{1}_{\substack{1\\ \frac{1}{2}}}!^{0}_{2}\right)@\left(1+\frac{{x_2}^1}{1!}\,{}^{1}_{\substack{1\\ \frac{1}{2}}}!^{0}_{1}+\frac{{x_2}^2}{2!}\,{}^{1}_{\substack{1\\ \frac{1}{2}}}!^{0}_{2}\right)$$

$$= 1+\frac{{x_1}^1}{1!}\,{}^{1}_{\substack{1\\ \frac{1}{2}}}!^{0}_{1}+\frac{{x_1}^2}{2!}\,{}^{1}_{\substack{1\\ \frac{1}{2}}}!^{0}_{2}+\frac{{x_2}^1}{1!}\,{}^{1}_{\substack{1\\ \frac{1}{2}}}!^{0}_{1}+\frac{{x_2}^1}{1!}\frac{{x_1}^1}{1!}\,{}^{1}_{\substack{1\\ \frac{1}{2}}}!^{0,0}_{1,1}+\frac{{x_2}^2}{2!}\,{}^{1}_{\substack{1\\ \frac{1}{2}}}!^{0}_{2}$$

$$= 1+\frac{{x_1}^1}{1!}+\frac{{x_1}^2}{4}+\frac{{x_2}^1}{1!}+\frac{{x_1}^1{x_2}^1}{2}+\frac{{x_2}^2}{4} \tag{176}$$

Отсюда видно, что и мультиномиальные коэффициенты, это монолиты мастер-чисел. Но наиболее важное применение слиянию функций – это аналитическое решение многочленов любого рода, с любым количеством членов.

Наиболее подробно изучить операцию слияние можно из кода js [1] или на сайте http://glax-plato.ru/

Главная особенность монолитов заключается в том, что их применимость определяется не радиусом сходимости, как у одноядерных мастеров, а сравнением с модулем точек экстремума соответствующего им уравнения.

Решение многочленов третьего рода (алгебраические уравнения с любыми степенями в том числе и комплексными):

Трёхчлен → один мастер-ряд.

Четырёхчлен → слияние двух мастер-рядов (двухъядерный ряд).

Пятичлен → слияние трёх мастер-рядов (трёхъядерный ряд).

$$py^r = q+x_1y^{s_1}+x_2y^{s_2}+\cdots = q\cdot{}^{1.s_1/r,s_2/r,\cdots}_{1\cdot\frac{x_1(q/p)^{s_1/r}}{q},\frac{x_2(q/p)^{s_2/r}}{q},\cdots} \tag{177}$$

$$py^r = q+x_1y^{s_1}+x_2y^{s_2}+\cdots = p\left(v\cdot{}^{1.s_1,s_2,\cdots}_{r\cdot\frac{x_1v^{s_1}}{rq},\frac{x_2v^{s_2}}{rq},\cdots}\right)^r \tag{178}$$

$$y = v\cdot{}^{1.s_1,s_2,\cdots}_{r\cdot\frac{x_1v^{s_1}}{rq},\frac{x_2v^{s_2}}{rq},\cdots},\ v=\sqrt[r]{\left|\frac{q}{p}\right|}\,e^{\frac{\left(\arg\left(\frac{q}{p}\right)+2\pi n\right)i}{r}}, n\in Z \tag{179, 180}$$

Приложение J. **Корни других видов уравнений, через мастер-ряд**

$$e = {}^{1.0}_{0\cdot 1} \tag{181}$$

$$\exp(x) = {}^{1.0}_{0\cdot x} \tag{182}$$

$$\cos(x) = \overline{\overline{{}^{1.0}_{0\cdot ix}}};\ \ \sinh(x) = \overline{{}^{1.0}_{0\cdot x}} \tag{183, 184}$$

$$\overline{\overline{{}^{m.s}_{r\cdot x}}} = \frac{{}^{m.s}_{r\cdot x}+{}^{m.s}_{r\cdot -x}}{2};\ \ \overline{{}^{m.s}_{r\cdot x}} = \frac{{}^{m.s}_{r\cdot x}-{}^{m.s}_{r\cdot -x}}{2} \tag{185, 186}$$

$$\pi i = 4\overline{{}^{0.0}_{1\cdot i}} \tag{187}$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \overline{{}^{0.0}_{1\cdot x}} \tag{188}$$

$$\mathrm{LambertW}_0(x) = {}^{0.-1}_{0\cdot x} \tag{189}$$

$${}^{0.s}_{0\cdot x} = \frac{\mathrm{LambertW}_0(-sx)}{-s} \tag{190}$$

$$\ln(1+x) = {}^{0.0}_{1\cdot x},\ |x|<1 \tag{191}$$

Все элементарные и множество специальных функций используют мастер-ряд, его производные или интегралы, или их комбинации.

Например, составные мастер-ряды.

$$\sec x = M(1;1;1;1-\cos x) \tag{192}$$

$$\tan x = \sin x \cdot \mathrm{M}(1;1;1;1-\cos x) \tag{193}$$

Радиус сходимости косинуса бесконечен, но он находится в независимом аргументе геометрического ряда. Чтобы получить степенные ряды от x, нужно заменить синус и косинус на степенной ряд от них, раскрыть скобки и сгруппировать члены по x.

Слияние рядов даёт решения других видов уравнений. Например,

$$y = x \cdot \cos(sy) = \frac{x \cdot e^{syi} + x \cdot e^{-syi}}{2} = {}^{0}_{0}{:}^{si,-si}_{\frac{x}{2},\frac{x}{2}} \tag{194}$$

Для обозначения степенных рядов использующих интегралы мастер-ряда можно использовать пятую величину. Её значение показывает, сколько производных надо взять от данного ряда, чтобы получить мастер-ряд с данными параметрами.

$$\mathrm{M}(m;s;r;x) = {}^{m}_{r}{:}^{s}_{x} = m + x + \sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{x^t}{t!}\prod_{j=1}^{t-1}(m+st-rj)\right) = m + x + (m+2s-r)\frac{x^2}{2} + (m+3s-r)(m+3s-2r)\frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{195}$$

$$\mathrm{M}(m;s;r;x;1) = {}^{m}_{r}1^{s}_{x} = mx + \frac{x^2}{2} + \sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{x^{t+1}}{(t+1)!}\prod_{j=1}^{t-1}(m+st-rj)\right) = mx + \frac{x^2}{2} + (m+2s-r)\frac{x^3}{3!} + (m+3s-r)(m+3s-2r)\frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{196}$$

$$\mathrm{M}(m;s;r;x;2) = {}^{m}_{r}2^{s}_{x} = m\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{x^{t+2}}{(t+2)!}\prod_{j=1}^{t-1}(m+st-rj)\right) = m\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + (m+2s-r)\frac{x^4}{4!} + (m+3s-r)(m+3s-2r)\frac{x^5}{5!} + \cdots \tag{197}$$

Приложение K. **Связь с гипергеометрическими функциями**

1. Констатация различий в подходе

В то время как гипергеометрическая функция ${}_pF_q$ унифицирует решения линейных дифференциальных уравнений, мастер-ряд M(m;s;r;x) унифицирует решения алгебраических и трансцендентных уравнений степенного вида. Это **дополнительные, а не конкурирующие системы**.

2. Прямое сравнение на примере

Ряд для $\ln(1+x) = x\ {}_2F_1\ (1{,}1;2;-x)$ также представляется как

$$\mathrm{M}(0;0;1;x) = {}^{0}_{1}{:}^{0}_{x} = x + (-1)\frac{(x)^2}{2} + (-1)(-2)\frac{(x)^3}{3!} + \cdots \tag{198}$$

3. Операция слияния против обобщённых гипергеометрических функций

Операция слияния мастер-рядов $\mathrm{M}(1;s_1,s_2,\cdots;r;x_1,x_2,\cdots)$ для уравнения $py^r = q + x_1y^{s_1} + x_2y^{s_2} + \cdots$ не имеет прямого аналога в классе ${}_pF_q$, что делает метод Master-J более гибким для многомерных нелинейных уравнений.

4. Вывод

Таким образом, мастер-ряд не заменяет, а дополняет аппарат гипергеометрических функций, предлагая систематический подход к более широкому классу нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений.

Приложение L. **Сравнение с итерационными методами**

Пример решения алгебраического уравнения с конкретными числами.

$$y^7 + 0.01y^2 + 75 = 0 \tag{199}$$

$$y = v \cdot {}^{1}_{7}{:}^{2}_{\frac{0.01v^2}{7\cdot 75}},\ v = \sqrt[7]{|75|}e^{\frac{(\pi+2\pi n)i}{7}}, n \in Z \tag{200, 201}$$

$${}^{1}_{7}{:}^{2}_{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2}(5-7) + \frac{x^3}{3!}(7-7)(7-14) + \frac{x^4}{4!}(9-7)(9-14)(9-21) + \cdots$$

$$y = v \cdot (1 + x - x^2 + 5x^4 + \cdots) \tag{202}$$

$$x = \frac{0.01v^2}{7 \cdot 75},\ v = \sqrt[7]{|75|}e^{\frac{(\pi+2\pi n)i}{7}}, n \in Z \tag{203, 204}$$

$$n = 3$$

$$y = -1.8529593621474293(1 + .00006539920757657 - .00000000427705635 + 9.1e - 17 - \cdots)$$

Метод предоставляет точное решение уравнения 7-й степени при использовании всего двух мастер-чисел

Сравнение с итерациями Ньютона $y^7 + 0.01y^2 + 75 = 0$

Наблюдения:

Функция пересекает ноль один раз в области y∈[−2,−1].

Корень вещественный и отрицательный.

Выбор начального приближения

Вариант 1: Оценка через доминирующий член

−0.6 (близко к нулю):

Вариант 2: Метод грубой силы

Так как корень в [−2,−1], можно взять середину интервала:

$$y_0 = -1.5$$
$$y_1 = -2{,}2268931285139617$$
$$y_2 = -1{,}996666716798447$$
$$y_3 = -1{,}8806026533244693$$
$$y_4 = -1{,}854259946318774$$
$$y_5 = -1{,}8530827846625832$$
$$y_6 = -1{,}8530805363043588$$
$$y_7 = -1{,}853080536296174$$
$$y_8 = -1{,}8530805362961738$$

Остальные корни комплексные и «нащупывание» начальной точки производится ещё дольше.

Для формулы мастера нет разницы, вещественные корни или комплексные. Все определяются с одинаковой скоростью без поисков начальной точки. Точность до е-17 в данном случае достигнута всего двумя мастер-числами. На фоне восьми итераций Ньютона и ещё более долгим поиском начальной точки, это отличные показатели. Тем более, что в самих итерациях на каждом шаге надо было возводить очередное значение в седьмую, во вторую и в шестую степень.

Недостатки методов итераций.

Кроме количества итераций, скорость расчётов проигрывает и из-за их качества. Чтобы получить третье мастер-число, надо умножить всего два числа. А каждый шаг метода итераций требует возвести очередное значение сперва в одну степень, потом в другую, умножать их на коэффициенты уравнения, потом разделить всё это на производную...

Если степени в уравнении иррациональные или комплексные, в каждой итерации Ньютона придётся брать логарифм очередного приближения, потом экспоненту от него, то есть два степенных ряда на каждую неизвестную в формуле итераций. Другими словами, мастер-метод даёт готовый результат в 7 раз быстрее, чем одна итерация Ньютона.

Более подробные примеры изложены в статье [2].

Приложение М. **Дополнительные возможности параметра m**

Параметр m можно брать не только числами 0 и 1. Используя степенное тождество $M^m(1; s; r; x) = M(1; s/m; r/m; mx)$, получим степенной ряд, который позволяет степень m/r рассматривать иначе.

$$M^m(1;s;r;x) = M(1;s/m;r/m;mx) = 1 + m\left(x + \frac{x^2}{2}(m+2s-r) + \frac{x^3}{3!}(m+3s-r)(m+3s-2r) + \frac{x^4}{4!}(m+4s-r)(m+4s-2r)(m+4s-3r) + \cdots\right) \quad (205)$$

Например,

$$(1+rx)^{\frac{m}{r}} = M^m(1;0;r;x) = M(1;0;r/m;mx) = 1 + m\left(x + \frac{x^2}{2}(m-r) + \frac{x^3}{3!}(m-r)(m-2r) + \frac{x^4}{4!}(m-r)(m-2r)(m-3r) + \cdots\right) \quad (206)$$

$$(1+3*0.01)^{\frac{2}{3}} = M^2(1;0;3;0.01) = 1 + 2\left(0.01 + \frac{0.01^2}{2}(2-3) + \frac{0.01^3}{3!}(2-3)(2-6) + \frac{0.01^4}{4!}(2-3)(2-6)(2-9) + \cdots\right) = 1 + 0.02 - 0.0001 + \frac{0.000004}{3} - \frac{0.00000007}{3} + \cdots \quad (207)$$

Приложение N. **В каких случаях нужен 'паспорт' корням**

Рассмотрим уравнение, представляющее собой содержательную вычислительную проблему для классических методов:

$$y^{\frac{2}{3}} + 0.01y^{\frac{1}{2}} + 888 = 0 \quad (208)$$

Проблематика классических подходов

Итерационные методы (Ньютона) требуют выбора начальных приближений. Для комплексных корней, принадлежащих разным листам римановой поверхности, отсутствует систематическая процедура выбора таких приближений, что делает поиск полного множества решений эвристическим и не гарантирует его полноты.

Подстановка y = t^6, сводящая уравнение к многочлену 4-й степени $t^4 + 0.01t^3 + 888 = 0$, не разрешает фундаментальную проблему. Получив 4 корня t_k необходимо найти такие y=t^6 , корни t^(1/6) у которых будет согласованность ветвей для функций y^(2/3) (3 листа) и y^(1/2) (2 листа), что приводит к комбинаторной сложности и неоднозначности в идентификации корректных корней исходного уравнения.

Решение методом Master-J:

Метод Master-J решает это уравнение напрямую, без промежуточных подстановок и поиска начальных приближений. Его параметризация (m; s; r) и механизм ветвления

v = exp((ln|q/p| + (arg(q/p) + 2πn)i) / r) явным образом параметризуют всю риманову поверхность решения.

Практическая реализация для уравнения

$$y^{\frac{2}{3}} + 0.01y^{\frac{1}{2}} + 888 = 0 \quad (209)$$

Уравнение имеет вид

$$Ay^a + By^b + C = 0 \quad (210)$$

с параметрами: A=1, a=2/3, B=0.01, b=1/2, C=888

Поскольку все степени вещественные и выполняется условие $a > b > 0$ для выбора преобразования используем критерий:

$$T = \left|\frac{b}{A}\right|^b \left|\frac{B}{a}\right|^a \left|\frac{a-b}{C}\right|^{a-b} \approx 0.01 \quad (211)$$

Условие $T < 1$ выполняется, следовательно, все корни определяются через преобразование (1a) из Таблицы 2:

$$Ay^a = -C - By^b \quad (212)$$

Применяем метод **ma'sa'ra'gen**

$$py^r = q + xy^s \quad (213)$$

p=A, r=a, q=-C, x=-B, s=b

$$v = e^u, u = \frac{\ln\left|\frac{q}{p}\right| + \left(\arg\left(\frac{q}{p}\right) + 2\pi n\right)i}{r}, n \in Z \quad (214)$$

$$y = v \cdot M(1; s; r; z),\ z = \frac{xw}{rq}, w = e^{s(\ln|v| + (\arg(v) + 2\pi h)i)} \qquad (215, 216)$$

И 1/r, и s кратны 2, следовательно в обоих разветвлениях и n, и h, достаточно взять по две подряд идущие ветки. Будем в обоих разветвлениях брать ветки 0 и 1.

При n=0, Im(u)=4.71, значит $\mathrm{k} = \mathrm{ceil}\left(\frac{\mathrm{Im}(w)}{2\pi} - 0.5\right) = \left\lceil\frac{\mathrm{Im}(w)}{2\pi} - 0.5\right\rceil = 1$

При n=0, h=0, y=-51.5486495493939639 86-26513.219192658836251i (k=1,h=0)

При n=0, h=1, y=51.282249549394463986-26410.388847121027193i (k=1,h=1)

При n=1, Im(u)=14.14, значит $\mathrm{k} = \mathrm{ceil}\left(\frac{\mathrm{Im}(w)}{2\pi} - 0.5\right) = \left\lceil\frac{\mathrm{Im}(w)}{2\pi} - 0.5\right\rceil = 2$

При n=1, h=0, y=-51.548649549393963986+26513.219192658836251i (k=2,h=0)

При n=1, h=1, y=51.282249549394463986+26410.388847121027193i (k=2,h=1)

Вывод

Метод Master-J представляет собой не просто альтернативный вычислительный алгоритм, а **фундаментальный аналитический framework**. Он осуществляет переход от **эвристического поиска** решений, свойственного итерационным методам, к их **систематическому конструированию**.

В приведённом примере метод не только **гарантированно находит все корни** сложного уравнения, но и **сразу определяет соответствующие им ветви комплексного логарифма** k и h для проверки в исходном уравнении:

$$Ae^{a(\ln|y| + (\arg(y) + 2\pi k)i)} + Be^{b(\ln|y| + (\arg(y) + 2\pi h)i)} + C = 0 \qquad (217)$$

$$y^{\frac{2}{3}} + 0.01y^{\frac{1}{2}} + 888 = 0 \qquad (218)$$

$$e^{\frac{2(\ln|y| + (\arg(y) + 2\pi k)i)}{3}} + 0.01e^{\frac{(\ln|y| + (\arg(y) + 2\pi h)i)}{2}} + 888 = 0 \qquad (219)$$

В то время как классические подходы сталкиваются с трудоёмкими сложностями при идентификации полного множества решений на разных листах Римана, метод Master-J предлагает **эффективный, строгий и полный инструмент** для их систематического построения.

Приложение О. **Мастер-ряд как структурная теория расположения корней**

Основной вывод:

Метод Master-J раскрывает **трёхмерную параметризацию** алгебраических и трансцендентных уравнений, где параметры (m,s,r) образуют полную систему координат в пространстве элементарных функций. Это позволяет не только решать уравнения, но и классифицировать их по фундаментальным типам.

Ключевые положения:

1. Трёхмерность как фундаментальный принцип

Параметры (m,s,r) задают **полную систему инвариантов**, охватывающую:

m – тип функционального уравнения (степенные/логарифмические)

s – структура нелинейности

r – характер ветвления решений

2. Решение фундаментальных проблем вычислительной математики

➢ **Проблема начального приближения**: Традиционные методы требуют угадывания начального приближения. Мастер-ряд даёт аналитическую формулу для выбора оптимального начального приближения через параметр $v = e^{\frac{\ln|Q| + (\arg(Q) + 2\pi n)i}{a}}$

➢ **Проблема полноты множества корней**: Метод гарантированно находит **все** корни (включая комплексные) через целочисленный параметр n, вместо итерационных методов нащупывания корней по всей бесконечной комплексной плоскости.

- **Проблема аналитического продолжения**: Сеть сопряжённых рядов обеспечивает вычисление функций за пределами исходного радиуса сходимости

3. Единство математического языка

- **Бином Ньютона**: $(1+x)^r = M(1;0;1/r;rx)$
- **Экспонента**: $e^x = M(1;0;0;x)$
- **Функция Ламберта**: $W(x) = M(0;-1;0;x)$
- **Гиперболические функции**: $\operatorname{arsinh}(x) = M(0;1;2;x)$

Связь между разными уравнениями показывают нули в параметрах. Возможность выразить неизвестную явно s=0, перестройка уравнения при стремлении основной степени к нулю r=0, логарифм корня другого уравнения m=0. Разрозненные случаи (от биномиальных корней до функций Ламберта) оказываются частными проявлениями единого закона, задаваемого мастер-уравнением.

Заключительный тезис:

Мастер-ряд открывает новый этап в работе с уравнениями — переход от натыкивания результата к аналитическому пониманию структуры. Как таблица Менделеева помогла понять химические связи, так и мастер-ряд обеспечивает переход от фрагментарных методов к целостной теории.

Мастер-ряд как универсальный язык анализа

Традиционные степенные ряды (Тейлора, Маклорена) позволяют вычислять функции, но ограничены радиусом сходимости и не систематизированы. Мы показываем, что все элементарные и многие специальные функции являются частными случаями единого **мастер-ряда**, раскрывающего их глубинную взаимосвязь.

Главный прорыв — метод аналитического продолжения на основе мастер-ряда, позволяющий строить **сопряжённые ряды**, покрывающие всю комплексную плоскость. Это позволило решить ключевую проблему для алгебраических уравнений: ввести **ультрарадикал** $\sqrt[n;r;s]{x}$ как **непрерывную функцию** на всей области определения, включая переход через радиус сходимости.

Приложения:

Корректное ветвление: Однозначное выделение ветвей корней алгебраических уравнений.

Новые разложения: Получение полных наборов асимптотических разложений для функций, включая гиперболический арксинус, для которых ранее было известно лишь одно.

Физические модели: Возможность отслеживания отдельных корней в динамических системах на всей числовой оси, что критично для анализа сложных физических процессов.

Таким образом, мастер-ряд раскрывает структуру пространства элементарных и специальных функций, выступая своего рода «фундаментальным базисом» — остальные функции являются их комбинациями. При этом операция слияния, критически важная для анализа многомерных уравнений, поддаётся простой и эффективной алгоритмизации именно тогда, когда степенные ряды выражены через метод мастера.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность:

- *Команде разработчиков нейросетевой модели DeepSeek за создание интеллектуального инструмента, оказавшего неоценимую помощь в формализации идей и проверке математических конструкций.*
- *Березину Павлу Владимировичу, Березину Алексею Владимировичу и Груздову Андрею Викторовичу за большой объём проделанных вычислений, численных проверок и плодотворные обсуждения.*

➢ *Разработчикам систем компьютерной алгебры Wolfram Alpha и Maple, которые были использованы для верификации аналитических выкладок.*

➢ *Редакцию журнала «Флагман науки» за оперативную и профессиональную работу, а также за техническую поддержку.*

Список литературы:

1. Master-J Laboratory. Master-J Analytical Method: Core Algorithms and Implementation. 2024. **DOI:** 10.5281/zenodo.15633781

2. Berezin, P.V., Berezin, A.V., Berezin, S.V., & Gruzdov, A.V. (2025). Master-J: A Universal Analytical Method for Solving Equations with Applications in Science and Finance. Flagman Nauki, 7(30), pp. 157-178. **DOI:** 10.37539/2949-1991.2025.30.7.011 **EDN:** DCPAKF

3. Stewart, I. (2015). Galois Theory (4th ed.). Chapman and Hall/CRC.