УДК 004.4+004.41+004.65

Кульков Юрий Максимович, магистрант,
Амурский государственный университет,
г. Благовещенск

ОБЗОР ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ДОПУСТИМОЙ НАГРУЗКИ НА КОСТЬ ПОСЛЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОСТЕОСИНТЕЗА

Аннотация: В статье рассматриваются численные методы решения дифференциальных уравнений для расчёта допустимой нагрузки на кость после применения остеосинтеза

Ключевые слова: метод Фурье, расчет, клиническая практика, программное обеспечение.

Разрабатываемое программное обеспечение позволяет подобрать фиксирующее устройство, для лечения переломов тазового кольца, под конкретного пациента. Перелом таза – распространенная травма, которая является очень опасной и тяжелой. Тяжесть травмы основана на большой потере крови, которая истекает из мягких тканей и отломков костей. При изучении ближайших и отдаленных последствий было доказано, что даже «относительно легкие» переломы грозят нарушением осанки, походки, а у девочек приводят к деформации тазового кольца и впоследствии – к нарушению родовой деятельности. Поэтому проблема точной подборки фиксирующего устройства крайне актуальна.

1. Метод разделения переменных (метод Фурье)

Суть данного метода заключается в приведении к равенству выражений зависящих от разных переменных. Для обыкновенных дифференциальных уравнений это равенство дифференциала выражения, зависящего только от искомой функции, дифференциалу выражения, зависящего только от независимой переменной:

$$f\,(y)dy = g\,(x)dx, \tag{1}$$

для уравнений в частных производных это равенство между собой функций от разных независимых переменных.

Достоинство метода Фурье заключается в возможности разделить переменные и сводить граничные задачи для уравнений с частными производными к аналогичным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений и представлять решение в аналитическом виде.

Недостаток – в сложности и ограниченности множества задач, для которых удается эффективно выполнить разделение переменных. В основном такой метод применяется для простых уравнений, заданных на простых областях.

2. Метод конечных разностей (метод сеток)

Суть МКР заключается в том, что твердое тело рассматривается в виде совокупности узлов. Все производные, входящие в дифференциальные уравнения и граничные условия, приближенно заменяются соответствующими конечными разностями, получая систему алгебраических линейных уравнений относительно значений функций в узлах сетки. Решение этой системы позволяет получить, при последующей интерполяции в промежутках между узлами, приближенное численное решение рассматриваемой задачи.

Достоинство МКР заключается в слабой зависимости от граничных условий задачи, характера исходного напряженного состояния и геометрии конструкций.

Недостаток – сложность решения задач с криволинейными границами, высокий порядок системы алгебраических уравнений, трудности, возникающие с аппроксимацией заданных на границе производных. Для МКР также характерны затруднения при рассмотрении многосвязных областей и стыковок областей, описываемых различными дифференциальными уравнениями.

3. Метод граничных элементов

Метод решения краевой задачи, в котором она сводится к интегральному уравнению на границе расчетной области.

Достоинство МГЭ в точном удовлетворении исходному дифференциальному уравнению внутри расчетной области. В задачах с бесконечной границей метод граничных элементов имеет значительное преимущество по сравнению с МКЭ из-за легкого учета границы.

Недостаток МГЭ в том, что матрица результирующей системы линейных алгебраических уравнений должна быть полностью заполнена в отличие от метода конечных элементов.

4 Обоснование выбора метода конечных элементов

Методом решения физических задач в данной работе был выбран метод конечных элементов – это метод приближённого численного решения физических задач. В его основе лежат две главные идеи:

– дискретизация исследуемого объекта на конечное множество конечных элементов;

– кусочно-элементное представление исследуемых функций.

Расчет стержневой конструкции при помощи МКЭ сводится к решению краевых задач для систем уравнений, которые включают соотношения теории

Достоинство МКР заключается в слабой зависимости от граничных условий задачи, характера исходного напряженного состояния и геометрии конструкций.

Недостаток – сложность решения задач с криволинейными границами, высокий порядок системы алгебраических уравнений, трудности, возникающие с аппроксимацией заданных на границе производных. Для МКР также характерны затруднения при рассмотрении многосвязных областей и стыковок областей, описываемых различными дифференциальными уравнениями.

Система искомых функций состоит из компонент вектора перемещений:

$$*u+ = *u\,(x, y, z),\ v\,(x, y, z),\ w\,(x, y, z)+, \tag{2}$$

компонент векторов напряжений:

$$*\sigma+ = *\sigma x\,(x, e, z)\sigma y\,(x, y, z)\sigma z\,(x, y, z)\tau xy\,(x, y, z)\tau yz\,(x, y, z)\tau zx\,(x, e, z)+, \tag{3}$$

компонент деформаций:

$$*\varepsilon+ = *\varepsilon x\,(x, y, z)\varepsilon y\,(x, y, z)\varepsilon z\,(x, y, z)\gamma xy\,(x, y, z)\gamma yz\,(x, y, z)\gamma zx\,(x, y, z)+, \tag{4}$$

Функции определяются из совместного решения системуравнений, включающих уравнения равновесия:

$$,Ф\text{-}T*\sigma+ = *Gv+, \tag{5}$$

где $*Gv+ = *X\,(x, y, z),\ Y\,(x, y, z),\ Z\,(x, y, z)+$ – вектор-функция объемных сил; геометрические уравнения (Коши):

$$*\varepsilon+ =,Ф\text{-}*u+, \tag{6}$$

где ,Ф- – матрица дифференциальных операторов; определяющие (физические) уравнения:

$$*\sigma+ =,D\text{-}*\varepsilon+, \tag{7}$$

где $[D]$ – матрица механических характеристик материала размером 6x6;

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix},$$

(8)

Матрица $[D]$ определяется выбором модели материала и для физически нелинейных материалов формулируются на базе физических уравнений, учитывающих его основные свойства. Предполагаем, что материал кости и элементов конструкции фиксирующего аппарата имеет упругие изотропные свойства, тогда:

$$[D] = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2v}{2(1-v)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2v}{2(1-v)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix},$$

(9)

где Е – модуль упругости материала;

v – коэффициент Пуассона.

Уравнения (5) – (7) должны быть дополнены кинематическими и статическими граничными условиями на поверхности тела.

Решая совместно уравнения (5) (7) относительно неизвестных перемещений, можно получить уравнения равновесия в перемещениях:

$$[\Phi]T\ [D]\ [\Phi]\{u\} = \{Gv\}. \tag{10}$$

Решая эти уравнения, получим искомые перемещения.

Наиболее важными преимуществами МКЭ, благодаря которым он широко используется, являются:

а) свойства материалов смежных элементов могут быть разными. Это позволяет использовать МКЭ к телам, состоящим из нескольких материалов;

б) криволинейная область может быть представлена с помощью прямолинейных конечных элементов или описана точно с помощью криволинейных конечных элементов. Таким образом, методом можно пользоваться не только для областей с «хорошей» формой границы;

в) размеры конечных элементов могут изменяться. Это позволяет укрупнить или измельчить сеть разбиения области на элементы, если в этом есть необходимость;

г) с помощью МКЭ не представляет труда рассмотрение граничных условий с разрывной поверхностной нагрузкой, а также смешанных граничных условий.

Недостаток данного метода – это необходимость использования ПЭВМ с большими вычислительными ресурсами.

Список литературы:

1. Зайцев, В. Ф. Метод разделения переменных в математической физике / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин – СПб., 2009. – 92 с
2. Макарьянц, Г. М. Основы метода конечных элементов: учебн. пособ. / Г. М Макарьянц, А. Б. Прокофьев – Самара: изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. – 80 с.
3. Тухфатуллин, Б. А. Численные методы расчета строительных конструкций. Метод конечных элементов (теория и практика) / Б. А. Тухфатуллин – Томск: изд-во Том. гос. архит-строит. ун-та, 2013. – 100 с.