УДК 517.9:629.76

Гамова Нина Андреевна,
Кандидат педагогических наук, доцент,
Оренбургский государственный университет,
г.Оренбург

Васильченко Фёдор Вячеславович, студент,
Оренбургский государственный университет,
г.Оренбург

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В МОДЕЛИРУЮЩИХ ПРОЦЕССАХ

Аннотация: Дифференциальные уравнения – мощный инструмент для моделирования и анализа различных процессов в науке и технике. Они применяются в различных областях. Особое значение дифференциальные уравнения имеют в ракетостроении, где помогают моделировать полет ракет и спутников. Движение точки моделирует движение ракеты в космическом пространстве, что лежит в основе моделирования теории полета ракеты.

Abstract: Differential equations are a powerful tool for modeling and analyzing various processes in science and technology. They are used in various fields. Differential equations are of particular importance in rocket science, where they help to simulate the flight of rockets and satellites. The motion of a point simulates the motion of a rocket in outer space, which is the basis for modeling the theory of rocket flight.

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения, уравнение Мещерского, кватернионное уравнение, ракетостроение.

Keywords: Differential equations, Meshchersky equation, quaternionic equation, rocket science.

Дифференциальное уравнение – это уравнение, которое содержит неизвестные функции, их аргументы и производные от неизвестных функций по этим аргументам (или дифференциалы неизвестных функций). Подавляющее большинство задач в прикладных науках, если формулируются на языке математики, приводят именно к различным дифференциальным уравнениям.

Дифференциальные уравнения могут иметь различные порядки, что усложняет их решение, но это необходимо по нескольким причинам:

Сложность моделируемых процессов. Многие реальные процессы и явления описываются дифференциальными уравнениями, которые могут включать производные различных порядков.

Необходимость учета дополнительных факторов. В некоторых случаях для более точного прогнозирования параметров необходимо учитывать дополнительные ограничения или условия, что приводит к увеличению порядка уравнения.

Анализ и исследование. В научных и инженерных задачах часто требуется детальный анализ и исследование процессов, что требует использования дифференциальных уравнений высоких порядков для более точного описания и предсказания поведения системы.

Разнообразие порядков дифференциальных уравнений обусловлено необходимостью точного моделирования сложных процессов и явлений, а также возможностью их решения и анализа.

Дифференциальные уравнения нашли применение во многих областях научного знания, например, в биологии [0] с помощью простейшего уравнения описывается рост бактерий. Модель роста бактерий может быть описана дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

где y (t) – концентрация бактерий в момент времени t, k – коэффициент роста. Решив это уравнение, можно определить, как будет изменяться концентрация бактерий в течение времени. Это может помочь в определении оптимальных условий для выращивания бактерий с целью получения нужного количества продукта.

Физика также не осталась в стороне. Дифференциальные уравнения используют для изучения многих процессов, проходящих в природе. Знаменитое уравнение Лапласа [0] описывает потенциал поля, связанного с потенциальными силами, например, электрическими полями. Здесь u зависит от трех переменных (x, y, z) и является неизвестной функцией. Дифференцирование уравнения Лапласа по переменным x, y и z дает соответствующие уравнения частных производных:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$$

Рассмотрим использование дифференциальных уравнений, при моделировании процессов в ракетостроении.

$$m\frac{dv}{dt} + (v - u)\frac{dm}{dt} = F \ \mathbf{(1)}$$

Представленное уравнение – называется уравнением Мещерского [0] и представляет собой основной закон механики для точки переменной массы, оно может быть так же записано в следующем виде:

$$M\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \frac{dM}{dt}\ (\vec{u} - \vec{V})$$

Где M (t) – масса материальной точки зависящая от времени, V – скорость движения материальной точки, F – результирующая всех внешних сил действующих на материальную точку, $(\vec{u} - \vec{V})$ – разность относительных скоростей присоединяющихся и отсоединяющихся частиц.

Данное дифференциальное уравнение (1) имеет следующий физический смысл. Для каждого момента времени произведение массы материальной точки на ее ускорение равно геометрической сумме действующих на материальную точку внешней и реактивной силы, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, где $\sum \vec{F} = \vec{F_в} - \vec{F_p}$, причем F реактивная будет контрнаправлена вектору скорости ракеты, и $> \sum F$ внешних.

Ракеты являются основным носителем полезной нагрузки, будь то ресурсы или спутниковые системы. После достижения нужной орбиты спутник отрывается от ракеты и отправляется в путешествие по просторам космоса. Для предсказания его положения и других характеристик существует множество уравнений. Одно из таких – кватернионное уравнение возмущенного движения материальной точки:

Векторное дифференциальное уравнение возмущенного центрального движения материальной точки [0] с массой движущейся в центральном силовом поле с потенциалом под действием возмущающей силы, равной геометрической сумме силы, имеющей потенциал и силы имеет вид:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{m}\left(\frac{d\Pi}{dr}\frac{r}{r} + \frac{d\Pi^*}{dr}\right) + p,$$

$$r = |r|, \Pi = \Pi(r), \Pi^* = \Pi^*(t, r), p = p\ (t, r, \frac{dr}{dt})$$

Здесь r – радиус-вектор, проведенный из центра притяжения, t – время, p – возмущающее ускорение, обусловленное силой mp**.**

Уравнение невозмущенного центрального движения материальной точки получается из вышеуказанного уравнения, если в нем положить П=0, p=0.

Таким образом, дифференциальные уравнения являются универсальным инструментом как для теоретической, так и для практической деятельности. Они нашли применение в различных областях науки и помогли раздвинуть границы привычного, открыть неизведанное и доказать его. Математические модели с использованием дифференциальных уравнений облегчают прогнозирование результатов эксперимента, проводимых в реальных системах, дают возможность изучать явление в целом, предсказывая его развитие, изменения, происходящие с ним в течение времени.

Список литературы:

1. Захаров И. С., Гамова Н. А. Применение дифференциальных уравнений в теории полета ракеты // Шаг в науку. 2019. №4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-differentsialnyh-uravneniy-v-teorii-poleta-rakety (дата обращения: 26.11.2024).
2. Иламанов, Б. Б. Дифференциальные уравнения и их виды / Б. Б. Иламанов, М. А. Ореев. – Текст: непосредственный // Молодой ученый. – 2023. – № 14 (461). – С. 4-5. – URL: https://moluch.ru/archive/461/101347/ (дата обращения: 24.11.2024).
3. Миндеева, С. В., & Иванова, Д. С. (2022). Применение обыкновенных дифференциальных уравнений в различных областях знаний. *Электронный научный журнал "Молодая наука Сибири"*, (3 (17). извлечено от https://ojs.irgups.ru/index.php/mns/article/view/802
4. Челноков, Ю.Н. (2019). Кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли. *Космические исследования*.