DOI 10.37539/2949-1991.2025.24.1.003
УДК 681.513

Машунин Юрий Константинович,
Доктор экономических наук, к.т.н., профессор,
Дальневосточный федеральный университет,
Владивосток, Россия
ORCID id: 0000-0001-7071-8729
Mashunin Yu. K.,
Doctor of Economics, Ph.D., Professor,
Far Eastern Federal University, Russia, Vladivostok,
ORCID id: 0000-0001-7071-8729

МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА. ВЕКТОРНАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ПРОГРАММА
MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICS. VECTOR PROBLEM OF NONLINEAR PROGRAMMING. PROGRAM

Аннотация: Цель данной работы – исследование, анализ, разработка теоретических основ и конструктивных методов многомерной математики. Для реализации данной цели проведен анализ развития современной математики (одно функциональной). Разработаны теоретические основы: аксиоматика, принципы оптимальности и методы решения многомерных (многофункциональных) систем. В рамках прикладных задач многомерной (многофункциональной) математики сформированы линейные и нелинейных векторные (много функциональные) задачи математического программирования (оптимизации).

Представлено построение математических моделей локальных и сложных объектов, систем (экономических, инженерных) в виде задачи векторной оптимизации. Разработано программное обеспечение решения линейных, нелинейных векторных задач оптимизации. Показаны конструктивные методы решения многомерных (векторных) задач оптимизации при равнозначных критериях, при заданном приоритете критерия, представленные. Представлено программное обеспечение, которое показано на численных примерах инженерных (нелинейных) задач математического программирования.

Abstract: The purpose of this work is to research, analyze, and develop theoretical foundations and constructive methods of multidimensional mathematics. To achieve this goal, an analysis of the development of modern mathematics (one functional) was carried out. Theoretical foundations have been developed: axiomatics, principles of optimality and methods for solving multidimensional (multifunctional) systems. Within the framework of applied problems of multidimensional (multifunctional) mathematics, linear and nonlinear vector (multifunctional). The construction of mathematical models of local and complex objects, systems (economic, engineering) in the form of a vector optimization problem is presented. Software for solving linear, nonlinear vector optimization problems has been developed. Constructive methods for solving multidimensional (vector) optimization problems with equivalent criteria, with a given priority of the criterion. The software is presented, which is shown on numerical examples of engineering (nonlinear) problems of mathematical programming.

Ключевые слова: Многомерная математика, Векторная оптимизация, Выбор оптимального решения, Прикладная математика, Нелинейные задачи.

Keywords: Multidimensional Mathematics, Vector Optimization, Optimal Solution Selection, Applied Mathematics, Linear Problems, Nonlinear Problems of mathematical programming.

Введение

Исследование и анализ теоретических основ современной математики показал, что развитие теоретических основ математики проходило на базе отдельной (одномерной) функции, зависящей от некоторого множества переменных (параметров) исследуемого объекта, системы [1, с. 560 – 563, 2, 41]. В реальной жизни большинство исследуемых объектов, систем при своем функционировании (развитии) характеризуются не одной функцией (характеристикой), а некоторым множеством функций (характеристик), каждая из которых зависит от одних и тех же параметров объекта, системы. Как правило, эти функциональные характеристики, имели различную направленность; одно подмножество характеристик было направлено на увеличение своего числового значения (max), другое подмножество характеристик направлено на уменьшение своего числового значения (min).

При этом, улучшение работы объекта по одной из этих характеристик приводило к ухудшению другой характеристики. Возникает проблема создания теории, математических методов для выбора таких параметров, которые бы улучшали все функциональные характеристики объекта, системы одновременно. К исследуемым объектам, системам относятся, как экономические, так и инженерные системы. В экономических системах к функциональным характеристикам можно отнести, например, объем продаж, прибыли, которые желательно получить по числовому значению как можно больше, а с другой стороны, затраты их желательно получить числовому значению как можно ниже. Для всех трех характеристик (трехмерность) параметры экономического объекта, системы одни и те же.

В инженерных системах (ИС), к которым относятся технические системы, технологические процессы, материалы (его состав), динамические системы, учитывается, как правило, некоторое множество характеристик (критериев).

Каждый критерий представлен отдельной функцией на одном и том же множестве переменных (параметров). Множество функций (критериев), каждая из которых имеет свою размерность и целенаправленность, а в совокупности определяют многомерность исследуемого объекта. Множество критериев инженерных систем представляют в виде вектора функций. Отсюда возникли задачи векторной оптимизации, которые определяют ***многомерность исследуемой системы*** (в частности, инженерной системы). В настоящее время подобные задачи при проектировании объектов, систем решаются, как на экспериментальном, так и на математическом (модельном) уровне, методом проб и ошибок.

Цель данной работы – исследование, анализ, разработка теоретических основ и прикладных конструктивных методов многомерной математики. Формирование векторной задачи нелинейного программирования. Разработка программного обеспечения решения векторной задачи нелинейного программирования. Численная реализация векторной задачи нелинейного программирования.

Для реализации поставленной цели в работе исследовано и выполнено.

Проведен анализ основных этапов развития современной (одно функциональной) математики в соответствии [1, с. 560 – 563], [2, 41, 42]. Проблеме многокритериальной (векторной, системной) оптимизации уделяется достаточно большое внимание в отечественной науке, [3, 4 – 14], внесших большой вклад в решение важных научно-технических задач; работ автора [15 – 32, 33]; в зарубежной научной деятельности [34 – 39], как в теоретических, так и в прикладных аспектах. Теория и методы решения векторных задач математического программирования (ВЗМП) разработаны автором в [15] и подтверждена авторство в [29].[1]

[1] Sharing Information for "Vector optimization with equivalent and priority criteria"
Springer Nature Sharing <no-reply@email.authors.springernature.com>

При построении математических многофункциональных моделей инженерных систем дополнительно возникают ряд проблем, которые связаны, во-первых, с условиями определенности [18, 22, 24] и неопределенности [21, 23], во-вторых, проблемой размерности параметров и ее геометрической интерпретацией в двух мерной системе координат, [29, 31, 40]. Поэтому важным является разработка теории, математических методов оценки исходных данных, прикладной многомерной математики, принятия оптимальных решений с учетом многомерности (многофункциональности) в сложных экономических, инженерных системах.

1. Математика современная. Анализ.

Анализ математики современной проведен в соответствии [1, с. 560 – 563].

Математика – это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Математика, как наука стала возможной после накопления достаточно большого фактического материала, возникла в древней Греции в 6 – 5 веках до новой эры и проходила в соответствии с [1] четыре периода.

1. Зарождение математики. На ранних стадиях развития счет предметов бытия привел к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел. Потребности измерения (количества зерна, длины дороги и т. п.) приводят к появлению названий и обозначений простейших дробных чисел и разработке приемов выполнения дробных чисел. Накапливающийся постепенно материал формировался в древнейшую науку – арифметику.

2. Период элементарной математики. На ранних стадиях развития счет предметов бытия привел к созданию простейших понятий арифметических вычислений, способов определения площадей, объемов и т.п. возникает математика, как самостоятельная наука.

3. Период создания математики переменных величин. С 17 века начинается новый период развития математики. На первый план выдвигается ***понятие функции***, определяющее взаимосвязь переменных (параметров) исследуемого объекта. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей приводит далее к основным понятиям математического анализа. Вводится в математику в явном виде идеи бесконечного, к понятию предела, производной, дифференциала и интеграла. Создается анализ бесконечно малых в виде *дифференциального и интегрального* вычислений, позволяющее связывать конечные изменения переменных величин с их поведением на принимаемое решение (функцию). Основные законы механики и физики записываются в форме дифференциальных уравнений, и задача интегрирования этих уравнений выдвигается одной из важнейших задач математики.

4. Современная математики. Все созданные в 17 и 18 веках разделы математического анализа продолжали с большой интенсивностью развиваться в 19, 20 и 21 веках. Большие новые теории возникают не только из запросов естествознания и техники, но из потребностей самой математики, например развитие функций комплексного переменных. В зависимости от запросов механики и физики происходило векторное и тензорное исчисление, которое проходило в рамках функционального анализа. В качестве основного аппарата новых областей механики и математической физики усиленно разрабатывается теория дифференциальных уравнений обыкновенных и уравнений с частными производными. В связи с созданием и использованием вычислительной техники выросла потребность в численных методах анализа и алгебры, которая переросла в отдельную ветвь – вычислительную математику. Запросы о нахождении наилучшего решения в задачах управления физическими или механическими системами, описываемые дифференциальными уравнениями, привели к созданию *теории оптимального управления*, направленной на создание новых сфер человеческой деятельности.

В целом процесс развития математики показывает, что при решении математических проблем, происходило исследование и анализ отдельной ***функции (одномерной)***, зависящей от некоторого множества переменных (параметров) исследуемого объекта, системы.

5. Анализ одномерной математики и переход к многомерной математике

Исследование и анализ математики показал, что ее развитие проходило на базе отдельной (одномерной) функции, зависящей от некоторого множества переменных (параметров) исследуемого объекта, системы. Но в реальной жизни исследуемый объект, система при своем функционировании (развитии) характеризуется некоторым набором функциональных характеристик, которые зависят от одних и тех же параметров системы. При этом функциональные характеристики могли иметь различную направленность: одни на увеличение числового значения (max), другие на уменьшение числового значения (min). Улучшение работы одной из этих характеристик приводит к ухудшению другой. Возникает математическая проблема создания методов для выбора таких параметров, которые бы улучшали все функциональные характеристики объекта, системы одновременно. В настоящее время подобные задачи при проектировании объектов, систем решаются, как на техническом (экспериментальном), так и на математическом (модельном) уровне, методом проб и ошибок.

Впервые к этой проблеме в неявном виде обратился В. Парето [3], который математически сформулировал критерий оптимальности в приложении к экономическим системам в начале XX в. при исследовании товарного обмена. Критерий оптимальности предназначен для оценки, улучшает ли предложенное изменение критерия общий уровень экономического благосостояния. В. Парето своим критерием оптимальности утверждает, что любое изменение в экономике, которое никому не причиняет убытков и, которое приносит некоторым людям пользу (прибыль), является улучшением экономики. Критерий В. Парето имеет широкий смысл. При построении планов развития экономической системы, в которой учитываются интересы ряда групп экономических объектов или подсистем, согласно теории В. Парето, распределение ресурсов является оптимальным. Общий критерий оптимальности, сформулированный В. Парето, был перенесен на оптимизационные задачи с множеством критериев. При таком подходе рассматривается оптимизационная задача, в которой оптимизация означает улучшение одного или нескольких показателей (критериев) при условии, чтобы другие не ухудшались. Так возникли оптимизационные задачи с множеством критериев. Каждый критерий представлен отдельной функцией на одном и том же множестве переменных (параметров). Множество функций (критериев), каждая из которых имеет свою размерность и целенаправленность, а в совокупности определяют многомерность исследуемого объекта, и это множество может быть представлено вектором. В итоге многомерная задача представлена как векторная задача оптимизации. В дальнейшем стало понятным, что векторные (многомерные) задачи возникают не только в экономике, но и в инженерии: например, при проектировании технических систем, технологических процессов, исследования структуры материала из различных производственных отраслей.

Таким образом проблема многомерности исследуемых объектов, систем стала общенаучной. Проблематика решения задач векторной (многомерной) оптимизации обусловлена определенными трудностями, причем концептуального характера. Главная проблема решения векторной (многомерной) задачи состоит в определении понятия: «***что значит решить задачу векторной оптимизации***». Решение проблемы векторной (многокритериальной) задачи оптимизации определяет необходимость:

во-первых, решения проблемы сравнения различных критериев, которые измерены в различных единицах, т. е. разработки аксиоматики векторной оптимизации, которая дает возможность сравнения критериев (характеристик);

во-вторых, формирования принципа оптимальности, показывающий в чем одно решение лучше другого по всем функциям (критериям), а также, что представляет оптимальное решение как при равнозначных критериях, так приоритете одного из критериев (в том числе при заданном приоритете критерия);

в-третьих, формирования численных методов, которые определяют правило выбора наилучшего (оптимального) решения как при равнозначных критериях, так и при заданном приоритете одного из критериев.

На решение этих трех проблем направлена данная работа.

2. Теоретические основы многомерной математики: Теория векторной оптимизации

В качестве представителя многомерной математики мы сформулируем задачу математического программирования, представленную множеством функций, которые определяют многомерность исследуемого объекта. Каждая функция этого множества функций имеют различную целевую направленность: максимизации или минимизации, которые в совокупности изменяются на определенном (не пустом и замкнутом) множестве переменных (параметров). Не нарушая общности множество функций можно представить в виде вектора функций. В итоге получаем векторную задачу математического программирования (ВЗМП). На базе векторной задачи оптимизации представим теоретические проблемы необходимые для ее решения, которые включают аксиоматику (теоретические основы), принцип оптимальности и конструктивные методы решения векторных задач с равнозначными критериями и заданным приоритетом критерия, [15, 29, 31, 33].

2.1. Векторная задача математического программирования. Аксиомы и Аксиоматические методы

2.1.1. Векторная задача математического программирования

Векторная задача математического программирования– это стандартная задача математического программирования, имеющая множество критериев. В отличии от стандартной оптимизационной задачи, представленной одной функцией (критерием), векторная задача представлена в виде множества функций (вектора критериев), который подразделяется на два подмножества критериев: максимизации, минимизации. В соответствии с этим векторные задачи могут быть представлены, как однородные, так и неоднородные задачи оптимизации.

Однородные векторные задачи математического программирования максимизации – это такие векторные задачи, у которых каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

Однородные векторные задачи математического программирования минимизации – это такие векторные задачи, у которых каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

Неоднородные векторные задачи математического программирования – это такие векторные задачи, у которых множества критериев разделено на два подмножества критериев: максимизации и минимизации, отсюда неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач. Используя эти определениями, по аналогии с однокритериальной задачей оптимизации, представим векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями.

$$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k\ (X), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (2.1)$$
$$\min F_2(X) = \{\min f_k\ (X), k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (2.2)$$
$$G\ (X) \leq B, \quad (2.3)$$
$$X \geq 0, \quad (2.4)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – это вектор переменных N-мерного евклидова пространства R^N; $F(X)$ – это векторный критерий (вектор-функция), имеющая K – компонент (функций), $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}$. Множество компонент $\boldsymbol{K}$ состоит из двух подмножеств: подмножества $\boldsymbol{K}_1$ компонент максимизации, подмножества $\boldsymbol{K}_2$ компонент минимизации, которые в совокупности образуют множество функций $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2$. Для оценки совокупности критериев $\boldsymbol{K}$ вводится обозначение: операция «*opt*». Операция «*opt*» включает в себя операции *max* и *min*;

$F_1(X), F_2(X)$ представляют вектор-функции (вектора критериев) максимизации и минимизации соответственно:

$\boldsymbol{K_1} \equiv \overline{1, K_1}$, $\boldsymbol{K_2} \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ – это множества критериев максимизации, минимизации.

$G(X) \leq B, X \geq 0$ представляют ограничения, которые накладываются на отдельные переменные $X^{min} \leq X \leq X^{max}$, и отдельные функции:

$$min\ f_k\ (X) \leq f_k\ (X) \leq max\ f_k\ (X), \forall k \in \boldsymbol{K}$$

на допустимом множестве точек $X \in \boldsymbol{R}^n$.

Допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт:

$$\boldsymbol{S} = \{X \in \boldsymbol{R}^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset.$$

2.1.2. Аксиомы и Аксиоматические методы: характеристика

Аксиома – это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих утверждений (исходных положений) строится та или иная теория.

Аксиоматический метод – это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые *Аксиомами теории.* В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [1, 2].

В математике *Аксиоматический метод* зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала».

Дальнейшее развитие аксиоматического метода получил в работах Д. Гильберта в виде так называемого метода формализма системы. Общая схема построения произвольной формальной системы («*S*») включает:

1. *Язык системы* («*S*»), в том числе алфавит – это перечень элементарных символов; правила образования (синтаксис), по которым строится формулы «*S*».
2. Аксиомы системы «*S*», которые представляют некоторое множество формул.
3. Правила вывода системы «*S*» [1].

В приложении к решению задачи векторной оптимизации (многомерной математики) аксиоматика подразделяется на два раздела:

1. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями;
2. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критериев.

Только при построении первоначальной аксиоматики возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения векторных задач математического программирования.

2.2. Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с равнозначными критериями

2.2.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями

В соответствии с вышеизложенной трактовкой *Язык системы многомерной математики* включает: во-первых, нормализацию критериев, во-вторых, относительную оценку критериев (функций), и, и в-третьих, минимальный относительный уровень.

Определение 1. ***Нормализация критериев.***

Нормализация критериев (сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X)\,\forall k \in K, X \in \boldsymbol{R}^n$, в одномерное пространство R^1 (функция $f_k(X)\,\forall k \in K$ представляет функцию преобразования $X = \{x_j, j = \overline{1,N}\}$ из N-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R^N}$ в $\boldsymbol{R^1}$). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования:

$$f_k(X) = a_k f_k'(X) + c_k \forall k \in K, \text{ или } f_k(X) = (f_k'(X) + c_k)/a_k \forall k \in K, \tag{2.5}$$

где $f_k'(X), k = \overline{1,K}$ – до нормализации (старое) значение критерия; $f_k(X), k = \overline{1,K}$ – нормализованное значение, a_k, c_k- постоянные.

Нормализация критериев (2.5) представляет простое (линейное) инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимизационной задаче нормализация критериев:

$f_k(X) = (f_k'(X) + c_k)/a_k \forall k \in K$ не влияет на результат решения.

Если решается выпуклая оптимизационная задача: $\boldsymbol{max}_{X \in S} f(X)$,

то в полученной точке оптимума $X^* \in S$ производная равна нулю:

$\frac{df(X^*)}{\mathrm{d}X} = 0.$

В общем случае, если решается задача с нормализованным критерием:

$\boldsymbol{max}_{X \in S} (a_k f_k'(X) + c_k)$,

то в полученной точке оптимума $X^* \in S$ производная также равна нулю:

$$\frac{d\,(a_k f(X^*) + c_k)}{\mathrm{d}X} = a_k \frac{d(f(X^*))}{\mathrm{d}X} + \frac{d\,(c_k)}{\mathrm{d}X} = 0. \tag{2.6}$$

Результаты равны, т.е. точка оптимума $X_k^*, k = \overline{1,K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

Определение 2. ***Относительная оценка функции (критерия).***

В векторной задаче оптимизации (2.1)- (2.4) выполним нормализацию (2.5):

$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}. \tag{2.7}$$

$\lambda_k(X)\,\forall k \in K$ – это относительная оценка k-й функции (k-го критерия) в точке $X \in \boldsymbol{S}$,

где f_k^*, f_k^0 наилучшая, наихудшая величина k-го критерия, которая получена при решении векторной задачи (2.1)- (2.4) отдельно по k-му критерию. Относительная оценка $\lambda_k(X)\,\forall k \in K$ измеряется в относительных единицах; при этом относительная оценка $\lambda_k(X)\,\forall k \in K$ на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$ меняется с нуля в точке X_k^0 к единице в точке оптимума X_k^*:

$$\forall k \in \boldsymbol{K} \lim_{X \to X_k^0} \lambda_k(X) = 0; \forall k \in \boldsymbol{K} \lim_{X \to X_k^*} \lambda_k(X) = 1.$$

Таким образом, для любой функции (критерия) относительная оценка этой функции $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$ лежит в следующих пределах:

$$\forall k \in \boldsymbol{K}\ 0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, X \in \boldsymbol{S}, \quad (2.8)$$

что позволяет функции (критерии) сравнивать между собой.

Определение 3. ***Операция сравнения относительных оценок функции (критерия) между собой.***

Так как, любая функция (критерий) представлен в относительных оценках функций $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$, которые лежат пределах (2.8), то возможно сравнение относительных оценок по числовой величине. Для сравнения используется операция «вычитания». Если сравнивается две функции (критерия), измеренные в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)\ \forall k \in K$, то возможны три ситуации:

первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$;
вторая, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$;
третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$.
Первая и третья ситуация исследуется в разделе 2.3.
В этом разделе исследуется вторая ситуация.

2.2.2. Аксиома равнозначности критериев в задаче векторной оптимизации.

Аксиома 1. *О равнозначности критериев в допустимой точке* векторной задачи математического программирования.

В векторной задаче оптимизации два критерия с индексами $l \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ будем считать равнозначными в точке $X \in \boldsymbol{S}$, если относительные оценки по k-му и q-му критерию равны между собой в этой точке: $\lambda_l(X) = \lambda_q(X), l, q \in \boldsymbol{K}$.

Пояснение. Если в точке $X \in \boldsymbol{S}$ функции (критерии) будут равны:

$\lambda_l(X) = 0{,}45\ l \in \boldsymbol{K}$ и $\lambda_q(X) = 0{,}45, q \in \boldsymbol{K}$ (т.е. 45% от своей оптимальной величины, которая в относительных единицах равна 1), то такие критерии не «равны» друг другу, а равнозначны по своему числовому значению. И каждый из них несет свой функциональный смысл, который может быть получен, используя нормализацию критериев (2.7).

Определение 4. ***Минимальный относительный уровень.***

Относительный уровень λ в векторной задаче оптимизации (2.1)- (2.4) представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$$\forall X \in \boldsymbol{S}\ \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \quad (2.9)$$

нижний уровень λ для выполнения условия (2.9) в допустимой точке $X \in \boldsymbol{S}$ определяется как:

$$\forall X \in S\ \lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X). \quad (2.10)$$

Соотношения (2.9) и (2.10) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (2.10) определения min к ограничениям (2.9) и наоборот.

Относительный уровень λ позволяет объединить все критерии в векторной задаче оптимизации одной числовой характеристикой (переменной) λ, а затем производить над ней определенные операции.

Относительный уровень λ функционально зависит от переменной $X \in \boldsymbol{S}$, поэтому, изменяя X, можем изменять все $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ и соответственно нижний уровень $\lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X)$, который является характеристикой многомерной (многофункциональной) системы.

Пояснение. Величина относительной оценки $\forall k \in K\ \lambda_k(X)$ является характеристикой *одномерной системы*, а величина минимального относительного уровня $\lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X)$ является характеристикой *многомерной* системы.

2.2.3. Принцип оптимальности решения многомерной (векторной) задачи оптимизации с равнозначными критериями

Определение 5. **Принцип оптимальности решения ВЗМП с равнозначными критериями.**

Векторная задача математического программирования с равнозначными критериями (2.1)- (2.4) решена, если найдена точка $X^o \in \boldsymbol{S}$ и максимальный нижний уровень λ^o (верхний индекс о – оптимум) среди всех минимальных относительных оценок: $\forall k \in \boldsymbol{K}$ $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{min}_{k\in K}\lambda_k(X)$ такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X\in S}\boldsymbol{min}_{k\in K}\lambda_k(X) \tag{2.11}$$

Используя взаимосвязь выражений (2.9) и (2.10), преобразуем максиминную задачу (2.11) в экстремальную задачу:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X\in S}\,\lambda \tag{2.12}$$

$$\text{при ограничениях } \lambda \le \lambda_k(X), k = \overline{1,K}. \tag{2.13}$$

Полученную однокритериальную задачу оптимизации (2.12)- (2.13) назовем λ-задачей. λ-задача (2.12)- (2.13) имеет (N+1) размерность, как следствие результат решения λ-задачи (2.12)- (2.13) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, (N+1)-я компонента которого суть величина λ^o, $\boldsymbol{X^o} = \{x_1^o,\, x_2^o, \dots, x_N^o, x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, (N+1) компонента вектора X^o выделена в λ^o.

Полученные величины $\{\lambda^o, X^o\} = \boldsymbol{X^o}$ характеризуют оптимальное решение λ-задачи (2.16)- (2.17) и соответственно векторной задачи математического программирования (2.1)- (2.4) с равнозначными критериями, которая решена на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата.

Назовем в оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$, величину X^o – оптимальной точкой, а λ^o – максимальным нижним уровнем при равнозначных критериях.

Теорема 1. Теорема о двух наиболее противоречивых критериях в ВЗМП (2.1)- (2.4) с равнозначными критериями.

В выпуклой векторной задаче оптимизации (2.1)- (2.4) с равнозначными критериями, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия, обозначенные $q\in\boldsymbol{K}, p\in\boldsymbol{K}$, являющимися самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1,K}$, и для которых выполняется равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}, \tag{2.14}$$

и другие критерии определяются неравенством:

$$\lambda^o \le \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \ne p \ne k. \tag{2.15}$$

В первые доказательство теоремы 1 представлено в [13, С. 22], в дальнейшем повторено в работе [17, С. 234].

2.2.4. Конструктивный метод решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями

Для решения векторной задачи математического программирования (2.1)- (2.4) разработан метод, основанный на нормализации критериев (2.7), аксиоматике и принципе максимина (гарантированного результата) (2.11). Конструктивный метод решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями включает два блока: *1-й блок* «Системный анализ» – разделен на три шага; *2-й блок* «Принятие оптимального решения», включающий два шага: построения λ-задачи и ее решения.

Блок 1. Системный анализ.

Шаг 1. Решается отдельно оптимизационная задача (2.1)- (2.4) по каждому критерию. Для $\forall k \in \boldsymbol{K}_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in \boldsymbol{K}_2$ решается на минимум.

В результате решения получим:

X_k^* – точка оптимума по соответствующему критерию $k = \overline{1, K}$;

$f_k^* = f_k\ (X_k^*)$ – величина k-го критерия в этой точке $k = \overline{1, K}$.

Шаг 2. В задаче (2.1)- (2.4) определяем наихудшую величину каждого критерия (анти оптимум): $f_k^0, k = \overline{1, K}$. Решается задача (2.1)- (2.4) для каждого критерия $k = \overline{1, \boldsymbol{K}_1}$ на минимум: $f_k^0 = min\ f_k\ (X), G\ (X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, \boldsymbol{K}_1}$;

для каждого критерия $k = \overline{1, \boldsymbol{K}_2}$ на максимум: $f_k^0 = max\ f_k\ (X), G\ (X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, \boldsymbol{K}_2}$.

Получим в результате решения: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k\ (X_k^0)$ – величина k-го критерия.

Шаг 3. Системный анализ выполняется исследованием множества точек, оптимальных по Парето. В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$ определяются величины целевых функций $F\ (X^*)$, а также относительных оценок $\lambda\ (X^*)$:

$\lambda_k(X) = \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}.$

Результат системного анализа:

$$F\ (X^*) = \{f_k\ (X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*), \dots, f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1\ (X_K^*), \dots, f_K\ (X_K^*) \end{vmatrix}, \qquad (2.16)$$

$$\lambda\ (X^*)\ = \{\lambda_q\ (X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1\ (X_K^*), \dots, \lambda_K\ (X_K^*) \end{vmatrix}. \qquad (2.17)$$

При анализе $\lambda\ (X^*)$ в (2.17) мы видим, что любая относительная оценка лежит в пределах: во-первых, $0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, k = \overline{1, K}$;

во-вторых, по диагонали (2.17) все относительные оценки равны единицы:

$\lambda_k(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$.

Из результатов системного анализа (2.16), (2.17) вытекает проблема:

Найти такую (оптимальную) точку, в которой все относительные оценки: $\lambda_q\ (X), q = \overline{1, K}$ были наиболее близки к единице. На решение этой проблемы направлен второй блок.

Блок 2. Принятие оптимального решения в ВЗМП.

Включает два шага – 4, 5.

Шаг 4. Построение λ-задачи.

Построение λ-задачи осуществляется в два этапа:

первоначально строится максиминная задача оптимизации с эквивалентными критериями (2.11):

$$\lambda^o = \boldsymbol{max_{X \in S} min_{k \in K}} \lambda_k\ (X),$$

которая на втором этапе, с учетом соотношений (2.9) и (2.10), преобразуются в однокритериальную задачу математического программирования, названной λ-задачей:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max_{X \in S}}\ \lambda, \qquad (2.18)$$

$$\lambda\ - \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} \leq 0, k\ =\ \overline{1, K}, \qquad (2.19)$$

$$G\ (X) \leq B, X \geq 0, \qquad (2.20)$$

где вектор неизвестных X имеет размерность $N + 1$: $X = \{\lambda, x_1, \dots, x_N\}$.

Шаг 5. Решение λ-задачи. λ-задача (2.18)- (2.20) – стандартная (однокритериальная) задача выпуклого программирования и для ее решения используются стандартные методы. В результате решения λ-задачи (2.18)- (2.20) получим:

$\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ – точку оптимума;

$f_k(X^o), k = \overline{1,K}$- величины критериев в этой точке;

$\lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$- величины относительных оценок;

λ^o – максимальную относительную оценку, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$:

$\boldsymbol{\lambda^o} \le \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, X^o \in \boldsymbol{S}$, т. е. системным показателем.

Заключение по аксиоматике и принципу оптимальности с равнозначными критериями в задаче векторной оптимизации.

С точки зрения многомерной математики впервые установлена взаимная функциональная связь между отдельными функциями (критериями), имеющих различную размерность. А с помощью принципа оптимальности находить оптимальное решение с равнозначными критериями в задаче векторной оптимизации.

2.3. Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с приоритетом критерия

В определении 3 указано, что если сравнивать две функции (критерия), измеренных в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)\, \forall k \in K$, то возможны три ситуации. Вторая ситуация, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$ исследована в разделе 2.2 (равнозначные критерии). Ситуации: первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$, и третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$, исследуются в этом разделе. Такие ситуации определяются, как задачи с приоритетом критерия.

2.3.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с заданным приоритетом критерия

1. ***Язык системы*** аксиоматики решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия включает определения: 1) Приоритет одного критерия над другим; 2) Числовое значение приоритета критерия; 3) Нижний уровень критерия среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

Определение 6. ***Приоритет одного критерия над другим.***

Критерий $q \in \boldsymbol{K}$ в векторной задаче в точке $X \in \boldsymbol{S}$ имеет приоритет над другими критериями $k = \overline{1,K}$, если относительная оценка $\lambda_q(X)$ по этому критерию больше или равна относительных оценок $\lambda_k(X)$ других критериев, т. е.:

$$\lambda_q(X) \ge \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, \qquad (2.21)$$

строгий приоритет, если хотя бы для одного критерия $t \in \boldsymbol{K}$: $\lambda_q(X) > \lambda_k(X), t \ne q$, а для остальных критериев $\lambda_q(X) \ge \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, k \ne t$.

Для уточнения вопроса на сколько приоритет одного критерия над другим мы ввели определение коэффициента (вектора) связи между парой относительных оценок q и k: $P^q(X) = \{p_k^q\,(X) \mid k = \overline{1,K}\}, q \in \boldsymbol{K}\; \forall X \in \boldsymbol{S}_q$.

Определение 7. ***Числовое выражение приоритета критерия над другим критерием.***

В векторной задаче с приоритетом критерия q-го над другим критерием $k = \overline{1,K}$, для $\forall X \in \boldsymbol{S}_q$, величина $p_k^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$, больше относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$:

$$\left\{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1,K}\right\}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, \forall q \in \boldsymbol{K}.$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями $k = \overline{1,K}$.

Определение 7а. ***Вектор приоритетов, определяющий числовое выражение приоритета критерия относительно других критериев.***

В векторной задаче с приоритетом критерия q-го над другими критериями $k = \overline{1,K}$, для $\forall X \in \boldsymbol{S}_q$, вектор $P^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка q-го критерия $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$, больше относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$:

$$P^q(X) = \left\{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1,K}\right\}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}. \qquad (2.22)$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем вектором числовых выражений приоритета q-го критерия над остальными критериями $P^q(X) = \left\{p_k^q(X), k = \overline{1,K}\right\}$.

Определение 8. ***Заданное числовое значение приоритета одного критерия над другим.***

В векторной задаче (2.1)- (2.4) с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$ для $\forall X \in \boldsymbol{S}$ вектор $P^q = \{p_k^q, k = \overline{1,K}\}$, считается заданным лицом, принимающим решения, (ЛПР), если задана каждая компонента этого вектора. Заданная ЛПР компонента p_k^q, с точки зрения ЛПР, показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$ больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$. Вектор $p_k^q, k = \overline{1,K}$ является заданным числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями $k = \overline{1,K}$.

Определение 9. ***Нижний уровень среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.***

Уровень λ является нижним среди всех относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, таким, что

$$\lambda \le p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, \qquad (2.23)$$

нижний уровень для выполнения условия (2.23) определяется

$$\lambda = min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S. \qquad (2.24)$$

Соотношения (2.23) и (2.24) являются взаимосвязанными и служат в дальнейшем переходом от операции определения min к ограничениям и наоборот.

2.3.2. Аксиоматика о подмножестве точек, приоритетных по отдельному критерию в задаче векторной оптимизации

Из определений первого подраздела «Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с заданным приоритетом критерия» устанавливается взаимосвязь с «Аксиоматической теорией множеств" [1, стр. 103-105].

Аксиома 2. *О подмножестве точек, приоритетных по отдельному критерию на допустимом множестве точек задачи векторной оптимизации.*

В векторной задаче (2.1)- (2.4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если

$\forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S \; \forall k \in \boldsymbol{K} \; \lambda_q(X) \ge \lambda_k(X), q \ne k$.

Сравнивая это выражение с выражением равнозначности критериев в аксиоме 1: $\lambda_l(X) = \lambda_q(X), l, q \in \boldsymbol{K}$, видим, что эти выражения идентичны.

Определение аксиомы 2 $\forall X \in \boldsymbol{S}_q \; \forall k \in \boldsymbol{K} \; \lambda_q(X) \ge \lambda_k(X), q \ne k$ распространяется и на множество точек $\boldsymbol{S}^o \subset S$, оптимальных по Парето, что дается следующим определением.

Аксиома 2а. *О подмножестве точек, приоритетных по отдельному критерию, на подмножестве точек, оптимальных по Парето, в задаче векторной оптимизации.*

В задаче векторной оптимизации (2.1)- (2.4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset$ S называется областью приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, на подмножестве точек, оптимальных по Парето $\boldsymbol{S}^o \subset$ S, если

$\forall$X $\in S_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset$ S $\forall k \in K \; \lambda_q(X) \ge \lambda_k(X), q \ne k$.

Заметим, что подмножество точек $\boldsymbol{S_q^o}$, с одной стороны, включено в область (подмножество точек) имеющих приоритет критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями: $\boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, а с другой стороны, на подмножество точек, которые оптимальны по Парето: $\boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 7) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in \boldsymbol{S}$ посредством вектора:

$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1,K}\}$, формироваться и выбирать:

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q$, которое включено в допустимое множество точек $\boldsymbol{S}$, $\forall q \in \boldsymbol{K}\ X \in \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$,

Заметим, что соотношения: $\boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$ и $\forall q \in \boldsymbol{K}\ X \in \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$ могут использоваться в задачах кластеризации, но это выходит за рамки статьи;

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q^o$, который включен в ряд точек $\boldsymbol{S}^o$, оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in \boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S}^\circ$.

Таким образом, выполнена идентификация всех допустимых точек, оптимальных по Парето, в векторной задаче оптимизации в последовательности:

Множество допустимых точек $X \in \boldsymbol{S} \rightarrow$	Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S} \rightarrow$	Подмножество оптимальных точек приоритетом $q \in K$ $X \in \boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S} \rightarrow$	Отдельная точка, $\forall X \in \boldsymbol{S}$ $X \in \boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$

Это является наиболее важным результатом теории, который позволит вывести принцип оптимальности и построить методы выбора *любой точки* из множества точек, оптимальных по Парето.

2.3.3. Принцип оптимальности решения векторной задачи оптимизации с заданным приоритетом критерия

Определение 10. ***Принцип оптимальности 2***. Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия.

Векторная задача (2.1)– (2.4) с заданным приоритетом q-го критерия $p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1,K}$ считается решенной, если найдена точка X^o и максимальный уровень λ^o среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}} \boldsymbol{min}_{k \in \boldsymbol{K}} p_k^q \lambda_k(X), q \in \boldsymbol{K}. \quad (2.25)$$

Используя взаимосвязь (2.23) и (2.24), преобразуем максиминную задачу (2.25) в λ-задачу, которую назовем λ-задачей с приоритетом q-го критерия:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}} \lambda, \text{ при ограничениях } \lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1,K}. \quad (2.26)$$

В оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$, $\boldsymbol{X^o}$ – оптимальная точка, а λ^o – максимальный нижний уровень. Точка X^o и уровень λ^o соответствуют ограничениям (2.4), которые можно записать как: $\lambda^o \leq p_k^q \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$.

Теорема 2. Теорема о наиболее противоречивых критериях в векторной задаче с заданным приоритетом. Если в выпуклой векторной задаче математического программирования максимизации (2.1)- (2.4) задан приоритет q-го критерия $p_k^q, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, в точке оптимума $X^o \in \boldsymbol{S}$, полученной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, всегда найдется два критерия с индексами $r \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется строгое равенство из:

$$\lambda^\circ = p_k^r \lambda_r(X^\circ) = p_k^t \lambda_t(X^\circ), r, t, \in \boldsymbol{K}, \quad (2.27)$$

и другие критерии определяются неравенствами:

$$\lambda^\circ \leq p_k^q(X^\circ), k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}, q \neq r \neq t. \quad (2.28)$$

Критерии с индексами $r \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется равенство (2.27), называются наиболее противоречивыми.

2.3.4. Метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия.

Шаг 1. Решаем векторную задачу с равнозначными критериями. Алгоритм решения представлен в разделе 2.2.4. В результате решения получаем:

оптимальные точки по каждому критерию отдельно $X_k^*, k = \overline{1,K}$ и размеры критериальных функций в этих точках $f_k^* = f_k\ (X_k^*), k\ =\ \overline{1,K}$;

точки анти оптимума по каждому критерию $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1,N}$ и наихудшей неизменной части каждого критерия$f_k^0 = f_k\ (X_k^0), k = \overline{1,K}$;

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$ оптимальная точка, как результат решения VPMP.

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями. Если полученные результаты удовлетворяют лицо, принимающее решение, то конец, иначе выполняются последующие расчеты.

Дополнительно вычислим: в каждой точке $X_k^*, k = \overline{1,K}$ определим величины всех критериев $f_k^* = f_k\ (X_k^*), k = \overline{1,K}$, которые представляют границу множества Парето, и относительных оценок: $\lambda\ (X^*)\ =\ \{\lambda_q\ (X_k^*), q\ = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\}, \lambda_k\ (X)\ = \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$:

$$F\ (X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*) \dots f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*) \dots f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \lambda\ (X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*) \dots \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*) \dots \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \qquad (2.29)$$

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории (см. теорему 1) известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия $q \in \boldsymbol{K}$ и $v \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство: $\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_v(X^o), q, v \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$, а для остальных: $\lambda^o \le \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \ne v \ne k$.

Как правило, из этой пары выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить, такой критерий называется «приоритетным критерием»: $q \in \boldsymbol{K}$.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$ из матрицы (2.29) определим числовые пределы изменения величины критерия: в натуральных единицах $f_q\ (X)$ и в относительных единицах $\lambda_q\ (X)$, которые лежат в пределах:

$$f_k(X^o) \le f_q\ (X) \le f_q\ (X_q^*), k \in \boldsymbol{K},$$
$$\lambda_k(X^o) \le \lambda_q\ (X) \le \lambda_q\ (X_q^*), k \in \boldsymbol{K}, \qquad (2.30)$$

где $\lambda_q\ (X_q^*)$ выводится из матрицы $\lambda\ (X^*)$, все критерии показывают размеры, измеренные в относительных единицах (отметим, что $\lambda_q\ (X_q^*) = 1), \lambda_q\ (X^o)$.

Выражения (2.30) выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия (Принятие решения). ЛПР проводит анализ результатов расчетов (2.30) и выбирает числовую величину f_q, $q \in \boldsymbol{K}$: $f_q(X^o) \le f_q \le f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}$. Для выбранной величины критерия f_q необходимо определить вектор неизвестных X^{oo}, для этого проводим последующие вычисления.

Шаг 5. Расчет относительной оценки: $\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0}$, которая при переходе от точки X^o к X_q^*, в соответствии с (2.30): $\lambda_q\ (X^o) \le \lambda_q \le \lambda_q\ (X_q^*) = 1$.

Шаг 6. Вычисление коэффициента линейной аппроксимации.

Используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности ρ между $\lambda_q(X^o), \lambda_q$: $\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q (X^o)}{\lambda_q^* - \lambda_q^0}, q \in \boldsymbol{K},$

Шаг 7. Вычисление координат приоритетного критерия f_q.

Координаты точки приоритетного критерия X_q лежат в следующих пределах: $X^o \le X_q \le X_q^*, q \in \boldsymbol{K}.$ Предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1^q, \dots, x_N^q\}$ определим координаты точки приоритетного критерия с величиной f_q с относительной оценкой $\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0}$:

$X_q = \{x_1^q = x_1^o + \rho\,(x_q^*\,(1) - x_1^o), \dots, x_N^q = x_N^o + \rho\,(x_q^*\,(N) - x_N^o)\},$

где $X^o = \{x_1^o, \dots, x_N^o\}$, $X_q^* = \{x_q^*\,(1), \dots, x_q^*\,(N)\}$.

Шаг 8. Вычисление основных показателей точки X_q.

Для полученной точки $X_q = \{x_{qj}, j = \overline{1, N}\}$, вычислим:

все критерии в натуральных единицах: $F^q = \{f_k(X_q), k = \overline{1, K}\}$;

все относительные оценки критериев:

$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k\,(x^q) = \frac{f_k\,(X_q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$;

минимальную относительную оценку: $\lambda^{oq} = \min\,(p_k^q\,\lambda_k\,(X_q), k = \overline{1, K})$.

Аналогично рассчитывается любая точка по Парето: $\boldsymbol{X_t^o} = \{\boldsymbol{\lambda_t^o}, \boldsymbol{X_t^o}\} \in \boldsymbol{S^o}$.

Анализ результатов. Рассчитанная величина критерия $f_q\,(X_t^o), q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной f_q. Ошибка выбора: $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q|$ определяется ошибкой линейной аппроксимации [16, 19, 27, 28].

Заключение по теории и аксиоматике векторной оптимизации.

Представленная теория, аксиоматика, принципы оптимальности являются дальнейшим развитием аксиоматического подхода, заложенного в знаменитом сочинении «Начала», древнегреческого ученого Евклида, который представил аксиомы для одно мерной математики. Это нашло отражение в теории оптимизации с одним критерием. Аксиоматика (Машунина Ю.К.), изложенная в работе, направлена на системное с множеством функций (критериев) исследование объектов, процессов и инженерных систем. При этом исследование (оптимизация) по каждому критерию ведется не в натуральных, а в относительных единицах от 0 (нуля) до 1 (единицы) или (для экономистов) от нуля до 100% на исследуемом континууме. При таком подходе стандартная оптимизация с одним критерием на замкнутом, не пустом множестве точек является частным вариантом, векторной оптимизации, где оптимизация идет от 0 до 1 (100%), при этом известно, что понимается под 0, и, что под 1 (первый шаг алгоритма).

3. Прикладная многомерная математика: Векторная задача нелинейного программирования – модель исследования инженерных систем.

В этом разделе мы рассматриваем отдельную задачу многомерной математики: векторную задачу нелинейного программирования. Математическое и программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования, решение которой при равнозначных критериях представлен в разделе 2.2.3 и при заданном приоритете критерия в разделе 2.3.3. [15, 29, 31, 33].

3.1. Векторная задача нелинейного программирования

Векторная задача нелинейного программирования (ВЗНП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев. подразделяются на однородные и неоднородные ВЗНП.

Однородная ВЗНП максимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

Однородные ВЗНП минимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

Неоднородные ВЗНП – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗНП – это объединение двух видов однородных задач нелинейного программирования. В соответствии с этими определениями представим векторную задачу нелинейного программирования с неоднородными критериями.

$$Opt\, F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X) = c_{0k} + c_{1k}x_1 + \cdots + c_{N+1,k}x_1x_2 + \cdots + c_{n1,k}x_1^2 + \cdots + c_{nnk}x_n^2, k = \overline{1, K_1}, \quad (3.1)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X) = c_{0k} + c_{1k}x_1 + \cdots + c_{N+1,k}x_1x_2 + \cdots + c_{n1,k}x_1^2 + \cdots + c_{nnk}x_n^2, k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (3.2)$$

$$a_{0k} + a_{1i}x_1 + \cdots + a_{N+1,i}x_1x_2 + \cdots + a_{n1,i}x_1^2 + \cdots + a_{nni}x_n^2 \leq b_i, i = \overline{1, M}, \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j\,(t) \geq b_k(t), k \in K, \quad (3.4)$$

$$0 \leq x_j\,(t) \leq u_j, j = \overline{1, N}, \quad (3.5)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, т.е. это вектор из N-мерного евклидова пространства R^N, (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = (1, \ldots, N)$;

$F(X)$- вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций. Функция представляет квадратичный полином.

Множество критериев (полиномов) K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации: $K = K_1 \cup K_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя max и min;

$$F_1(X) = \{max\, f_k(X), k = \overline{1, K_1} - \quad (3.6)$$

это векторный критерий (4.1), каждая компонента которого максимизирует, K_1 – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$- множество критериев максимизации (задача (3.1), (3.3)- (3.4) представляют собой ВЗНП с однородными критериями максимизации);

$$F_2(X) = \{min\, f_k(X), k = \overline{1, K_2} - \quad (3.7)$$

векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ – множество критериев минимизации, K_2 – число критериев, (задача (3.2), (3.3)- (3.4) это ВЗНП с однородными критериями минимизации):

$$K_1 \cup K_2 = K,\, K_1 \subset K,\, K_2 \subset K. \quad (3.8)$$

(3.3) – стандартные нелинейные ограничения (в виде полиномов):

$$a_{0k} + a_{1i}x_1 + \cdots + a_{N+1,i}x_1x_2 + \cdots + a_{n1,i}x_1^2 + \cdots + a_{nni}x_n^2 \leq b_i, i = \overline{1, M}, \quad (3.9)$$

(3.4) – ограничения, накладываемые на критерии.

$$S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset - \quad (3.10)$$

это допустимое множество точек, задающиеся стандартными ограничениями (3.3)- (3.4) и тривиальными ограничениями $0 \leq x_j\,(t) \leq u_j, j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт. Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$ может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2\,(X)$ введен в ВЗНП (3.1)- (3.4) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев K_1, K_2 с принципиально различными направлениями оптимизации.

Векторная задача нелинейного программирования (3.1)- (3.5) может рассматриваться как K-мерная задача оптимизации, где размерность критериев $K = K_1 \cup K_2$, с множеством параметров N.

3.2. Структура и текст программного обеспечения решения векторной задачи линейного программирования

3.2.1. Структура программного обеспечения решения векторной задачи нелинейного программирования

Для решения векторной задачи нелинейного программирования (3.1)- (3.4) при равнозначных критериях разработана программа в системе MATLAB с четырьмя критериями (3.6) и двумя параметрами, которая по существу представляет программу – шаблон для написания и решения других векторных задач нелинейного программирования (3.1)- (3.4) – математических моделей инженерных систем [29, 31, 33]. Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования (3.1)- (3.4) при равнозначных критериях реализовано на основе алгоритма решения ВЗНП, изложенного в разделе 2.2 и использования программы FMINCON (…), представленной в системе MATLAB.

При использовании программы FMINCON (…) необходимо разработать две подпрограммы – функции:

Первая функция включает ***два блока***: первый блок предназначен для оценки в точке X критерия $f_k\ (X), \forall k \in K$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{df_k(X)}{\mathrm{d}X}\ \forall k \in$К**;**

Вторая функция включает те же ***два блока*** только для ограничений: для оценки в точке X ограничения $g_i\ (X), \forall i \in M$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{dg_i(X)}{\mathrm{d}X}\ \forall i \in M$.

Программа FMINCON (…) используется на первом шаге алгоритма решения ВЗНП раздела 2.2.3 (максимизации критериев) и на втором шаге этого алгоритма (минимизации критериев). В дальнейшем Программа FMINCON (…) используется в соответствии с алгоритмом раздела 2.2.3 на 4 и 5 шаге, где решается λ-задача.

В целом при нелинейных ограничениях программное обеспечение решения ВЗНП включает: К*2 (1 шаг) + К*2 (2 шага)+2 (λ-задача) обращений к функции FMINCON (…). Так как критерии и ограничения ВЗНП индивидуальны, то для каждой ВЗНП пишется индивидуальное программное обеспечение, но по структуре аналогично представленному программному обеспечению.

Для решения ВЗНП (3.1)- (3.4) разработанная программа в [33] представляет программу – шаблон для написания и решения других ВЗНП – математических моделей инженерных систем.

3.2.2. Математическая (числовая) постановка векторной задачи нелинейного программирования (подготовка исходной информации)

Дано. Рассматривается векторная задача нелинейного (выпуклого) программирования с четырьмя однородными критериями.

$opt\ F\ (X) = \{min\ F_2(X) = min\ f_1(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + \ (x_2 - 80)^2$, (3.11)

$min\ f_2(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + \ (x_2 - 20)^2$, (3.12)

$min\ f_3(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + \ (x_2 - 20)^2$, (3.13)

$min\ f_4(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + \ (x_2 - 80)^2$, (3.14)

при ограничениях $0 \le x_1 \le 100,\ 0 \le x_2 \le 100$. (3.15)

Требуется определить. Разработать программное обеспечение в MATLAB решения векторной задачи нелинейного программирования, решить задачу (3.11)- (3.15).

3.3. Текст решения векторной задачи нелинейного программирования при равнозначных критериях в системе MATLAB

Для решения ВЗНП (3.11)- (3.15) ниже представлена программа, которая представляет ***программу – шаблон*** для написания и решения других ВЗНП – моделей инженерных систем. Запись программы в формате MATLAB.

```
% Программа "Решение векторной задачи нелинейного программирования":
function [x,f] = VPNP_2_4Krit_100 (x)
% Автор: Машунин Юрий Константинович (Mashunun Yu. K.)
% Алгоритм и программа предназначена для использования в образовании и научных
% исследованиях, для коммерческого использования обращаться: Mashunin@mail.ru
% Algorithm VPNP: 4Kritery + L-zadaha
% [X,Fval,EXITFLAG,OUTPUT,LAMBDA,GRAD,HESSIAN]=
% FMINCON (FUN,Xo,A,b,Aeq,beq, lb,ub,nonlcon,options,P1,P2,...)
disp ('*** Шаг 0. Блок Исходных данных. ВЗНП:***')
disp ('opt F (X)={max F1 (X)={min f1= (x1-80).^2+ (x2-80).^2; ')
disp (' min f2= (x1-80).^2+ (x2-20).^2; ')
disp (' min f3= (x1-20).^2+ (x2-20).^2; ')
disp (' min f4= (x1-20).^2+ (x2-80).^2; ')
disp (' 0<=x1<=100, 0<=x2<=100 ')
lb= [0. 0.]; ub= [100. 100.]; Xo= [0. 0.];
options=optimset ('LargeScale','off');
options=optimset (options,'GradObj','on','GradConst','off');
A= [1 0; 0 1];
b= [100 100];
Aeq= []; beq= [];
XoK1max= [0. 0.];
disp ('*** Шаг 1. Решение по каждому критерию (наилучшее) ***')%
[x1max,f1max] = fmincon ('VPNP_2_Krit1max',XoK1max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X1max] = VPNP_2_Krit1min (x1max)
[f2X1max] = VPNP_2_Krit2min (x1max)
[f3X1max] = VPNP_2_Krit3min (x1max)
[f4X1max] = VPNP_2_Krit4min (x1max)
XoK2max= [0. 0.];
[x2max,f2max] = fmincon ('VPNP_2_Krit2max',XoK2max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X2max] = VPNP_2_Krit1min (x2max)
[f2X2max] = VPNP_2_Krit2min (x2max)
[f3X2max] = VPNP_2_Krit3min (x2max)
[f4X2max] = VPNP_2_Krit4min (x2max)
XoK3max= [0. 0.];
[x3max,f3max] = fmincon ('VPNP_2_Krit3max',XoK3max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X3max] = VPNP_2_Krit1min (x3max)
[f2X3max] = VPNP_2_Krit2min (x3max)
[f3X3max] = VPNP_2_Krit3min (x3max)
[f4X3max] = VPNP_2_Krit4min (x3max)
XoK4max= [0. 0.];
[x4max,f4max] = fmincon ('VPNP_2_Krit4max',XoK4max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X4max] = VPNP_2_Krit1min (x4max)
[f2X4max] = VPNP_2_Krit2min (x4max)
[f3X4max] = VPNP_2_Krit3min (x4max)
[f4X4max] = VPNP_2_Krit4min (x4max)
```

```
disp ('*** Шаг 2. Решение по каждому критерию (наихудшее) ***')%
XoK1min= [0. 0.];
[x1min,f1min] = fmincon ('VPNP_2_Krit1min',XoK1min,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X1min] = VPNP_2_Krit1min (x1min)
[f2X1min] = VPNP_2_Krit2min (x1min)
[f3X1min] = VPNP_2_Krit3min (x1min)
[f4X1min] = VPNP_2_Krit4min (x1min)
[x2min,f2min] = fmincon ('VPNP_2_Krit2min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X2min] = VPNP_2_Krit1min (x2min)
[f2X2min] = VPNP_2_Krit2min (x2min)
[f3X2min] = VPNP_2_Krit3min (x2min)
[f4X2min] = VPNP_2_Krit4min (x2min)
[x3min,f3min] = fmincon ('VPNP_2_Krit3min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X3min] = VPNP_2_Krit1min (x3min)
[f2X3min] = VPNP_2_Krit2min (x3min)
[f3X3min] = VPNP_2_Krit3min (x3min)
[f4X3min] = VPNP_2_Krit4min (x3min)
[x4min,f4min] = fmincon ('VPNP_2_Krit4min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X4min] = VPNP_2_Krit1min (x4min)
[f2X4min] = VPNP_2_Krit2min (x4min)
[f3X4min] = VPNP_2_Krit3min (x4min)
[f4X4min] = VPNP_2_Krit4min (x4min)
disp ('*** Шаг 3. Системный анализ результатов ***')%
disp ('Оценка критериев в точках оптимума: X1min,X2min,X3min,X4min')%
F= [f1X1min f2X1min f3X1min f4X1min;
f1X2min f2X2min f3X2min f4X2min;
f1X3min f2X3min f3X3min f4X3min;
f1X4min f2X4min f3X4min f4X4min].
d1=f1X1min-f1X1max
d2=f2X2min-f2X2max
d3=f3X3min-f3X3max
d4=f4X4min-f4X4max
disp ('Оценка критериев в относительных единицах: X1min,X2min,X3min,X4min')%
L= [(f1X1min-f1X1max)/d1 (f2X1min-f2X2max)/d2 (f3X1min-f3X3max)/d3 (f4X1min-f4X4max)/d4;
(f1X2min-f1X1max)/d1 (f2X2min-f2X2max)/d2 (f3X2min-f3X3max)/d3 (f4X2min-f4X4max)/d4;
(f1X3min-f1X1max)/d1 (f2X3min-f2X2max)/d2 (f3X3min-f3X3max)/d3 (f4X3min-f4X4max)/d4;
(f1X4min-f1X1max)/d1 (f2X4min-f2X2max)/d2 (f3X4min-f3X3max)/d3 (f4X4min-f4X4max)/d4]
disp ('*** Шаг 4. Построение L-задачи ***')%
Ao= [1 0 0;
0 1 0];
bo= [100 100]; Aeq= []; beq= [];
Xoo= [0 0 0]
lbo= [0. 0. 0.]
ubo= [100. 100. 1]
```

```
disp ('*** Шаг 5. Решение L-задачи ***')%
[Xo,Lo]=fmincon ('VPNP_2_L',Xoo,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'VPNP_2_LConst')
disp ('Оценка критериев в точке оптимума Xo')%
[f1Xo] = VPNP_2_Krit1min (Xo (1:2))
[f2Xo] = VPNP_2_Krit2min (Xo (1:2))
[f3Xo] = VPNP_2_Krit3min (Xo (1:2))
[f4Xo] = VPNP_2_Krit4min (Xo (1:2))
disp ('Оценка критериев в точке оптимума Xo в относительных единицах')%
L1Xo= (f1Xo+f1max)/d1
L2Xo= (f2Xo+f2max)/d2
L3Xo= (f3Xo+f3max)/d3
L4Xo= (f4Xo+f4max)/d4 % ****Конец*********
% [Программа "Расчет 1 критер. – max"] файл: VPNP_2_Krit1max
function [f,G] = VPNP_2_Krit1max (x)
f=- (x (1)-80).^2- (x (2)-80).^2; %Расчет функции – критерий 1
G= [-2* (x (1)-80), -2* (x (2)-80)];%Расчет 1 производной критерия 1
% [Программа "Расчет 1 критер. – min"] Файл: VPNP_2_Krit1min
function [f,G] = VPNP_2_Krit1min (x);
f= (x (1)-80).^2+ (x (2)-80).^2;
G= [2* (x (1)-80); 2* (x (2)-80)];
% [Программа "Расчет 2 критер. – max"] Файл: VPNP_2_Krit2max
function [f,G] = VPNP_2_Krit2max (x);
f=- (x (1)-80).^2- (x (2)-20).^2;
G= [-2* (x (1)-80); -2* (x (2)-20)];
% [Программа "Расчет критер. 2 – min"] Файл: VPNP_2_Krit2min
function [f,G] =VPNP_2_Krit2min (x);
f= (x (1)-80).^2+ (x (2)-20).^2;
G= [2* (x (1)-80); 2* (x (2)-20)];
% [Программа "Расчет 3 критер. – max"] Файл: VPNP_2_Krit3max
function [f,G] = VPNP_2_Krit3max (x);
f=- (x (1)-20).^2- (x (2)-20).^2;
G= [-2* (x (1)-20); -2* (x (2)-20)];
% [Программа "Расчет 3 критер. – min"] Файл: VPNP_2_Krit3min
function [f,G] = VPNP_2_Krit3min (x);
f= (x (1)-20).^2+ (x (2)-20).^2;
G= [2* (x (1)-20); 2* (x (2)-20)];
% [Программа "Расчет 4 критер. – max"] Файл:VPNP_2_Krit4max
function [f,G] = VPNP_2_Krit4max (x);
f=- (x (1)-20).^2- (x (2)-80).^2;
G= [-2* (x (1)-20); -2* (x (2)-80)];
% [Программа "Расчет 4 критер. – max"] Файл:VPNP_2_Krit4max
function [f,G] = VPNP_2_Krit4max (x);
f=- (x (1)-20).^2- (x (2)-80).^2;
G= [-2* (x (1)-20); -2* (x (2)-80)];
% [Программа "Расчет критер. L-задачи"] файл: VPNP_2_L
function [f,G] = VPNP_2_L (x)
f=-x (3);
G= [0; 0; -1];
```

```
% [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: VPNP_1_LConst
function [c,ceq,DC,DCeq]= VPNP_2_LConst (x)
d1=12800;d2=12800;d3=12800;d4=12800;
f1X1max=12800;f2X2max=12800;f3X3max=12800;f4X4max=12800;
c (1)= ((x (1)-80).^2+ (x (2)-80).^2)/d1+x (3)-f1X1max/d1;
c (2)= ((x (1)-80).^2+ (x (2)-20).^2)/d2+x (3)-f2X2max/d2;
c (3)= ((x (1)-20).^2+ (x (2)-20).^2)/d3+x (3)-f3X3max/d3;
c (4)= ((x (1)-20).^2+ (x (2)-80).^2)/d4+x (3)-f4X4max/d4;
G1= [2* (x (1)-80)/d1, 2* (x (1)-80)/d2, 2* (x (1)-20)/d3, 2* (x (1)-20)/d4;
2* (x (2)-80)/d1, 2* (x (2)-20)/d2, 2* (x (2)-20)/d3, 2* (x (2)-80)/d4;
1.0, 1.0, 1.0, 1.0];
ceq= []; DCeq= []; % *****Конец*****
```

3.4. Процесс моделирования и принятия оптимальных решений развития инженерных систем базе векторной задачи нелинейного программирования

Процесс моделирования развития инженерных систем в различных областях исследований, базируется на системной (векторной) оптимизации принятия решений. Методология процесса принятия оптимальных решений в общем виде инженерных систем на базе векторной оптимизации включает три этапа.

1. этап. Решение векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях. Полученный результат является основой для дальнейшего исследования системы. При этом используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях, представленный в 2.2.3. Если полученный результат удовлетворяет лицу, принимающего решения, (ЛПР – проектировщик), то он берется за основу. Если не удовлетворяет, то переходим ко второму этапу (прямая задача) или третьему этапу (Обратная задача).

2. этап. Решение прямой задачи векторной оптимизации, которая состоит в следующем: «Какие будут показатели (характеристики), если изменить параметры системы». – Используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях, представленный в разделе 2.2.3.

3. этап. Решение обратной задач векторной оптимизации, которая состоит в следующем: «Какие будут параметры системы при заданных показателях (характеристиках) системы». – Используется метод решения векторной задачи при заданном приоритете критерия, представленный в разделе 2.3.3.

4. Моделирование и выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определённости и неопределённости базе векторной задачи нелинейного программирования

Технологию процесса моделирования и выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определённости и неопределённости представим на примере векторной задачи нелинейного (выпуклого) программирования с четырьмя однородными критериями (3.1)- (3.5) и двумя параметрами в три этапа раздела 3.2.3.

$$Opt\, F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1}, \tag{4.1}$$

$$min\, F_2(X) = \{min\, f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}\}, \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_i^k x_j\ (t) \leq b_i, i = \overline{1, M}, \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j\ (t) \geq b_k(t), k \in K, \tag{4.4}$$

$$0 \leq x_j\ (t) \leq u_j, j = \overline{1, N}, \tag{4.5}$$

где $F(X)$- вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций. Функция представляет квадратичный полином.

Множество критериев (полиномов) K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации: $K = K_1 \cup K_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя max и min;

$$F_1(X) = \{max\ f_k(X), k = \overline{1, K_1} - \qquad (4.6)$$

это векторный критерий (4.1), каждая компонента которого максимизирует, K_1 – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$- множество критериев максимизации (задача (4.1), (4.3)- (4.4) представляют собой ВЗНП с однородными критериями максимизации);

$$F_2(X) = \{min\ f_k(X), k = \overline{1, K_2} - \qquad (4.7)$$

векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ – множество критериев минимизации, K_2 – число критериев, (задача (4.2), (4.3)- (4.4) это ВЗНП с однородными критериями минимизации):

$$K_1 \cup K_2 = K,\ K_1 \subset K,\ K_2 \subset K. \qquad (4.8)$$

(4.3) – стандартные нелинейные ограничения (в виде полиномов):

$$a_{0k} + a_{1i}x_1 + \cdots + a_{N+1,i}x_1x_2 + \cdots + a_{n1,i}x_1^2 + \cdots + a_{nni}x_n^2 \le b_i, i = \overline{1, M}, \qquad (4.9)$$

(4.4) – ограничения, накладываемые на критерии.

$$S = \{X \in R^n | G(X) \le 0, X^{min} \le X \le X^{max}\} \ne \emptyset - \qquad (4.10)$$

это допустимое множество точек, задающиеся стандартными ограничениями (3.3)- (3.4) и тривиальными ограничениями $0 \le x_j\ (t) \le u_j, j = \overline{1, N}$.

4.2.0. Этап 0. Исходные данные для решение векторной задачи математического программирования – модели инженерной системы

Дано. Рассматривается модель инженерной системы в виде векторной задачи нелинейного (выпуклого) программирования (4.1)- (4.5) с четырьмя однородными критериями $f_1(X), \dots, f_4(X)$ и двумя параметрами x_1, x_2.

$opt\ F\ (X) = \{min\ F_2(X) = min\ f_1(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 80)^2$, (4.11)

$min\ f_2(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 20)^2$, (4.12)

$min\ f_3(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2$, (4.13)

$min\ f_4(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 80)^2\}$, (4.14)

при ограничениях $0 \le x_1 \le 100,\ 0 \le x_2 \le 100$. (4.15)

Требуется определить. Разработать программное обеспечение в MATLAB решения векторной задачи нелинейного программирования и решить задачу (4.11)- (4.15) в соответствии с методикой раздела 4.1.3.

ВЗНП (4.11)- (4.15) представляет четырехмерную математическую (нелинейную) задачу с двумя параметрами.

4.1. Этап 1. Решение векторной задачи математического программирования – модели инженерной системы при равнозначных критериях

Для решения ВЗНП (4.11)- (4.15) с равнозначными критериями в разделе 2.2.3 разработана программа (раздел 4.1.2), которая по существу представляет программу – шаблон для написания и решения других векторных задач нелинейного программирования – математических моделей инженерных систем.

Решение представлено, как последовательность шагов.

Шаг 1. Решается ВЗМП (4.11)- (4.15) на max по каждому критерию. Результаты решения векторной задачи (4.11)- (4.15) по каждому критерию:

1 критерий: $X_1^* = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -12800$;

2 критерий: $X_2^* = \{x_1 = 0, x_2 = 100\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -12800$;

3 критерий: $X_3^* = \{x_1 = 100, x_2 = 100\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -12800$;

4 критерий: $X_4^* = \{x_1 = 100, x_2 = 0\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = -12800$;

Шаг 2. Решается векторная задача (4.11)- (4.15) на min по каждому критерию.

Результаты решения ВЗМП (4.11)- (4.15) по каждому критерию:

1 критерий: $X_1^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 80\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 0$:

2 критерий: $X_2^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 20\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 0$:

3 критерий: $X_3^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 20\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = 0$:

4 критерий: $X_4^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 80\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = 0$:

Представим геометрическую интерпретацию ограничений ВЗНП (4.11)- (4.15) и результатов решения на рис. 4.1.

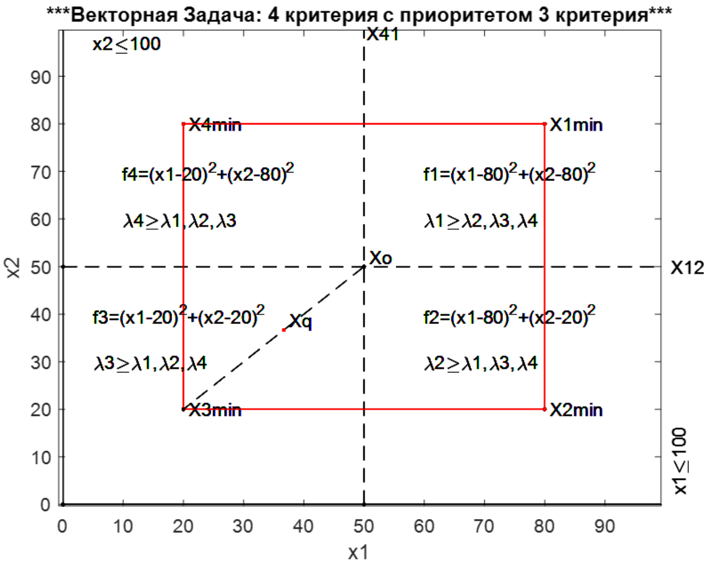

Рис. 4.1. Допустимое множество точек – ограничения ВЗМП (4.11)- (4.15) $\boldsymbol{S}$; множество точек оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o}$, ограниченное точками $\{X_1^* = X1min, X_2^* = X2min, X_3^* = X3min, X_4^* = X4min\}$, $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ и точка оптимума X^o.

Шаг 3. Системный анализ множества точек Парето.

Точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ представляют множество Парето, которое выделено на рис. 4.1 красным цветом. В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$, определяются величины целевых функций F (X^*) и относительных оценок λ (X^*):

$F(X^*) = \{\{f_q(X_k^*), q = \overline{1, K}\}, k = \overline{1, K}\}$,

$\lambda(X^*) = \{\{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}\}, k = \overline{1, K}\}$,

Результат системного анализа представляет:

во-первых, точки оптимума $\{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$, которые в дальнейшем определяют параметры исследуемой системы;

во-вторых, величины всех критериев в этих точках оптимума: X1min=X_1^*, X2min=X_2^*, X3min=X_3^*, X4min=X_4^* (которые в дальнейшем будут характеризовать характеристики исследуемой системы):

$$F\ (X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*)\ f_2(X_1^*)\ f_3(X_1^*)\ f_4(X_1^*) \\ f_1(X_2^*)\ f_2(X_2^*)\ f_3(X_2^*)\ f_4(X_2^*) \\ f_1(X_3^*)\ f_2(X_3^*)\ f_3(X_3^*)\ f_4(X_3^*) \\ f_1(X_4^*)\ f_2(X_4^*)\ f_3(X_4^*)\ f_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0\ 3600\ 7200\ 3600 \\ 3600\ 0\ 3600\ 7200 \\ 7200\ 3600\ 0\ 3600 \\ 3600\ 7200\ 3600\ 0 \end{vmatrix},$$

в-третьих, величины всех критериев в относительных единицах этих точках оптимума: X1min=X_1^*, X2min=X_2^*, X3min=X_3^*, X4min=X_4^* (которые в дальнейшем будут представлять характеристики системы в относительных единицах):

$$\lambda\,(X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*)\ \lambda_2(X_1^*)\ \lambda_3(X_1^*)\ \lambda_4(X_1^*) \\ \lambda_1(X_2^*)\ \lambda_2(X_2^*)\ \lambda_3(X_2^*)\ \lambda_4(X_2^*) \\ \lambda_1(X_3^*)\ \lambda_2(X_3^*)\ \lambda_3(X_3^*)\ \lambda_4(X_4^*) \\ \lambda_1(X_4^*)\ \lambda_2(X_4^*)\ \lambda_3(X_4^*)\ \lambda_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1.0}\ 0.7188\ 0.4375\ 0.7188 \\ 0.7188\ \mathbf{1.0}\ 0.7188\ 0.4375 \\ 0.4375\ 0.7188\ \mathbf{1.0}\ 0.7188 \\ 0.7188\ 0.4375\ 0.7188\ \mathbf{1.0} \end{vmatrix}.$$

В точках оптимума $X_k^*, k=\overline{1,K}$ все нормализованные критерии (относительные оценки) равны единице: $\lambda_k(X_k^*) = \frac{f_k\,(X_k^*)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0} = 1, k=\ \overline{1,K}, K=4$.

А в точках оптимума $X_k^0, k=\overline{1,K}$ относительные оценки равны нулю: $\lambda_k(X_k^0) = \frac{f_k\,(X_k^0)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0} = 0, k=\ \overline{1,K}, K=4$. Отсюда $\forall k \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}, 0 \le \lambda_k\ (X) \le 1$.

Шаг 4. Построение λ-задачи.

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}}\,\lambda, \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{\lambda} - \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0} \le 0, k=\overline{1,K}, K=3,$$

$$G\,(X) \le B, X \ge \mathbf{0}, - \tag{4.15}$$

Шаг 5. Решение λ-задачи (4.16). В результате решения λ-задачи получим:

Xo=X^o={x_1=50.0, x_2= 50.0, x_3=0.8594} – точка оптимума, где x_3=λ^o;

а x_1, x_2 соответствует x_1, x_2 задачи (4.11)- (4.15);

Lo = λ^o= 0.8594 представляет оптимальное значение целевой функции.

Функции относительных оценок $\lambda_1\ (X), \lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X), \lambda_4\ (X)$, а также точки оптимума X^o и λ^o, которые получены на их пересечении, в трех мерной системе координат x_1, x_2, λ показаны на рис. 4.2. Точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ (на рисунке X1min=X_1^*, X2min=X_2^*, X3min=X_3^*, X4min=X_4^*) представляют множество Парето, которое выделено на рис. 4.2 синим цветом.

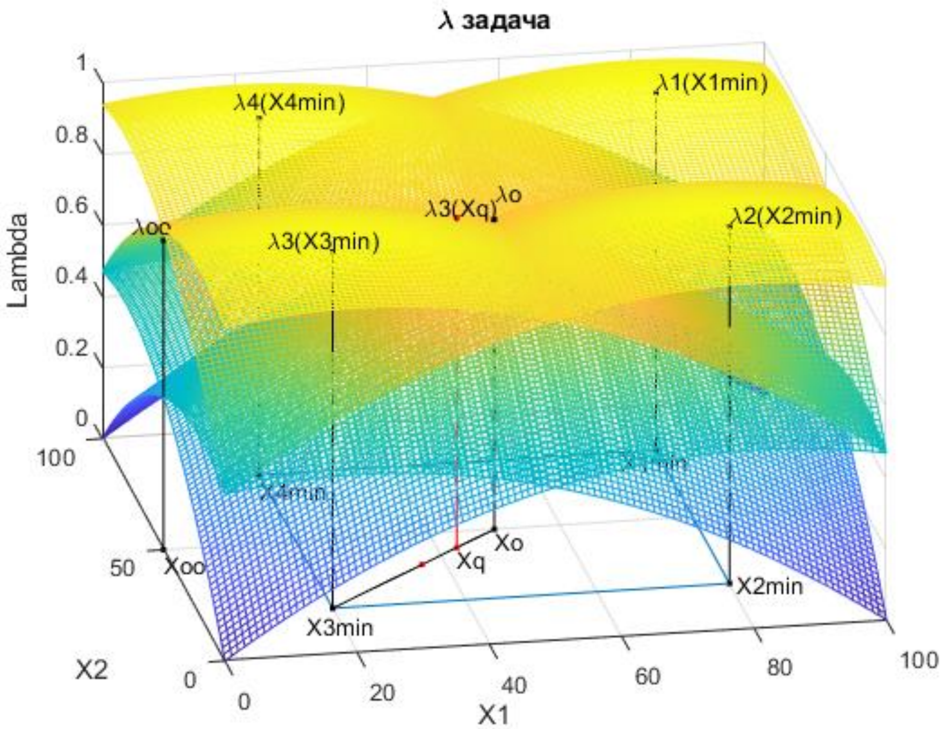

Рис. 4.2. Функции $\lambda_1\ (X), \lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X), \lambda_4\ (X)$, точки оптимума X^o и λ^o.

Заметим, что ВЗНП (4.11)- (3.15) на рис. 4.2 представляет четырехмерную математическую задачу с двумя параметрами. Однокритериальная математика такой информации представить не может.

На рис. 4.1, 4.2 видно, что область (множество точек) ограниченная точками $\boldsymbol{S_q} = \{X_1^* = X_{1opt}X_{12}X^oX_{41}\}$ характеризуется тем, что $\lambda_1(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{2,4}, X \in \boldsymbol{S_1}$, (на рис. 4.1 показано, как λ1>λ2, λ3, λ4), т. е. область $\boldsymbol{S_{q=1}}$ приоритетна по первому критерию. В этой области приоритет первого критерия относительно остальных всегда больше или равен единице: $p_k^1(X) = \lambda_1(X)/\lambda_k(X) \geq 1, \forall X \in \boldsymbol{S_1}$.

Аналогично показаны области (множества точек) приоритетные по соответствующему критерию, в совокупности они дают множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o}$: $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o} \cup X^o, \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$.

Для наглядности представим отдельно на рис. 4.3 функции критериев $\lambda_1(X)$ и $\lambda_3(X)$, а также точку оптимума с приоритетом третьего критерия X_q.

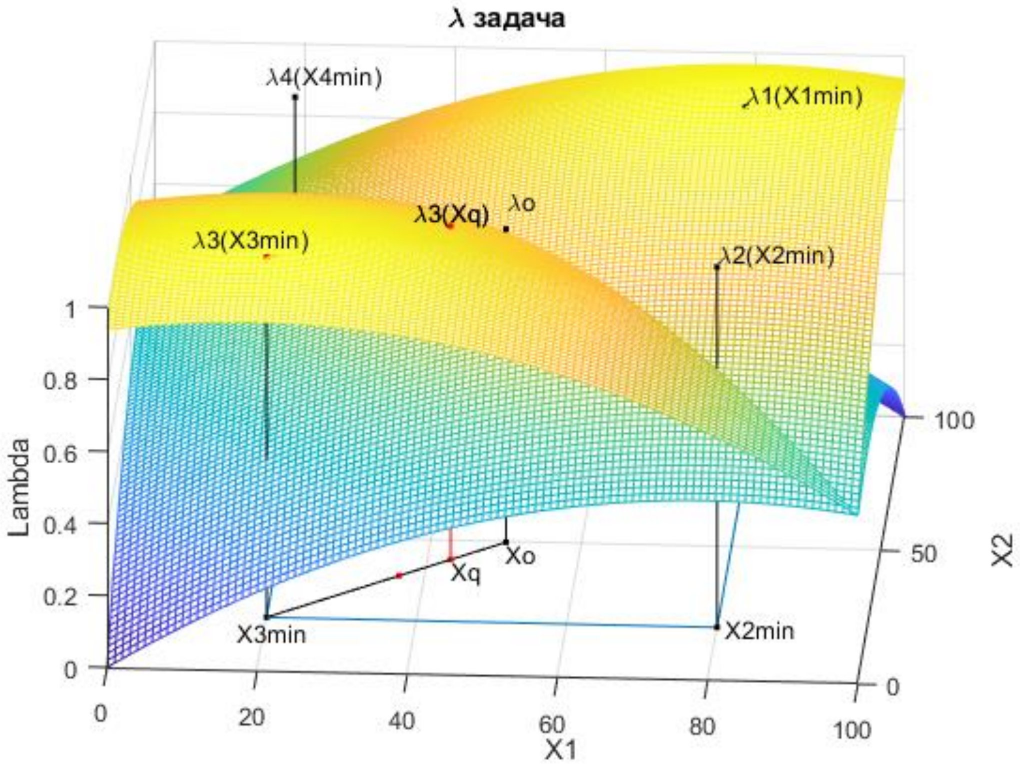

Рис. 4.3. Функции $\lambda_1(X), \lambda_3(X)$, точки оптимума X^o и λ^o и точку оптимума с приоритетом третьего критерия X_q.

Примем, что полученный результат не удовлетворяет лицу, принимающего решения, (ЛПР – проектировщик). Поэтому проведем дальнейшее исследование:

во-первых, при других параметрах, т.е. переходим в соответствии с методологией раздела 4.1.3 ко второму этапу (прямая задача);

во-вторых, проведем исследование с приоритетом одного из критериев (характеристики) – третий этап (Обратная задача).

4.2. Этап 2. Решение ВЗНП – модели инженерной системы с измененными параметрами.

Изменим параметры в ВЗНП (4.11)- (4.15): в критериях $f_k(X)$ 80 на 100, 20 на 0. В итоге векторная задача нелинейного программирования (4.11)- (4.15) – математическая модель инженерной системы примет следующий вид.

Этап 0. Исходные данные для решение векторной задачи математического программирования – модели инженерной системы

Дано. Рассматривается модель инженерной системы в виде векторной задачи нелинейного (выпуклого) программирования с четырьмя однородными критериями.

$$opt\ F\ (X) = \{min\ F_2(X) = min\ f_1(X) \equiv (x_1 - 100)^2 + (x_2 - 100)^2, \quad (4.17)$$

$$min\ f_2(X) \equiv (x_1 - 100)^2 + (x_2 - 0)^2, \quad (4.18)$$

$$min\ f_3(X) \equiv (x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2, \quad (4.19)$$

$$min\ f_4(X) \equiv (x_1 - 0)^2 + (x_2 - 100)^2\}, \quad (4.20)$$

$$\text{при ограничениях } 0 \le x_1 \le 100,\ 0 \le x_2 \le 100. \quad (4.21)$$

Требуется определить. Разработать программное обеспечение в MATLAB решения векторной задачи нелинейного программирования на базе программы раздела 2.4. Решить векторную задачу нелинейного программирования (4.17)- (4.21).

Результат решения.

1. *Системный анализ множества точек Парето.*

Точки оптимума $X_1^* = \{100\ 100\}, X_2^* = \{100\ 0\}, X_3^* = \{0\ 0\}, X_4^* = \{0\ 100\}$ представляют множество Парето, которое выделено красным цветом на рис. 4.4.

В точках оптимума: $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1,K}\}$, определяются величины целевых функций $F(X^*) = \{\{f_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K}\}$:

$$F\ (X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*)\ f_2(X_1^*)\ f_3(X_1^*)\ f_4(X_1^*) \\ f_1(X_2^*)\ f_2(X_2^*)\ f_3(X_2^*)\ f_4(X_2^*) \\ f_1(X_3^*)\ f_2(X_3^*)\ f_3(X_3^*)\ f_4(X_3^*) \\ f_1(X_4^*)\ f_2(X_4^*)\ f_3(X_4^*)\ f_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20000\ 10000\ 0.0000\ 10000 \\ 10000\ 20000\ 10000\ 0.0000 \\ 0.0000\ 10000\ 20000\ 10000 \\ 10000\ 0.0000\ 10000\ 20000 \end{vmatrix},$$

и относительных оценок $\lambda(X^*) = \{\{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K}\}$:

$$\lambda\ (X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*)\ \lambda_2(X_1^*)\ \lambda_3(X_1^*)\ \lambda_4(X_1^*) \\ \lambda_1(X_2^*)\ \lambda_2(X_2^*)\ \lambda_3(X_2^*)\ \lambda_4(X_2^*) \\ \lambda_1(X_3^*)\ \lambda_2(X_3^*)\ \lambda_3(X_3^*)\ \lambda_4(X_4^*) \\ \lambda_1(X_4^*)\ \lambda_2(X_4^*)\ \lambda_3(X_4^*)\ \lambda_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.000\ 0.500\ 0.000\ 0.500 \\ 0.500\ 1.000\ 0.500\ 0.000 \\ 0.000\ 0.500\ 1.000\ 0.500 \\ 0.500\ 0.000\ 0.500\ 1.000 \end{vmatrix}.$$

Сравним множество Парето на рис. 4.1 и рис. 4.2. На рисунке 4.1 множество Парето $\boldsymbol{S^o}$ представляет (выделено красным) часть $\boldsymbol{S}$ – допустимого множества точек: $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$. На рисунке 4.2 множество Парето $\boldsymbol{S^o}$ (выделено красным) равно $\boldsymbol{S}$ – допустимому множеству точек: $\boldsymbol{S^o} \subseteq \boldsymbol{S}$.

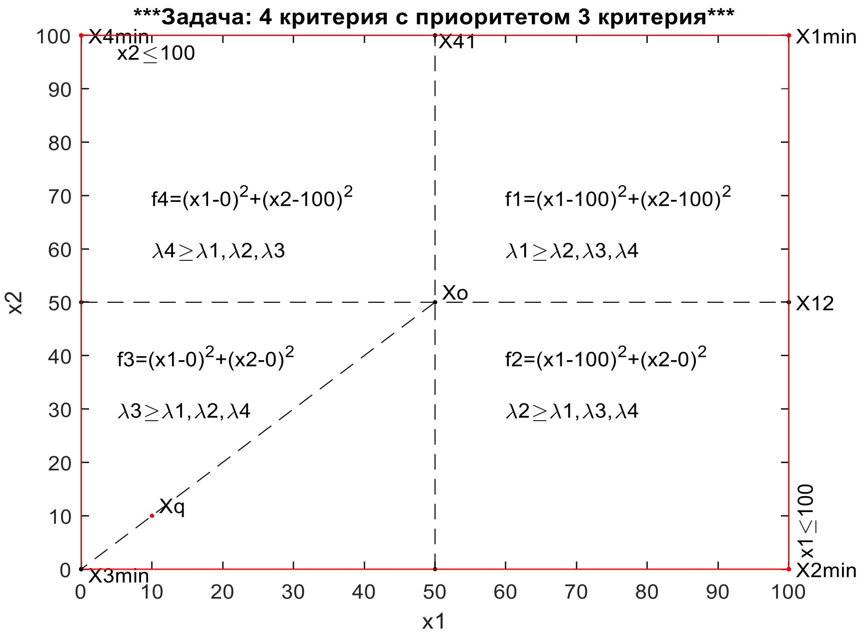

Рис. 4.4. Допустимое множество точек – ограничения ВЗМП (4.10) $\boldsymbol{S}$; множество точек оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o}$, ограниченное точками $\{X_1^* = X1min, X_2^* = X2min, X_3^* = X3min, X_4^* = X4min\}$, $\boldsymbol{S^o} \subseteq \boldsymbol{S}$ и точка оптимума X^o.

Поэтому, когда во многих работах русских и зарубежных авторов говорят, что результатом решения является точка, оптимальная по Парето, то это говорит о том, что найдена точка, принадлежащая допустимом множеству точек, а в чем она лучше других – вопрос остается открытым.

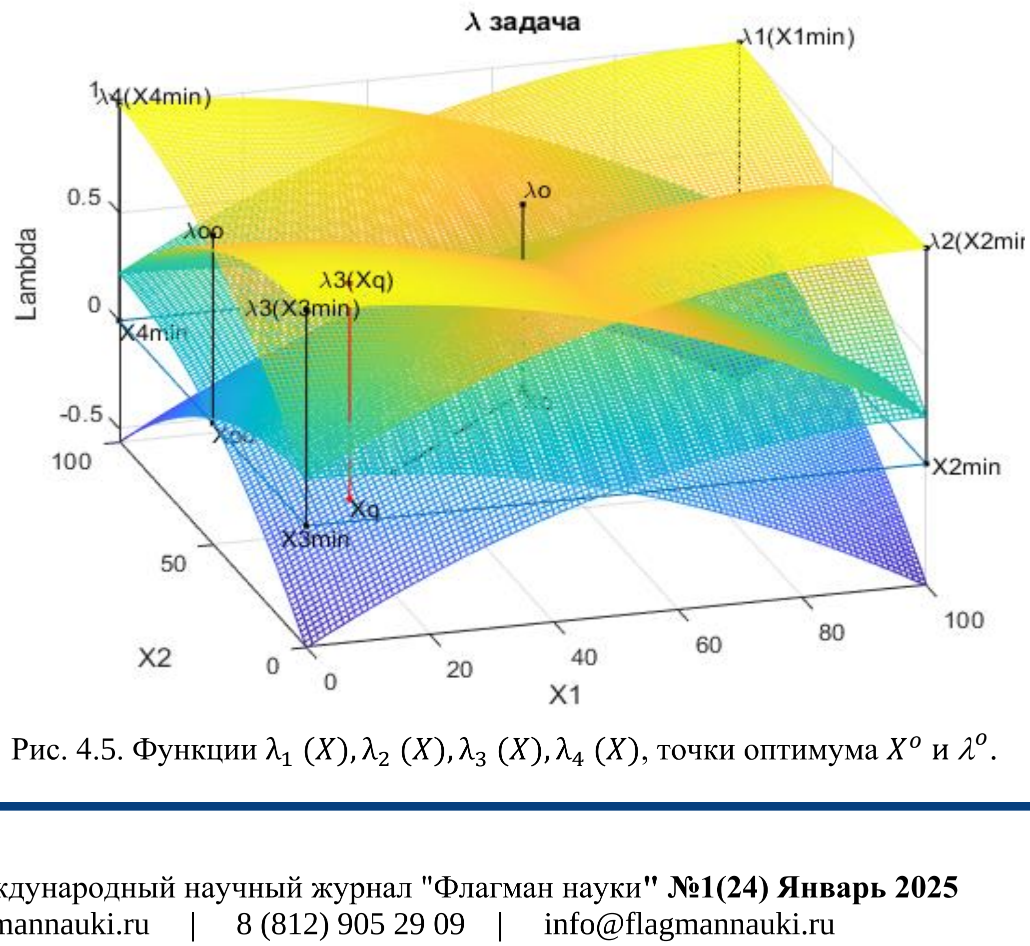

Рис. 4.5. Функции $\lambda_1\ (X), \lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X), \lambda_4\ (X)$, точки оптимума X^o и λ^o.

2. *Решение λ-задачи*. В результате решения λ-задачи получим:

$X^o = \{x_1 = 50.0, x_2 = 50.0, x_3 = 0.7500\}$ – точка оптимума, где $x_3 = \lambda^o$.

Lo = λ^o= 0.75 представляет оптимальное значение решения ВЗНП при равнозначных критериях. X^o и λ^o представлены на рис. 4.5.

Оценка критериев в точке оптимума X^o.

$$f_1(X^o) = 5000.0, f_2(X^o) = 5000.0, f_3(X^o) = 5000.0, f_4(X^o) = 5000.0$$

Оценка критериев в точке оптимума X^o в относительных единицах

$$\lambda_1(X^o) = 0.7500, \lambda_2(X^o) = 0.7500, \lambda_3(X^o) = 0.7500, \lambda_4(X^o) = 0.7500$$

Для наглядности представим отдельно на рис. 4.6 функции критериев $\lambda_1(X)$ и $\lambda_3\ (X)$, а также точку оптимума с приоритетом третьего критерия X_q.

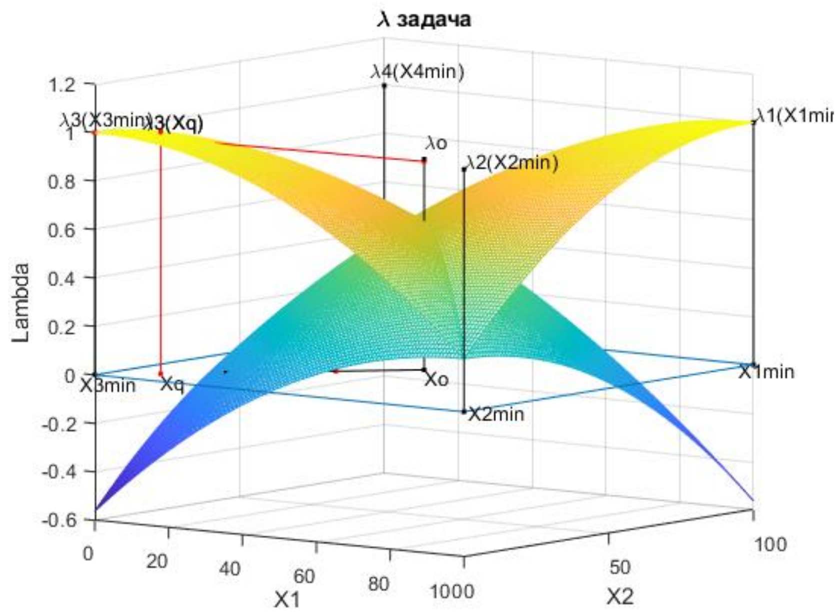

Рис. 4.3. Функции $\lambda_1\ (X), \lambda_3\ (X)$, точки оптимума X^o и λ^o и точку оптимума с приоритетом третьего критерия X_q.

4.3. Этап 3. Решение обратной задачи векторной оптимизации.

Задача состоит в следующем: «Какие будут параметры системы при заданных показателях (характеристиках) инженерной системы». – Используется метод решения векторной задачи при заданном приоритете критерия и программная реализация.

Решение задачи векторной оптимизации с приоритетом критерия формируется на основе ВЗМП (4.1)- (4.5).

Шаг 1. Решение векторной задачи (4.1)- (4.5) при равнозначных критериях. Численные результаты решения векторной задачи представлены в разделе 4.2.1.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in \boldsymbol{K}$ и $p \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство: $\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$,

а для остальных выполняется неравенства: $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \neq p \neq k$.

В модели (4.1)- (4.5) и соответствующей λ-задачи в точке оптимума

$$X^o = \{x_1 = 50.0, x_2 = 50.0, x_3 = 0.8594\},$$

такими противоречивыми являются все четыре критерия:

$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda_4(X^o)$= 0.8594. (4.22)

Как правило, из этих противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in \boldsymbol{K}$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $\boldsymbol{K} = 4$, показанных на рис.4.7.

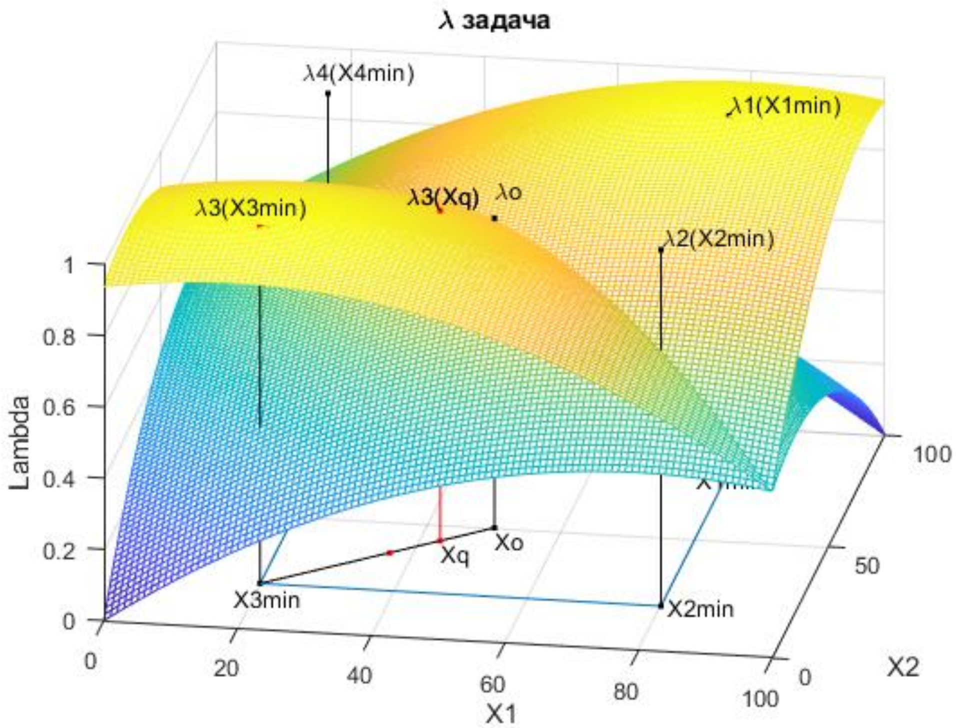

Рис. 4.7. Решение λ-задачи с $\lambda_1(X), \lambda_3(X)$ критериями в трехмерной системе координат $\{x_1, x_2\}$и λ

На дисплей выдается сообщение:

q=input ('Введите приоритетный критерий (номер) q= ') – Ввели критерий q=3.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума $X^o = \{x_1 = 50., x_2 = 50.\}$ в точку $X_q^* = \{x_1 = 20., x_2 = 20.\}$, полученную на первом шаге. Данные о критерии q=3 выдаются на экран:

$$f_q(X^o) = 1800.0 \geq f_q(X) \geq 0.0 = f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}. \qquad (4.23)$$

В относительных единицах критерий q=3 изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.3179 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}. \qquad (4.24)$$

Эти данные анализируется.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия q∈K. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия fq=» – вводим, например, fq=1000.

Шаг 5. Вычисляется относительная оценка.

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 1000$ вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{1000-12800}{0.0-12800} = 0.9218, \tag{4.25}$$

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в пределах:

$0.8594 = \lambda_3\ (X^o) \le \lambda_3 = 0.9218 \le \lambda_3\ (X_3^*) = 1, q \in \boldsymbol{K}$.

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q\ (X)$ в (4.23) и соответственно относительной оценки λ_q в (4.24), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между λq (Xo), λq, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q\ (X^o)}{\lambda_q\ (X_q^*) - \lambda_q\ (X^o)} = \frac{0.9218-0.8594}{1-0.8594} = 0.4444, q = 3 \in \boldsymbol{K}. \tag{4.26}$$

Шаг 7. Вычислим координаты приоритета критериев с размерностью fq.

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1\ x_2\}$ определим координаты для точки с размерностью fq =1000 с λ_q (4.15):

$$x_{\lambda=0.92}^{q=3} = \{x_1 = X^o\ (1) + \rho\ (X_q^*\ (1) - X^o\ (1)),$$
$$x_2 = X^o\ (2) + \rho\ (X_q^*\ (2) - X^o\ (2))\}, \tag{4.27}$$

где $X^o = \{X^o\ (1) = 50, X^o\ (2)\ = 50\}, X_3^* = \{X_3^*\ (1) = 20, X_3^*\ (2) = 20.0\}$.

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$X^q = \{x_1 = 43.05, x_2 = 43.05\ \}$. Точка оптимума X^q представлена на рис. 4.7.

Отрезок, соединяющий точки X^o и X_q^* на рис. 4.7, на котором находится X^q не виден под выпуклостью функции $\lambda_{q=3}\ (X)$.

Шаг 8. Вычисление главных показателей точки X^q.

Для полученной точки X^q, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k\ (X^q) = \{f_k\ (X^q), k = \overline{1, K}\}$,

$f\ (X^q) = \{f_1\ (X^q) = 2730.6, f_2\ (X^q) = 1896, f_3\ (X^q) = 1062.6, f_4\ (X^q) = 1896\}$**;**

все относительные оценки критериев:

$$\boldsymbol{\lambda}^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \boldsymbol{\lambda}_k\ (X^q) = \frac{f_k\ (X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}_{\overline{1,K}}\text{:}$$

$\lambda_k\ (X^q) = \{\lambda_1\ (X^q) = 0.786, \lambda_2\ (X^q) = 0.851, \lambda_3\ (X^q) = 0.917, \lambda_4\ (X^q) = 0.851\}$;

минимальная относительная оценка: $\min\lambda\ (X^q) = \min\limits_{k \in K}\ (\lambda_k\ (X^q)) = \ 0.706$.

Аналогично могут быть исследованы и получены другие точки из множества точек, оптимальных по Парето

$\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S^o}$.

Анализ результатов. Рассчитанная величина $f_q\ (X_t^o) = 1062.6, q = 3 \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 1000$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q\ (X_t^o) - f_q| = |1062.6 - 1000| = 62.6$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.62\%$. Если ошибка $\Delta f_q = |f_q\ (X_t^o) - f_q| = |1062.6 - 1000| = 62.6$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = \ 0.62\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \le \Delta f$, то вычисления завершаются. **Конец.**

Заключение

Проблема исследования, анализа, разработки теоретических основ и конструктивных методов решения задач многомерной математики. является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования.

В работе проведен анализ развития современной математики (одно функциональной). Разработаны теоретические основы: аксиоматика, принципы оптимальности и методы решения многомерных (многофункциональных) систем. Представлено построение математических моделей локальных и сложных объектов, систем (экономических, инженерных) в виде задачи векторной оптимизации. Математическая модель сложной инженерной системы, к которой относятся технические системы, технологические процессы, материалы (структура) и многокритериальные динамические системы, сформулирована в виде векторной задачи математического программирования. Разработано программное обеспечение решения линейных, нелинейных векторных задач оптимизации. Показаны конструктивные методы решения многомерных (векторных) задач оптимизации при равнозначных критериях, при заданном приоритете критерия. Реализация методологии моделирования многомерных (многофункциональных) систем представлена на численном примере инженерной задачи (технической системы) в условиях определенности и неопределенности. Разработанное математическое обеспечение целесообразно использовать для исследования и на стадии проектирования выбора оптимальных параметров инженерных систем.

Список литературы:

1. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.1 А – Г. 1977. 1152 с.
2. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.3 Коо -Од – М. 1982. 1184 с.
3. Pareto V. Cours d’Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.
4. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964, 837 с.
5. Гермейер Ю.Б. Игры с не противоположными интересами. – М.: Наука, 1976, 326 стр.
6. Зак Ю.А. Многоэтапные процессы принятия решений в задаче векторной оптимизации // АиТ. 1976. № 6, С. 41-45.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе В.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматиз. 1961. 268 с.
8. Красовский Н.Н., Красовский А.Н., Третьяков В.У. Управление динамической системой. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. 195 с.
9. Прядкин Л.Л., Гончаров А.Л., Бойчук В.Г. Автоматизация управления технологическими процессами в прокатном производстве на базе микропроцессорной технике. – М.: ЦНИИТЭИ приборостроения, 1986. 136 с.
10. Ю.Н. Киселёв, С.Н. Аввакумов, М.В. Орлов. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. – 270 с. ISBN 5-89407-288-3.
11. Добрынина И.С., Карпов И.И., Черноусько Ф.Л. Метод декомпозиции в задачах управления системой твердых тел // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995.№ 2.
12. Краснощеков П.С., Морозов В.В., Федоров В. В. Последовательное агрегирование в задачах внутреннего проектирования технических систем// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. N 5.
13. Михайлевич В. С., Волкович В. П. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982, 285 с.
14. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука. 1982. 256 с.
15. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. – М.: Наука, 1986. 141 с.
16. Машунин Ю. К., Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем: монография. – Владивосток: ДВГАЭУ, 1996. 131 с.
17. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93.

Yu. K. Mashunin, “Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector optimization methods,” Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus).

18. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.

Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Decision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)

19. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономических системах. – М.: Логос. 2013. 448 с. (Новая университетская библиотека)

20. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3 (9): September, 2014. P. 84-96.

21. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3 (10): October, 2014. P. 224-240.

22. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.

23. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.

24. Yu. K. Mashunin, “Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data. «American Journal of Modeling and Optimization, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. Doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.

25. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.

26. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.

27. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

28. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

29. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. https://rdcu.be/bhZ8i (Scopus).

30. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization,” Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. https://doi.org/10.3390/asi2040032 (Scopus)

31. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7

32. Торгашов А.Ю., Кривошеев В.П., Машунин Ю.К., Холланд Ч.Д. Расчет и многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения // Изв. ВУЗов. Нефть и газ, 2001, №3, с. 82-86.

33. Mashunin Yu.K. Theory, Applied Mathematics and Software for Optimal Decision Making on a set of Criteria in Engineering Systems, monograph: monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow: RuScience, 2024. – 260 c. ISBN 978-5-466-05940-3.

34. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Шахнова. – М.: Радио и связь, 1981. 560 с.

35. J. Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. New York, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2010. 460 p.

36. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. New York. London. 2010. 550 p.

37. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 2009. 197 p.

38. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.

39. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.

40. Левицкий В. Л. Математическое моделирование и оптимизация магнитоэлектрических линейных индукторных двигателей постоянного тока. Диссертация канд. Техн. Наук, Новосибирск. НЭТИ. 1990. 163 с.

41. Математическая энциклопедия / Гл.ред. И.В.Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.4 Ок-Сло. 1984. 1216 с.

42. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume Two), Cambridge Scholars Publishing. 2021, 270 p. ISBN (10): 1-5275-7413-X

ISBN (13): 978-1-5275-7413-7

References

1. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.1 А – Г. 1977. 1152 с.

2. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.3 Коо -Од – М. 1982. 1184 с.

3. Pareto V. Cours d’Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.1. Pareto V. Cours d’Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.

4. Karlin S. Mathematical methods in game theory, programming and economics. – M.: Mir, 1964, 837 p [in Russian].

5. Germeyer Y.B. Games with non-opposite interests. – M.: Nauka, 1976, 326 p [in Russian].

6. Zak Yu.A. Multi-stage decision-making processes in the vector optimization problem // AiT. 1976. No 6, S. 41-45 [in Russian].

7. Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze V.V., Mishchenko E.F. Mathematical theory of optimal processes. – M.: Fizmatiz. 1961. 268 p [in Russian].

8. Krasovsky N.N., Krasovsky A.N., Tretyakov V.U. Management of the dynamic system. – Sverdlovsk: UNC AN SSSR, 1985. 195 p [in Russian].

9. Pryadkin L.L., Goncharov A.L., Boychuk V.G. Automation of process control in rolling production based on microprocessor technology. – M.: TsNIITEI priborostroenie, 1986. 136 p [in Russian].

10. Yu.N. Kiselyov, S.N. Avvakumov, M.V. Orlov. Optimal control. Linear theory and applications. – M.: Publishing Department of the Faculty of VMiK lomonosov Moscow State University, 2007. – 270 p. ISBN 5-89407-288-3 [in Russian].

11. Dobrynina I.S., Karpov I.I., Chernousko F.L. Method of decomposition in the tasks of managing the system of solids // Izv. WOUNDS. Theory and control systems. 1995.№ 2 [in Russian].

12. Krasnoshchekov P.S., Morozov V.V., Fedorov V. V. Sequential aggregation in the tasks of internal design of technical systems // Izv. AN SSSR. Techn. cybernetics. 1979. N 5 [in Russian].

13. Mikhailevich V. S., Volkovich V. P. Computational methods of research and design of complex systems. M.: Nauka, 1982, 285 p [in Russian].

14. Podinovsky V.V., Nogin V.D. Pareto-optimal solutions of multi-criteria problems. – M.: Nauka. 1982. 256 p [in Russian].

15. Mashunin Yu.K. Methods and models of vector optimization. – M.: Nauka, 1986. 141 p [in Russian].

16. Mashunin Y. K., Levitsky V. L. Methods of vector optimization in the analysis and synthesis of technical systems: monograph. – Vladivostok: DVGAEU, 1996. 131 s [in Russian].

17. Mashunin Yu.K. Solution of compositional and decompositional problems of synthesis of complex technical systems by methods of vector optimization //Izv. WOUNDS. TiSU. 1999. No3. p. 88-93 [in Russian]

Yu. K. Mashunin. Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector_optimization methods, Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus).

18. Mashunin Yu.K., Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems in conditions of uncertainty and making the optimal decision // Izv. WOUNDS. TiSU. 2013. №4. S. 19-35 [in Russian].

Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Descision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)

19. Mashunin Yu.K. Theory of Management. Mathematical apparatus of control in economic systems. – M.: Logos. 2013. 448 p. (New University Library) [in Russian].

20. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3 (9): September, 2014. P. 84-96.

21. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3 (10): October, 2014. P. 224-240.

22. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.

23. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.

24. Yu. K. Mashunin, "Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data."American Journal of Modeling and Optimization, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.

25. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.

26. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation Technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.

27. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS:

000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

26. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

29. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. https://rdcu.be/bhZ8i (Scopus).

30. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization," Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. https://doi.org/10.3390/asi2040032 (Scopus)

31. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7

32. Torgashov A.Yu., Krivosheev V.P., Mashunin Yu.K., Holland Ch.D. Calculation and multi-criteria optimization of static modes of mass transfer processes on the example of absorption in the production of gas separation // Izv. Universities. Oil and Gas, 2001, No. 3, pp. 82-86 [in Russian]

33. Mashunin Yu.K. Theory, Applied Mathematics and Software for Optimal Decision Making on a set of Criteria in Engineering Systems, monograph: monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow: RuScience, 2024. – 260 с. ISBN 978-5-466-05940-3.

34. Keeney R.L., Rifa H. Decision-making under many criteria: рСписок литературы and substitutions: Per. with English/Ed. by I. F. Shakhnov. – M.: Radio i svyaz', 1981. – 560 p [in Russian].

35. J. Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. New York, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2010. 460 p.

36. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. New York. London. 2010. 550 p.

37. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 2009. 197 p.

38. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.

39. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.

40. Левицкий В. Л. Математическое моделирование и оптимизация магнитоэлектрических линейных индукторных двигателей постоянного тока. Диссертация канд. Техн. Наук, Новосибирск. НЭТИ. 1990. 163 с.

41. Математическая энциклопедия / Гл.ред. И.В.Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.4 Ок-Сло. 1984. 1216 с.

42. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume Two), Cambridge Scholars Publishing. 2021, 270 p. ISBN (10): 1-5275-7413-X

ISBN (13): 978-1-5275-7413-7