DOI 10.37539/2949-1991.2025.25.2.002

Машунин Юрий Константинович,
Доктор экономических наук, к.т.н., профессор
Дальневосточный федеральный университет,
Владивосток, Россия
ORCID id: 0000-0001-7071-8729
Mashunin Yu. K., Doctor of Economics,
Ph.D., Professor. Far Eastern Federal University, Russia, Vladivostok,
ORCID id: 0000-0001-7071-8729

МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНЖЕНЕРНЫХ СИСТЕМ И СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА: ИНТЕРПРЕТАЦИЯ N-МЕРНОЙ В ДВУХМЕРНУЮ СИСТЕМУ И ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICS. ENGINEERING SYSTEMS AND MATERIAL STRUCTURE DESIGN: INTERPRETATION OF N-MERER INTO A TWO-DIMENSIONAL SYSTEM AND SELECTION OF OPTIMAL PARAMETERS

Аннотация: Построение математической модели с учетом множества характеристик которым относятся технические системы, технологические процессы, материалы (структура) и динамические системы, представляет сложную математическую проблему. Проведен анализ и представлены теоретические основы многомерной математики, включающей аксиоматику, принципы оптимальности и конструктивные методы многомерной математики как при равнозначных критериях, так и при заданном приоритете критерия.

Теория и методы многомерной математики использованы в моделировании и выборе оптимальных параметров при проектировании сложных инженерных систем. На базе математического и программного обеспечения разработана методология моделирования и оптимального выбора сложных инженерных систем. Решена задача геометрической интерпретации *N*-мерной системы на двухмерную систему, что показано на тестовых (численных) примерах сложной технической системы и структуры материала.

Abstract: The construction of a mathematical model taking into account a variety of characteristics (criteria) and the choice of optimal parameters in the design of an engineering system, which include technical systems, technological processes, materials (structure) and dynamical systems, is a complex mathematical problem. The analysis is carried out and the theoretical foundations of multidimensional mathematics are presented, including axiomatics, principles of optimality and constructive methods of multivariate mathematics both with equivalent criteria and with a given priority of the criterion. The theory and methods of multidimensional mathematics are used in modeling and selection of optimal parameters in the design of complex engineering systems. On the basis of mathematical and software, a methodology for modeling and optimal selection of complex engineering systems has been developed. The problem of geometric interpretation of an N-dimensional system to a two-dimensional system is solved, which is shown by test (numerical) examples of a complex technical system and material structure.

Ключевые слова: Инженерная система, Теория многомерной математики, Аксиоматика векторной оптимизации, Методология моделирования, Математическое и программное обеспечение, сложная техническая система структура материала.

Keywords: Engineering System, Theory of Multidimensional Mathematics, Axiomatics of Vector Optimization, Modeling Methodology, Mathematical and Software, Complex Technical System Material Structure.

Введение.

Математическое исследование системной, многокритериальной оптимизации [1, 2] началось с работ Pareto V [3], Карлин С [4]. Не нарушая общности систему критериев, можно представить в виде вектора критериев, выполняя на его основе определенные математические операции, т.е. выполняется векторная оптимизация. Проблеме многокритериальной (системной, векторной) оптимизации уделяется достаточно большое внимание в отечественной науке, начиная с работ Ю.Б. Гермейера [5] в МГУ им. М.В. Ломоносова и ведущих научных школ АН СССР – РАН [6 – 14], внесших большой вклад в решение важных научно-технических задач, работ автора [15 – 33, 42, 43, 44], и зарубежной научной деятельности [34 – 39] в теоретических и прикладных аспектах. Математическая модель инженерной системы, к которым относятся технические системы, технологические процессы, материалы (его состав) и динамические системы, как правило, учитывает некоторый набор параметров и характеристик, функционально зависящие от этих параметров [15, 16, 20, 22]. При построении математической модели инженерной системы возникает ряд проблем, связанных, во-первых, теоретических проблем, определяющих в чем одно решение лучше (оптимальнее) другого, во-вторых, условиями определенности [17, 18, 22] и неопределенности [21, 23], в которых функционирует система, и, в-третьих, проблемой размерности параметров и ее геометрической интерпретацией [29, 30, 31], когда количество параметров больше двух [31, 32]. Поэтому важным является разработка теории и новых методов оценки исходных данных и принятия оптимальных решений в сложных инженерных системах.

Цель данной работы состоит в разработке и построении математических моделей локальных и сложных инженерных систем в виде векторных задач математического программирования. Представления теории и конструктивных методов многомерной математики, включающей аксиоматику и принципы оптимальности векторной оптимизации при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия и использования теории и методов для решения практических инженерных систем.

Для реализации поставленной цели разработаны и представлены четыре раздела.

Методология построения в виде векторной задачи математической модели инженерных систем, к которым относятся технические системы, технологические процессы, материалы и многокритериальные динамические системы.

Теория и методы многомерной математики, включающей аксиоматику, принципы оптимальности векторной оптимизации и конструктивные методы решения векторных задач оптимизации. На базе методов решения векторных задач оптимизации разработано в системе MATLAB программное обеспечение решения векторных задач нелинейного программирования, как основы для построения моделей и выбора оптимальных параметров инженерных систем.

Выполнено построение математической и на ее основе численной модели технической системы в условиях определенности и неопределенности. Используя программное обеспечение, выполнен выбор оптимальных параметров технической системы в условиях определенности и неопределенности, с равнозначными критериями и с заданным приоритетом критерия. Решена задача геометрической интерпретации N-мерной системы на двухмерную систему, что показано на тестовых (численных) примерах сложной технической системы и структуры материала.

1. Методология построения математической модели сложной инженерной системы. Постановка проблемы.

Представлено построение математической модели инженерной системы, к которым относятся технические системы, технологические процессы, материалы (его состав) и динамические системы. Построения математической модели инженерной системы (первые три раздела) рассматривается в статике. В четвертом разделе представлено построения математической модели многокритериальной системы в динамике.

1.1. Построение математической модели сложной технической системы по множеству характеристик и экспериментальных данных

1.1.1. Математическая модель технической системы в условиях определенности

Функционирование любой технической системы (ТС) зависит от некоторого множества N конструктивных параметров: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}^T$ или $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, которые могут изменяться в некоторых пределах:

$x_j^{min} \le x_j \le \ x_j^{max}, j = \overline{1, N}$, где x_j^{min}– нижний, $x_j^{max}, \forall\, j \in N$ – верхний предел, в рамках которых изменяются параметры ТС.

Результат её функционирования ТС можно представить некоторым набором технических характеристик (критериев), которые функционально зависят от переменной X: $F\ (X)\ = \{f_1\ (X), f_2\ (X), \dots, f_K\ (X)\}^T$ или $F\ (X)\ = \{f_k\ (X), k = \overline{1, K}\}^T$,

на которые наложены функциональные ограничения:

$f_k^{min}\ \le\ f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}$ или $G\ (X) \le B$.

Множество характеристик (критериев) ТС состоит из двух подмножеств K_1 и K_2. Первое подмножество критериев $K_1 \subset K$ направлено на максимизацию: $f_k\ (X) \to max, k = \overline{1, K_1}$, а второе подмножество на минимизацию: $f_k(X) \to min, k = \overline{K_1 + 1, K}, \overline{K_1 + 1, K} = K_2 \subset K$.

Математическую модель технической системы, решающую в целом проблему выбора оптимального проектного решения (выбора оптимальных параметров ТС), должна включать все характеристики системы $F(X) = \{f_k\ (X), k = \overline{1, K}\}^T\ \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2$ и ограничения на функции и параметры: $X^{min} \le X \le X^{max}$.

Представим модель ТС в виде Векторной (много функциональной) Задачи Математического Программирования (ВЗМП):

$$Opt\ F\ (X)\ = \{max\, F_1(X) = \{max\, f_k\ (X), k = \overline{1, K_1}\}, \tag{1.1}$$

$$min\, F_2(X) = \{min\, f_k\ (X), k = \overline{1, K_2} = \overline{1 + K_1, K}\}\}, \tag{1.2}$$

$$\text{при ограничениях } G(X) \le 0, f_k^{min}\ \le\ f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}, \tag{1.3}$$

$$x_j^{min} \le x_j \le\ x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \tag{1.4}$$

где в (1.3) в виде $G(X) = \{g_1\ (X), g_2\ (X), \dots, g_M\ (X)\}^T$ представлена вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование ТС. Они определяются протекающими в ней технологическими, физическими и тому подобными процессами и могут быть представлены функциональными ограничениями, например, $f_k^{min}\ \le\ f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}$, которые представлены в (1.3).

Предполагается, что функции $f_k(X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i\ (X), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (1.3)- (1.4) множество допустимых точек: $\boldsymbol{S} = \{X \in R^n | G(X) \le 0, X^{min} \le X \le X^{max}\} \ne \emptyset$ не пусто и представляет собой компакт. В совокупности математическую модель технической системы (1.1)- (1.4) можно трактовать как системный подход к исследованию ТС в условиях определенности.

1.1.2. Математическая модель ТС в условиях неопределенности

Условия неопределенности характеризуются тем, что исходные данные, характеризующие исследуемого объекта, представлены: ***а***) случайными, ***б***) нечеткими, или, ***в***) не полными данными, т. е. в условиях неопределенности известны лишь конечное множество X, измеренных параметров $x = \overline{1, X}$:

$X_j = \{x_{ij}, j = \overline{1, N}\}, i = \overline{1, M}$, где $j = \overline{1, N}$ – число параметров, $i = \overline{1, M}$ – номер и множество данных (экспериментальных измерений); и соответствующее множество K характеристик:

$$f_k\big(X_j = \{x_{ij}, j = \overline{1, N}\}, i = \overline{1, M}\big), k = \overline{1, K}$$

В *условиях неопределенности* отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров ТС [7, 42 – 44]. Информационные данные опций a) и b) преобразуются в числовые данные опции c) и представляются в табличной форме. В работе рассматривается опция c) информация с неполными данными, которые, как правило, ***получены в результате эксперимента***.

С учетом измеренных параметров Y_v и соответствующего множества K характеристик: $f_k\big(X_j = \{x_{ij}, j = \overline{1, N}\}, i = \overline{1, M}\big), k = \overline{1, K}$ представим матрицу результатов экспериментальных данных по исследуемой технической системы:

$$I = \begin{vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 = \{x_{11}, \dots, x_{1N}\}\, f_1\,(X_1), \dots, f_K\,(X_1) \\ \dots \\ X_M = \{x_{M1}, \dots, x_{MN}\}\, f_1\,(X_M), \dots, f_K\,(X_M) \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

Представим математическую модель технической системы в условиях неопределенности в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt\ F\ (X) \ = \ \{\max F_1(X) \equiv \{\max f_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (1.6)$$

$$\min F_2(F) \equiv \{\min f_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}\}, \quad (1.7)$$

$$\text{При ограничениях } f_k^{min}\ \le\ f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (1.8)$$

$$x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j =\ \overline{1, N}, \quad (1.9)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор управляемых переменных (параметров);

$F(X) = \{F_1(X)\ F_2(X)\}$ – векторный критерий – выходные характеристики исследуемой ТС. Величина характеристик зависит от дискретных значений X.

$F_1(X)\ F_2(X)$ – множество дискретных значений характеристик *max* и *min*:

$$F_1(X) = \{max\, f_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\},$$

$F_2(X) = \{min\, f_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}$ (uncertainty) – сформированные в условиях неопределенности;

в (1.8) $f_k^{min}\ \le\ f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование исследуемого объекта, $x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j =\ \overline{1, N}$ – параметрические ограничения исследуемого объекта (ТС).

1.1.3. Математическая модель технической системы в условиях определенности и неопределенности (с экспериментальными данными) в совокупности

В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель технической системы так же должна отражать эти условия. Используя обозначения математической модели (1.1)- (1.4) в условиях определенности, и математическую модель ТС (1.6)- (1.9), учитывающей условия неопределенности, в итоге получим: *«Модель технической системы в условиях определенности и неопределенности»*:

$$Opt\ F\ (X) \ = \ \{max\, F_1(X) = \{max\, f_k\, (X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (1.10)$$

$$max\, I_1(X) \equiv \{max\, f_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (1.11)$$

$$min\, F_2(X) = \{min\, f_k\, (X), k = \overline{1, K_2^{def}}, \quad (1.12)$$

$$min\, I_2(X) \equiv \{min\, f_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}\}, \quad (1.13)$$

$$\text{Ограничения } G(X) \le 0, f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1,K}, \quad (1.14)$$

$$x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1,N}, \quad (1.15)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1,N}\}$ – это вектор управляемых переменных (параметров) ТС;

$F(X) = \{F_1(X)\, F_2(X)\, I_1(X)\, I_2(X)\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором критериев (характеристик) ТС (1.10)- (1.12), которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных X, где в (1.10) и (1.12) K_1^{def}, K_2^{def} (*definiteness*), а в (1.11) и (1.13) K_1^{unc}, K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев max и min сформированные в условиях определенности и определенности.

1.1.4. Преобразование задачи принятия решения в ТС с условиями неопределенности в задачу векторной оптимизации с условиями определенности.

Используя методы регрессионного анализа в задаче (1.10)- (1.15), k-й столбец матрицы I в (1.11), преобразуем $\forall k \in \overline{1,K_1^{unc}}$ $f_i^k, i = \overline{1,M}$, в функцию $f_k(X), \forall k \in \overline{1,K_1^{unc}}$, которую будем использовать в качестве критерия. Аналогично $\forall k \in \overline{1,K_2^{unc}}$. Подмножество критериев $\overline{1,K_1^{unc}}$ максимизируется, а подмножество критериев $\overline{1,K_2^{unc}}$ минимизируется, т. е. каждое подмножество критериев представлено вектор-функцией:

$\max I_1(Y) \equiv \{\max f_k\ (Y), k = \overline{1,K_1^{unc}}\}$,$\min I_2(Y) \equiv \{\min f_k\ (Y), k = \overline{1,K_2^{unc}}\}$,

К ограничениям относятся: функциональные ограничения:

$f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1,K}$.

где минимальные значения $f_k^{min} = min_{\,i=\overline{1,M}}\, f_i^k\ (X_i)$, и максимальные значения $f_k^{max} = max_{\,i=\overline{1,M}}\, f_i^k\ (X_i)$. Параметрические ограничения: $x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1,N}$, где минимальные значения $x_j^{min} = min_{\,i=\overline{1,M}}\, x_{ij}$, $\forall j \in N$, максимальные значения $y_j^{max} = max_{\,i=\overline{1,M}}\, x_{ij}$, $\forall j \in N$. Таким образом, экспериментальные данные $I_1(X)$ и $I_2(X)$ преобразованы в функциональные данные, [17, 43, 44].

1.5. Математическая модель технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности

Критерии $I_1(Y)$, $I_2(Y)$, функциональные $f_k(X)$ и параметрические ограничения x_j используем для построения задачи оптимизации и представим их в виде векторной задачи математического программирования в общем виде:

$$Opt\ F\ (X) = \{max\, F_1(X) = \{max\, f_k\ (X), k = \overline{1,K_1}\}, \quad (1.17)$$

$$min\, F_2(X) = \{min\, f_k\ (X), k = \overline{1,K_2}, \quad (1.18)$$

$$\text{Ограничения } G(X) \le 0, f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1,K}, \quad (1.19)$$

$$x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1,N}, \quad (1.20)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1,N}\}$- вектор вещественных переменных – параметров,

множество критериев $K_1 = \overline{1,K_1^{def}} \cup \overline{1,K_1^{unc}}, K_2 = \overline{1,K_2^{def}} \cup \overline{1,K_2^{unc}}$.

Задача (1.17)- (1.20) эквивалентна векторной задачи (1.1)- (1.4).

К содержательному классу технических систем, которые могут быть представлены векторной задачей (1.1)- (1.4), можно отнести достаточно большое их количество задач из различных отраслей экономики государства: электротехнической, авиационно-космической, металлургической (выбор оптимальной структуры материала), химической и т.п.

В качестве примера представим работу Левицкого В. Л. «Моделирование и оптимизация параметров магнитоэлектрических линейных индукторных электродвигателей (ЛД) постоянного тока» [14, с.50-120].

2.2. Математическая модель технологического процесса: Построение

В качестве объекта исследования инженерных систем мы используем «технологический процесс». Постановка проблемы принятия решений в технологии при производстве изделий выполнена в соответствии с [22].

Рассматривается технологический процесс (например, Гибридная лазерная дуговая сварка (HLAW) (Hybrid Laser Arc Welding (HLAW), в которой сплав ZE41-T5 был выбран как материал, который нужно сварить с сплавом AZ61 как материал заполнителя). Деятельность технологического процесса зависит от определенного множества условий – конструктивных параметров:

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}^T$, или $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, (например: мощности лазера, (laser power); скорости перемещения (travel speed); скорости подачи проволоки, (wire feed rate); тока, (current); частоты (frequency). Обозначим N – множество конструктивных параметров. Каждый параметр технологического процесса лежит в заданных пределах:

$$x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \text{ или } X^{min} \leq X \leq X^{max},$$

где x_j^{min}, x_j^{max}, $\forall j \in \boldsymbol{N}$ – нижний и верхний пределы изменения вектора параметров технологического процесса, $\boldsymbol{N}$ – множество параметров.

Результат функционирования определяется набором технологических характеристик $F\,(X) = \{f_k\,(X), k = \overline{1, K}\}^T$, которые функционально зависят от конструктивных параметров технологического процесса $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, (например: глубина сварного шва (weld depth); недозагрузка (underfill); процентный дефект (percentage defect); накопленная длина пор (total accumulated pore length)). В совокупности все технологические характеристики представляют вектор-функцию:

$$F\,(X) = \{f_1\,(X), f_2\,(X), \dots, f_K\,(X)\}^T \text{ или } F\,(X) = \{f_k\,(X), k = \overline{1, K}\}^T,$$

где К, (К) – множество (число) технологических характеристик (критериев).

Множество характеристик K подразделяется на подмножества K_1, K_2:

где K_1 – это подмножество технологических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно выше: $f_k\,(X) \rightarrow max, k = \overline{1, K_1}$; K_2 – это подмножества технологических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно ниже: $f_k\,(X) \rightarrow min, k = \overline{K_1 + 1, K}, \overline{K_1 + 1, K} = K_2 \subset K$.

Математическая модель должна, во-первых, отражать цели технологического процесса, которые представлены характеристиками $F\,(X)$, во-вторых, учитывать ограничения $X^{min} \leq X \leq X^{max}$. Математическую модель технологического процесса, решающего в целом проблему выбора оптимальных параметров технологического процесса, можно представить в виде векторной задачи математического программирования.

$$Opt\,F\,(X) = \{max\,F_1(X) = \{max\,f_k\,(X), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (1.21)$$

$$min\,F_2(X) = \{min\,f_k\,(X), k = \overline{K_1 + 1, K} = K_2 \subset K\}\}, \quad (1.22)$$

$$\text{при ограничениях } G(X) \leq 0, f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (1.23)$$

$$x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (1.24)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров) технологического процесса; $f_k\,(X), k = \overline{1, K}$- векторный критерий, каждая компонента которого представляет характеристику технологического процесса (1.21)- (1.24), функционально зависящую от вектора переменных X; в (1.23) $G\,(X) = \{g_i\,(X), k = \overline{1, M}\}^T$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование технологического процесса, M – множество ограничений. Ограничения определяются протекающими в них технологическими, физическими и тому подобными процессами и могут быть представлены функциональными ограничениями, например, $f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}$.

Предполагается, что функции $f_k(X), k = \overline{1, K}$дифференцируемы и выпуклы, $g_i\ (X), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а $\boldsymbol{S} = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$.

Соотношения (1.21)- (1.24) образуют математическую модель технологического процесса. Требуется найти такой вектор параметров $X^o \in \boldsymbol{S}$, при котором каждая компонента вектор – функции: $F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ принимает максимально возможное значение, а вектор – функции $F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{K_1 + 1, K} = K_2 \subset K\}$ принимает минимальное значение.

1.3. Математическая модель структуры материала: Построение

Химический состав материала изделия определяется (на единицу объема, веса) процентным содержанием некоторого множества компонент материала, которые в сумме равны ста процентам. Состав материала, характеризуется определенным набором функциональных характеристик, которые включают в себя механические и физико-химические свойства материалов. Одна группа свойств (функциональных характеристик) материала характеризуется тем, что их желательно по своей числовой величине получить как можно больше (например, прочность), другая группа свойств характеризуется тем, что их желательно по своей числовой величине получить как меньше. Улучшение по одной из этих характеристик приводит к ухудшению другой. В целом требуется подобрать такой состав материала, чтобы все свойства материала были как можно лучше в совокупности.

Рассматривается состав материала какого-либо изделия, технической системы, которая зависит от ряда компонент материала: $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_V\}$, где $\boldsymbol{V}$ – множества компонент (видов – v) материала, $Y = \{y_v, v = \overline{1, V}\}$, V – число компонент, из которых может быть составлен (изготовлен) материал, y_V – величина в процентах v-ой компоненты материала, каждая из которых лежит в заданных пределах: $y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}$, где y_v^{min}, y_v^{max}, $\forall v \in V$ – нижний и верхний пределы изменения вектора компонент материала. Сумма всех компонент материала равна ста процентам: $\sum_{v=1}^{V} y_v = 100\%$.

Состав материала оценивается набором (множеством) K физических свойств материала: $H\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K}\}$, которые функционально зависят от конструктивных параметров: $Y = \{y_v, v = \overline{1, V}\}^T$; k – индекс вида физического свойства материала, $k = \overline{1, K}$, где K – число видов свойств (функциональных характеристик) материала. $H\ (Y)$ – вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций. Множество $\boldsymbol{K}$ состоит из подмножества $\boldsymbol{K_1}$ компонент максимизации: $H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}$ и подмножества $\boldsymbol{K_2}$ минимизации: $H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{K_1 + 1, K}\}$; $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2$; K_1, K_2 – число критериев: $\boldsymbol{K_1} \equiv \overline{1, K_1}, \boldsymbol{K_2} \equiv \overline{1, K_2}$: $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2, \boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}_2 \subset \boldsymbol{K}$.

Характеристики материала $H\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K}\}$ мы используем как критерии, а пределы изменения, накладываемые на каждый вид компонент, как параметрические ограничения. Математическую модель материала, решающую в целом проблему выбора оптимального проектного решения (выбора оптимальной структуры материала), представим в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt\ H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\ (Y), k = \overline{1, K_1}\}, \tag{1.25}$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k\ (Y), k = \overline{K_1 + 1, K}\ = K_2 \subset K\}\}, \tag{1.26}$$

$$G\ (Y) \leq B, \tag{1.27}$$

$$\sum_{v=1}^{V} y_v(t) = 100\% \tag{1.28}$$

$$y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \ \overline{1, V}, \tag{1.29}$$

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, V}\}$ – вектор управляемых переменных (компонент материала);

$H\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K}\}$ – векторный критерий, каждая функция которого представляет характеристику (свойство) материала, функционально зависящую от вектора переменных Y; в (1.25) $G\ (Y) = \{g_1\ (Y), \ldots, g_M\ (Y)\}^T$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на структуру материала, $\boldsymbol{M}$ – множество ограничений. Предполагается, что функции $H\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K}\}$ дифференцируемы и выпуклы, $G\ (Y) = \{g_i\ (Y), i = \overline{1, M}\ \}^T$ непрерывны, а заданное ограничениями (1.27)- (1.29) множество допустимых точек S не пусто и представляет собой компакт: $S = \{X \in R^n | G(Y) \le 0, Y^{min} \le Y \le Y^{max}\} \ne \emptyset$.

Соотношения (1.25)- (1.29) образуют математическую модель материала. Требуется найти такой вектор параметров $Y^o \in \boldsymbol{S}$, при котором каждая компонента (характеристика) вектор – функции: $H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}$ принимает максимально возможное значение, а вектор – функции $H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{K_1 + 1, K}\ = K_2 \subset K\}$ принимает минимальное значение. В совокупности математическую модель материала (1.25)- (1.29) можно трактовать как системный подход к исследованию материала.

1.4. Динамические многокритериальные системы: построение математической модели

1.4.1. Введение в динамические многокритериальные системы

В предыдущих разделах исследование конструктивных свойств инженерных систем: технических систем, технологических процессов и материала рассматриваются в статике. Но структура инженерных систем может рассматриваться в динамике, например, при изменении внешней температуры за какой-нибудь период времени. Динамические многокритериальные задачи возникают при оптимальном управлении температурными режимами нагревательных печей, когда требуется минимизировать погрешность воспроизведения требуемой температуры заготовок на выходе из печи в условиях синхронной работы печей и агрегатов технологического потока прокатного стана [9]. Многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения [32]. Таким образом, проблема многокритериальности возникает в большинстве случаев при анализе и синтезе управления динамическими, технологическими процессами. Исследованием таких задач занимается теория оптимального управления. Основы этой теории были заложены академиком Л.С. Понтрягиным, в которой центральным результатом является принцип максимума [7, 8, 9].

Нами предлагается использовать для управления динамическими системами дифференциально-разностные методы преобразования информации [16]. При этом предполагается, что скорость проведения расчетов соизмерима с темпами изменения входных параметров, т.е. проводить расчет за небольшой дискретный промежуток времени $\Delta t \in \boldsymbol{T}$.

1.4.2. Сведение задачи оптимального управления к задаче математического программирования

Разработка высоко эффективной системы управления динамическими процессами предполагает создание математической модели объекта исследования, на базе теории оптимального управления [7]. При разработке задачи синтеза оптимального управления динамической системы предполагается, что известны: $X\ (t) = \{x_j\ (t), j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, описывающий параметры состояния системы; $U\ (t) = \{u_i\ (t), i = \overline{1, M}\}$ – вектор переменных, описывающий параметры управляющих (входных) сигналов; $Y\ (t) = \{y_l\ (t), l = \overline{1, L}$ – вектор переменных, описывающий выходные сигналы (параметры) исследуемого объекта; математическая модель процесса функционирования динамической системы, которая обычно представлена, как система нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX(t)}{dt} = f\big(X(t), U(t)\big), X(t^0) = X^0, t^0 \le t \le T, \qquad (1.30)$$

$$Y\ (t) = h\ (X(t), U(t), t); \qquad (1.31)$$

где t – время, $\dot{x}_j = \frac{dx_j(t)}{dt}, j = \overline{1, N}$ – это производная по времени t каждого параметра состояния исследуемой динамической системы;

$f\ (X(t)) = \{f_j\big(x_j\ (t)\big), j = \overline{1, N}\}$ – известные функции своих аргументов;

$X(t_0) = X_0$ заданные начальные условия, $Y\ (t)$ характеризует параметры выходных сигналов.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.30) называется математической моделью процесса функционирования динамической системы. Уравнение (1.30) описывает не конкретное движение управляемого объекта, а его технические возможности. Для описания конкретного движения управляемого объекта следует: выбрать управление $U\ (t) = \{u_i\ (t), i = \overline{1, M}\}$, как некоторую функцию времени t; задать начальное условие $(t_0) = X_0$.

Функционал, определяющий критерий качества системы управления:

$$J = L(X(t^0), t^0) + \int_{t^0}^{T} (X(t), U(t), t)dt; \tag{1.32}$$

Функционал (1.32) J может иметь физический смысл, в зависимости от функции $L(X(t), U(t), t)$, [10]:

а) расхода топлива, (1.32а)
б) энергетических затрат, (1.32б)
в) финансовых затрат или прибыли, (1.32в)
г) времени перехода из М0 в М1, (1.32г)
д) и т.д. (1.32д)

При этом должны учитываться ограничения, накладываемые на переменные состояния и управления:

$$g\big(X(t), U(t)\big) = 0. \tag{1.33}$$

Для построения соотношений (1.30)- (1.33) используются фундаментальные физические законы (закон сохранения вещества, энергии и т.п.). Далее проводятся исследование входных-выходных сигналов и определяется параметры модели, т.е. идентификация системы.

С учетом сказанного, задача оптимального управления технологическими процессами состоит в том, чтобы определить вектор управляющих сигналов $U(t)$, который давал экстремум функционалу J в (1.32) и удовлетворял бы соотношениям (1.30), (1.31) и (1.33):

$$\max\ (\min)\ J = L(X\ (t_0), t_0) + \int_{t_0}^{T} L\ (X(t), U(t), t)dt. \tag{1.34}$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = f\ (X(t), U(t), X(t_0)),\ X(t_0) = X_0,\ t_0 \le t \le T, \tag{1.35}$$

$$Y\ (t) = h\ (X(t), U(t)), \tag{1.36}$$

$$G\big(X(t), U(t)\big) = 0. \tag{1.37}$$

Предполагается, что в большинстве технологических (динамических) процессов интенсивность изменения параметров во времени при управлении не слишком велика. Поэтому всегда можно выбрать такой промежуток времени Δt, в течение которого параметры процесса изменяются на достаточно малую величину. Разобьем исследуемый промежуток времени $t = \overline{1, T}$ на T равных промежутков $\Delta\tau \in \boldsymbol{T}$:

$$\Delta\tau = t_{\tau+1} - t_\tau, t = \overline{1, T}. \tag{1.38}$$

Вектор управления на каждом дискретном промежутке $t_\tau, t_{\tau+1}$не изменяется:

$$U(t) = U(t_\tau), 1 \le \tau \le T. \tag{1.39}$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений (1.30), (1.31) преобразуется в систему разностных уравнений:

$$X(t_{\tau+1}) = X(t_\tau) + \Delta f(X(t_\tau), U(t_\tau), t_\tau) + Q_1\ (t_\tau), \tag{1.40}$$

$$Y\ (t_{\tau+1}) = Y(t_\tau) + \Delta h\ (X(t_\tau), U(t_\tau), t_\tau) + Q_2\ (t_\tau); \tag{1.41}$$

Интегральный функционал качества управления представлен в виде:

$$J = L(X(t^0), t^0) + \sum_{\tau=1}^{T} L(X(\Delta\tau), U(\Delta\tau), \Delta\tau). \tag{1.42}$$

Аналогично преобразованы к дискретному виду ограничения (1.29).

Отсюда задачу оптимального управления (1.34)- (1.37) представим, как задачу нелинейного программирования.

Определить max $(min) J = L(X\ (t_0), t_0) + \sum_{\tau=1}^{T} L\ (X(\Delta\tau), U(\Delta\tau), \Delta\tau),$ (1.43)

при ограничениях

$$G\big(X(t), U(t)\big) = \begin{cases} X(t_{\tau+1}) = X(t_\tau) + \Delta f(X(t_\tau), U(t_\tau), t_\tau), \tau = \overline{1, T}, & (1.44) \\ Y(t_{\tau+1}) = Y(t_\tau) + \Delta h(X(t_\tau), U(t_\tau), t_\tau), \tau = \overline{1, T}, & (1.45) \\ g\big(X(t_\tau), U(t_\tau)\big) = 0, \tau = \overline{1, T}, (1.46) \\ X(t_\tau) \geq 0, U(t_\tau) \geq 0, \tau = \overline{1, T}, (1.47) \end{cases}$$

1.4.3. Постановка векторной задачи оптимального управления и ее преобразование в векторную задачу математического программирования

Пусть в задаче оптимального управления (1.34)- (1.37) качество функционирования системы управления динамической системы определяется не одним, а некоторым множеством $\boldsymbol{K}$ показателей критерия качества, например, (1.32а), …, (1.32д). При этом часть из них K_1 работает на максимум, а другая часть K_2 на минимум: $K = K_1 \cup K_2, K_1 \cap K_2 = \emptyset, K_1 \in K, K_2 \in K$.

K_1 – это подмножество технологических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно выше (больше):

$$J_k \equiv L(X(t^0), t^0) + \int_{t^0}^{T} (X(t), U(t), t)dt \rightarrow max, k = \overline{1, K_1}. \quad (1.48)$$

K_2 – это подмножества технологических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно ниже:

$$J_k \equiv L(X(t^0), t^0) + \int_{t^0}^{T} (X(t), U(t), t)dt \rightarrow min, k = \overline{1, K_2}. \quad (1.49)$$

Используя подмножества технологических характеристик (1.48) и (1.49) задача оптимального управления (1.34)- (1.37) преобразуется в векторную (многокритериальную) задачу оптимального управления:

$$Opt\ F(X(t), U(t), t) = \{\max F_1(X(t), U(t), t) = \{\max J_k\ (X(t), U(t), t) \equiv L(X\ (t_0), t_0) + \sum_{\tau=1}^{T} L_k\ (X(\Delta\tau), U(\Delta\tau), \Delta\tau), k = \overline{1, K_1}, \quad (1.50)$$

$$\min F_2(X(t), U(t), t) = \{\min J_k\ (X(t), U(t), t) \equiv\ L(X\ (t_0), t_0) + \sum_{\tau=1}^{T} L_k\ (X(\Delta\tau), U(\Delta\tau), \Delta\tau), k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (1.51)$$

при ограничениях

$$\frac{dX(t)}{dt} = f\ (X(t), U(t), X(t_0)), X(t_0) = X_0,\ t_0 \leq t \leq T, \quad (1.52)$$

$$Y\ (t) = h\ (X(t), U(t)), \quad (1.53)$$

$$G\big(X(t), U(t)\big) = 0. \quad (1.54)$$

Используя подход предыдущего раздела преобразуем векторную (многокритериальную) задачу оптимального управления (1.50)- (1.51) в векторную задачу математического программирования:

$$Opt\ F(X(t), U(t), t) = \{\max F_1(X(t), U(t), t) = \{\max J_k\ (X(t), U(t), t) \equiv L(X\ (t_0), t_0) + \int_{t_0}^{T} L\ (X(t), U(t), t)dt, k = \overline{1, K_1}, \quad (1.55)$$

$$\min F_2(X(t), U(t), t) = \{\min J_k\ (X(t), U(t), t) \equiv\ L(X\ (t_0), t_0) + \int_{t_0}^{T} L\ (X(t), U(t), t)dt, k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (1.56)$$

при ограничениях

$$G\big(X(t), U(t)\big) = \begin{cases} X(t_{\tau+1}) = X(t_\tau) + \Delta f(X(t_\tau), U(t_\tau), t_\tau), \tau = \overline{1, T}, & (1.57) \\ Y(t_{\tau+1}) = Y(t_\tau) + \Delta h(X(t_\tau), U(t_\tau), t_\tau), \tau = \overline{1, T}, & (1.58) \\ g\big(X(t_\tau), U(t_\tau)\big) = 0, \tau = \overline{1, T}, & (1.59) \\ X(t_\tau) = 0, U(t_\tau) = 0, \tau = \overline{1, T}, & (1.60) \end{cases}$$

Задача (1.55)- (1.60) представляет векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями и является математической моделью векторной (многокритериальной) динамической системы управления. Для ее решения используются методы, изложенные в следующей главе.

2. Многомерная математика. Теория, Аксиоматика, Принципы оптимальности, программное обеспечение моделирования инженерных систем

Математические модели технической системы (1.1)- (1.4), (1.17)- (1.20), технологического процесса (1.21)- (1.24), структуры материала (1.25)- (1.29) и динамической системы (1.55)- (1.60) представлены векторными задачами математического программирования (ВЗМП). Дальнейшее развитие исследования работ по теории векторной оптимизации привела к формированию "Многомерной математики".

2.1. Анализ развития современной математики. Векторная (многомерная) задача оптимизации.

2.1.1. Анализ развития современной математики

Анализ математики современной проведен в соответствии [1, с. 560 – 563].

Математика – это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Математика, как наука стала возможной после накопления достаточно большого фактического материала, возникла в древней Греции в 6 – 5 веках до новой эры, в соответствии с [1] четыре периода.

1. Зарождение математики. На ранних стадиях развития счет предметов бытия привел к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел.

2. Период элементарной математики. Исследование предметов бытия привел к созданию простейших понятий арифметических вычислений, определения площадей, объемов и т.п. возникает математика, как наука.

3. Период создания математики переменных величин. С 17 века начинается новый период развития математики. На первый план выдвигается ***понятие функции***, определяющее взаимосвязь переменных (параметров) исследуемого объекта. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей приводит далее к основным понятиям математического анализа, к понятию предела, производной, дифференциала и интеграла. Создается анализ бесконечно малых в виде *дифференциального и интегрального* вычислений, позволяющее связывать конечные изменения переменных величин с их поведением на принимаемое решение (функцию). Основные законы механики и физики записываются в форме дифференциальных уравнений, и задача интегрирования этих уравнений выдвигается одной из важнейших задач математики.

4. Современная математики. Все созданные в 17 и 18 веках разделы математического анализа продолжали развиваться в 19, 20 и 21 веках. В качестве основного аппарата новых областей механики и математической физики усиленно разрабатывается теория дифференциальных уравнений обыкновенных и уравнений с частными производными, вычислительной математики. Проблемы нахождения наилучшего решения в задачах управления физическими или механическими системами, описываемые дифференциальными уравнениями, привели к созданию *теории оптимального управления*.

В целом процесс развития математики показывает, что при решении математических проблем, происходило исследование и анализ отдельной ***функции (одномерной)***, зависящей от некоторого множества переменных (параметров) исследуемого объекта, системы. (Подробнее смотри в [1, с. 560 – 563]).

В реальной жизни исследуемый объект, система при своем функционировании (развитии) характеризуется некоторым набором функциональных характеристик, которые зависят от одних и тех же параметров системы. Отсюда проблема многомерности исследуемых объектов, систем стала общенаучной.

Для решения проблемы многомерности мы представим векторную (многомерную) задачу оптимизации и рассмотрим теорию (аксиоматику, принципы оптимальности) ее решения, [13, 27, 29].

2.1.2. Векторная задача математического программирования

Векторная задача математического программирования (ВЗМП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев. ВЗМП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗМП.

Однородные ВЗМП максимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

Однородные ВЗМП минимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

Неоднородные ВЗМП – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач. В соответствии с этими определениями представим выпуклую векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями.

$$Opt\, F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k\,(X), k = \overline{1, K_1}\}, \tag{2.1}$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k\,(X), k = \overline{K_1 + 1, K} = K_2 \subset K\}\}, \tag{2.2}$$

$$G\,(X) \leq B, \tag{2.3}$$

$$X \geq 0, \tag{2.4}$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, т.е. это вектор из N-мерного евклидова пространства R^N; $F(X)$ – вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}$. Множество $\boldsymbol{K}$ состоит из подмножества $\boldsymbol{K}_1$ компонент максимизации и подмножества $\boldsymbol{K}_2$ минимизации; $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя max и min;

$F_1(X), F_2(X)$ – это векторные критерии максимизации, минимизации; $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ – множество критериев максимизации, минимизации соответственно. $G(X) \leq B, X \geq 0$ – стандартные ограничения. Допустимое множество точек: $\boldsymbol{S} = \{X \in \boldsymbol{R}^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$.

2.1.3. Аксиомы и Аксиоматические методы: теоретические основы.

Аксиома – это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих утверждений строится та или иная теория.

Аксиоматический метод – это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые Аксиомами теории. В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [39]. В математике Аксиоматический метод зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала».

Дальнейшее развитие аксиоматического метода получил в работах Д. Гильберта в виде так называемого метода формализма системы. Общая схема построения произвольной формальной системы («S») включает:

1. *Язык системы*, в том числе алфавит – это перечень элементарных символов; правила образования (синтаксис), по которым строится формулы «S».

2. *Аксиомы системы* «S», которые представляют некоторое множество формул.

3. *Правила* вывода системы «*S*» [39].

В приложении к решению задачи векторной оптимизации Аксиоматика подразделяется на два раздела: 1. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями; 2. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критериев.

Только при построении первоначальной аксиоматики возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения векторных задач математического программирования.

2.2. Теория, аксиоматика и методы векторной оптимизации: равнозначные критерии

Аксиоматика векторной оптимизации с равнозначными критериями, как и теоретическая аксиоматика, рекомендованная Д. Гильбертом [39, с. 111], включает три раздела, представленные: 1) языком системы в виде определений нормализации критериев и относительной оценки; 2) аксиоматикой равенства критериев в задаче векторной оптимизации; 3) принципом оптимальности решения векторной задачи, на основании которого формируется конструктивный метод решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями.

2.2.1. Язык системы: Нормализация критериев, относительная оценка

Определение 1. Нормализация критериев.

Нормализация критериев (математическая операция: сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X)\ \forall k \in K$, в одномерное пространство R^1 (сама функция $f_k(X)\ \forall k \in K$ представляет собой функцию преобразования из N-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R^N}$ в $\boldsymbol{R^1}$). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования:

$f_k(X) = a_k f_k'(X) + c_k \forall k{\in}K$, или $f_k(X) = (f_k'(X) + c_k)/a_k \forall k{\in}K$, (2.5)

где $f_k'(X), k = \overline{1,K}$ – старое (до нормализации) значение критерия; $f_k(X), k = \overline{1,K}$ – нормализованное значение, a_k, c_k- постоянные.

Нормализация критериев (2.5) $f_k(X) = (f_k'(X) + c_k)/a_k\ \forall k{\in}K$ представляет простое (линейное) инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимизационной задаче нормализация критериев $f_k(X) = (f_k'(X) + c_k)/a_k\ \forall k{\in}K$ не влияет на результат решения. Действительно, если решается выпуклая оптимизационная задача: $\boldsymbol{max}_{X\in S}\ f(X)$, то в точке оптимума $X^* \in S$: $\frac{df(X^*)}{\mathrm{d}X} = 0$.

В общем случае (в том числе с нормализацией критерия (2.7)) решается задача: $\boldsymbol{max}_{X\in S}\ (a_k f_k'(X) + c_k)$, то в точке оптимума $X^* \in S$:

$\frac{d\,(a_k f(X^*)+c_k)}{\mathrm{d}X} = a_k \frac{d(f(X^*))}{\mathrm{d}X} + \frac{d\,(c_k)}{\mathrm{d}X} = 0.$ (2.6)

Результат идентичен, т.е. точка оптимума $X_k^*, k = \overline{1,K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

Определение 2. Определение относительной оценки функции (критерия). В векторной задаче (2.1)- (2.4) введем обозначение:

$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$ (2.7)

$\lambda_k(X)$ – *это относительная оценка*, которая представляет нормализованный критерий: $f_k(X)$, $\forall k \in \boldsymbol{K}$ в точке $X \in \boldsymbol{S}$, где в точке $X \in \boldsymbol{S}$ величина k-го критерия равна $f_k(X)$; f_k^* – величина k-го критерия в точке оптимума $X \in \boldsymbol{S}$, полученной при решении векторной задачи (21)- (24) отдельно по k-му критерию; f_k^0- наихудшая величина k-го критерия на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$ в векторной задаче. Относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$, во-первых, измеряется в относительных единицах; во-вторых, относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$ на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$ меняется с нуля в точке X_k^0 к единице в точке оптимума X_k^*: $\forall k \in \boldsymbol{K} \lim\limits_{X \to X_k^0} \lambda_k(X) = 0$; $\forall k \in \boldsymbol{K} \lim\limits_{X \to X_k^*} \lambda_k(X) = 1$:

Относительная оценка $\lambda_k(X)$ $\forall k \in K$ находится в следующих пределах:

$\forall k \in \boldsymbol{K}\ 0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, X \in \boldsymbol{S}$, (2.8)

В результате такой нормализации все критерии ВЗМП (21)- (24) соизмеримы в относительных единицах, что позволяет, сравнимая их друг с другом, использовать критерии при совместной оптимизации.

Определение 3. Операция сравнения относительных оценок функции (критерия) между собой.

Так как, любая функция (критерий) представлен в относительных оценках функций $\lambda_k(X)$ $\forall k \in K$, которые лежат пределах $\forall k \in \boldsymbol{K}\ 0 \leq \lambda_k(X) \leq 1$, то возможно сравнение относительных оценок по числовой величине. Для сравнения используется операция «вычитания». Если сравнивается две функции (критерия), измеренные в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)$ $\forall k \in K$, то возможны три ситуации:

первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$;

вторая, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$;

третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$.

Первая и третья ситуация исследуется в разделе 2.3.

В этом разделе исследуется вторая ситуация.

2.2.2. Аксиома равенства критериев в задаче векторной оптимизации.

Аксиома 1. ***О равенстве и равнозначности критериев в допустимой точке векторной задачи математического программирования.***

В векторной задаче оптимизации два критерия с индексами $l \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ будем считать равнозначными в точке $X \in \boldsymbol{S}$, если относительные оценки по k-му и q-му критерию равны между собой в этой точке: $\lambda_l(X) = \lambda_q(X), l, q \in \boldsymbol{K}$.

Пояснение. Если в точке $X \in \boldsymbol{S}$ функции (критерии) в относительных единицах будут равны: $\lambda_l(X) = 0{,}45\ l \in \boldsymbol{K}$ и $\lambda_q(X) = 0{,}45, q \in \boldsymbol{K}$ (т.е. 45% от своей оптимальной величины, которая в относительных единицах равна 1), то такие критерии не «равны» друг другу, а равнозначны по своему числовому значению. И каждый критерий $l \in \boldsymbol{K}$, $q \in \boldsymbol{K}$ несет свой функциональный смысл, числовая величина которого может быть получена, используя нормализацию критериев (2.7).

Определение 4. Определение минимального относительного уровня.

Относительный уровень λ в векторной задаче представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$\forall X \in \boldsymbol{S}\ \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}$, (2.9)

нижний уровень для выполнения условия (2.9) в точке $X \in S$ определяется как:

$\forall X \in S\ \lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X)$. (2.10)

Соотношения (2.9) и (2.10) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (2.10) определения min к ограничениям (2.9) и наоборот. Относительный уровень λ позволяет объединить все критерии в векторной задаче одной числовой характеристикой λ и производить над ней определенные операции, тем самым, выполняя эти операции над всеми критериями, измеренными в относительных единицах. Относительный уровень λ функционально зависит от переменной $X \in \boldsymbol{S}$. Поэтому, изменяя X, можем изменять все $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ и соответственно нижний уровень $\lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X)$, который является характеристикой многомерной (многофункциональной) системы.

Пояснение. Величина относительной оценки $\forall k \in K\ \lambda_k(X)$ является характеристикой *одномерной системы*, а величина минимального относительного уровня $\lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X)$ является характеристикой *многомерной* математики.

2.2.3. Принцип оптимальности решения многомерной (векторной) задачи оптимизации с равнозначными критериями.

Определение 5. Принцип оптимальности решения векторной задачи с равнозначными критериями.

Векторная задача математического программирования при равнозначных критериях решена, если найдена точка $X^o \in \boldsymbol{S}$ и максимальный уровень λ^o (верхний индекс о – оптимум) среди всех относительных оценок такой, что

$\lambda^o = \boldsymbol{max_{X \in S} min_{k \in K}} \lambda_k(X)$ (2.11)

Используя взаимосвязь выражений (2.9) и (2.10), преобразуем максиминную задачу (2.11) в экстремальную задачу:

$\lambda^o = \boldsymbol{max_{X \in S}}\, \lambda$ (2.12)

$$\text{при ограничениях } \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}. \quad (2.13)$$

Полученную задачу (2.12)- (2.13) назовем λ-задачей. λ-задача (2.12)- (2.13) имеет (N+1) размерность, как следствие результат решения λ-задачи (2.12)- (2.13) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, (N+1)-я компонента которого суть величина λ^o, т. е. $\boldsymbol{X^o} = \{x_1^o,\ x_2^o, \dots, x_N^o, x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, (N+1) компонента вектора X^o выделена в λ^o.

Полученная пара $\{\lambda^o, X^o\} = \boldsymbol{X^o}$ характеризует оптимальное решение λ-задачи (2.16)- (2.17) и соответственно векторной задачи математического программирования (2.1)- (2.4) с равнозначными критериями, решенную на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Назовем в оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$, X^o – оптимальной точкой, а λ^o – максимальным уровнем.

Теорема 1. Теорема о двух наиболее противоречивых критериях в ВЗМП (2.1)- (2.4) с равнозначными критериями.

В выпуклой векторной задаче математического программирования (2.1)- (2.4) с равнозначными критериями, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия – обозначим их индексами $q \in \boldsymbol{K}, p \in \boldsymbol{K}$ (которые являются самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1, K}$), и для которых выполняется равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}, \quad (2.14)$$

и другие критерии определяются неравенством:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \neq p \neq k. \quad (2.15)$$

Впервые доказательство теоремы 1 представлено в [15, стр.22], в дальнейшем повторено в работе [19, стр.234].

2.2.4. Конструктивный метод решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями.

Метод включает два блока: 1) блок системного анализа, состоящего из трех шагов; и 2) построения и принятия оптимального решения (λ-задачи).

Блок 1. Системный анализ.

Шаг 1. Решается задача (2.1)- (2.4) по каждому критерию отдельно, т.е. для $\forall k \in \boldsymbol{K}_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in \boldsymbol{K}_2$ решается на минимум.

В результате получим: X_k^*- точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^* = f_k\ (X_k^*)$ – величина k-го критерия в этой точке, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): $f_k^0, k = \overline{1, K}$. Для чего решается задача (2.1)- (2.4) для каждого критерия $k = \overline{1, \boldsymbol{K}_1}$ на минимум: $f_k^0 =$

$min\ f_k\ (X), G\ (X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, \boldsymbol{K}_1}$ для каждого критерия $k = \overline{1, \boldsymbol{K}_2}$ на максимум: $f_k^0 = max\ f_k\ (X), G\ (X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, \boldsymbol{K}_2}$.

В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k\ (X_k^0)$ – величина k-го критерия.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$ определяются величины целевых функций $F\ (X^*)$ и относительных оценок $\lambda\ (X^*)$: $\lambda_k(X) = \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$.

Результат системного анализа:

$$F\ (X^*) = \{f_k\ (X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*), \dots, f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1\ (X_K^*), \dots, f_K\ (X_K^*) \end{vmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\lambda\ (X^*) = \{\lambda_q\ (X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1\ (X_K^*), \dots, \lambda_K\ (X_K^*) \end{vmatrix}. \quad (2.17)$$

Любая относительная оценка (2.17) лежит в пределах $0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, k = \overline{1, K}$. Из результатов системного анализа (2.16)- (2.17) вытекает проблема: Найти такую (оптимальную) точку, в которой все относительные оценки: $\lambda_q\ (X), q = \overline{1, K}$ были близки к единице. На решение этой проблемы направлена λ-задача.

Блок 2. Принятие оптимального решения. Включает два шага.

Шаг 4. Построение λ-задачи. Создание λ-задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с равнозначными критериями (2.11): $\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in S} \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k\ (X)$, которая преобразуются в стандартную задачу математического программирования, λ-задача:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in S}\ \lambda, \quad (2.18)$$

$$\lambda - \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} \leq 0, k = \overline{1, K}, \quad (2.19)$$

$$G\ (X) \leq B, X \geq 0, \quad (2.20)$$

где вектор неизвестных X имеет размерность $N + 1$: $X = \{\lambda, x_1, \dots, x_N\}$.

Шаг 5. Решение λ-задачи. λ-задача (2.18)- (2.20) – стандартная задача выпуклого программирования, для ее решения используются стандартные методы. В результате решения λ-задачи получим: $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ – точку оптимума; $f_k(X^o), k = \overline{1, K}$- величины критериев в этой точке;

$\lambda_k(X^o) = \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$- величины относительных оценок;

λ^o – максимальную относительную оценку, являющаяся максимальным нижним уровнем для относительных оценок $\lambda_k(X^o)$:

$\boldsymbol{\lambda^o} \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K},\ X^o \in \boldsymbol{S}$.

2.3. Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с приоритетом критерия

В определении 3 указано, что если сравнивать две функции (критерия), измеренных в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)\ \forall k \in K$, то возможны три ситуации. Вторая ситуация, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$ исследована в разделе 2.2 (равнозначные критерии). Ситуации: первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$, и третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$, исследуются в этом разделе. Такие ситуации определяются, как задачи с приоритетом критерия.

Для построения методов решения проблемы векторной оптимизации с приоритетом критерия мы введем следующие определения: О приоритете одного критерия над другим; О числовом выражении приоритета критерия над другим; О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим; О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия; О подмножестве точек, приоритетных по критерию; Принцип оптимальности 2 – Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия, [17, 43, 44].

2.3.1. Аксиоматика векторной оптимизации с приоритетом критерия

Язык системы аксиоматики решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия включает определения: 1) Приоритет одного критерия над другим; 2) Числовое значение приоритета критерия; 3) Нижний уровень критерия среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

Определение 6. О приоритете одного критерия над другим.

Критерий $q \in \boldsymbol{K}$ в векторной задаче в точке $X \in \boldsymbol{S}$ имеет приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}$, если относительная оценка $\lambda_q(X)$ по этому критерию больше или равна относительных оценок $\lambda_k(X)$ других критериев, т. е.:

$$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \tag{2.21}$$

строгий приоритет, если хотя бы для одного критерия $t \in \boldsymbol{K}$: $\lambda_q(X) > \lambda_k(X), t \neq q$, а для остальных критериев $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, k \neq t$.

Введением определения приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ в ВЗМП (2.1)- (2.4) выполнено переопределение раннего понятия приоритета. Если раньше в него вкладывалось интуитивное понятие о важности этого критерия, то сейчас эта “важность” определяется математически: чем больше относительная оценка q-го критерия над другими, тем он важнее (приоритетнее), и наиболее высокий приоритет в точке оптимума $X_k^*, \forall q \in \boldsymbol{K}$.

Из определения выражения приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ в векторной задаче в уравнениях (2.1)- (2.4) следует, что возможная область соответствующая множеству точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, которое характеризуется как $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \forall k \neq q, \forall X \in \boldsymbol{S}_q$. Однако, вопрос на сколько критерий $q \in \boldsymbol{K}$ в точке множества $\boldsymbol{S}_q$ имеет больший приоритет относительно другого критерия остается открытым. Для ответа на этот вопрос, мы вводим коэффициент связи между парой относительных оценок q и k, что, в целом, представляет вектор:

$P^q(X) = \{p_k^q(X) \mid k = \overline{1, K}\}, q \in \boldsymbol{K}\ \forall X \in \boldsymbol{S}_q$.

Определение 7. О числовом выражении приоритета критерия.

В векторной задаче с приоритетом критерия q-го над другими критериями $k = \overline{1, K}$, для $\forall X \in \boldsymbol{S}_q$, вектор $P^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$, больше относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$$P^q(X) = \left\{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\right\}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in \boldsymbol{K}. \tag{2.22}$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$.

Определение 7а. О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим. В векторной задаче (2.1)- (2.4) с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$ для $\forall X \in \boldsymbol{S}$ вектор $P^q = \{p_k^q, k = \overline{1, K}\}$, считается заданным лицом, принимающим решения, (ЛПР), если задана каждая компонента этого вектора. Заданная ЛПР компонента p_k^q, с точки зрения ЛПР, показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$ больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$. Вектор $p_k^q, k = \overline{1, K}$ является заданным числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$:

$P^q(X) = \{p_k^q(X), k = \overline{1, K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in \boldsymbol{K}.$

Векторная задача (2.1)– (2.4), в которой задан приоритет какого-либо из критериев, называют векторной задачей с заданным приоритетом критерия. Проблема задачи вектора приоритетов возникает тогда, когда необходимо определить точку $X^o \in \boldsymbol{S}$ по заданному вектору приоритетов.

При операции сравнения относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, аналогично, как и в задаче с эквивалентными критериями, введем дополнительную числовую характеристику λ, которую назовем *уровнем*.

Определение 8. О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия. Уровень λ является нижним среди всех относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, таким, что

$$\lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, \tag{2.23}$$

нижний уровень для выполнения условия (2.23) определяется

$$\lambda = min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S. \tag{2.24}$$

Соотношения (2.23) и (2.24) являются взаимосвязанными и служат в дальнейшем переходом от операции определения min к ограничениям и наоборот.

2.3.2. Аксиоматика приоритета критериев в задаче векторной оптимизации.

Аксиома 2. О подмножестве точек, приоритетных по критерию в задаче векторной оптимизации.

В векторной задаче (2.1)- (2.4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если

$\forall X \in \boldsymbol{S}_q \ \forall k \in \boldsymbol{K} \ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k.$

Это определение распространяется и на множество точек $\boldsymbol{S}^o$, оптимальных по Парето, что дается следующим определением.

Аксиома 2а. О подмножестве точек, приоритетных по критерию, на множестве точек оптимальных по Парето.

В векторной задаче (2.1)- (2.4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset$ S называется областью приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, если $\forall$X $\in S_q^o \ \forall k \in K \ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k$. Дадим некоторые пояснения.

Аксиома 2 и 2а позволила представить в векторной проблеме (2.1)– (2.4) допустимое множество точек $\boldsymbol{S}$, включая подмножество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$, в подмножества:

одно подмножество точек $\boldsymbol{S}' \subset \boldsymbol{S}$, где критерии эквивалентны, и подмножество точек $\boldsymbol{S}'$, пересекаясь с подмножеством точек $\boldsymbol{S}^o$, выделяет подмножество точек, оптимальных по Парето, в подмножество с эквивалентными критериями $\boldsymbol{S}^{oo} = \boldsymbol{S}' \cap \boldsymbol{S}^o$, которое, как это показано далее, состоит из одной точки $X^o \in \boldsymbol{S}$, т.е. $X^o = \boldsymbol{S}^{oo} = \boldsymbol{S}' \cap \boldsymbol{S}^o, \boldsymbol{S}' \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$;

«$\boldsymbol{K}$» подмножеств точек, где у каждого критерия $q = \overline{1, K}$ имеется приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}, q \neq k$. Таким образом, выполнено разделение, во-первых, множества всех допустимых точек $\boldsymbol{S}$, на подмножества $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}$, и, во-вторых, разделение подмножества точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S}^o$, на подмножества $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}$.

Отсюда верны следующие соотношения:

$\boldsymbol{S}' \cup \left(\bigcup_{q \in K} \boldsymbol{S}_q^o\right) \equiv \boldsymbol{S}^\circ, \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}.$

Мы заметим, что подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o$, с одной стороны, включено в область (подмножество точек), имеющих приоритет критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями: $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, и с другой стороны, на подмножество точек, оптимальны поз Парето: $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ \subset \boldsymbol{S}$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 5) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in \boldsymbol{S}$ (посредством вектора:

$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1,K}\}$, формироваться и выбирать:

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S_q}$, который включен в множество точек $\boldsymbol{S}$, $\forall q \in \boldsymbol{K}\ X \in \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, (такое подмножество точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это вне статьи);

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q^o$, который включен в ряд точек $\boldsymbol{S^o}$, оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in \boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S}^o$.

В итоге получим:

Множество допустимых точек $X \in \boldsymbol{S} \rightarrow$	Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S} \rightarrow$	Подмножество оптимальных точек приоритетом $q \in K$ $X \in \boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S} \rightarrow$	Отдельная точка, $\forall X \in \boldsymbol{S}$ $X \in \boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$

Это самый важный результат теории, который позволяет на основе этих трех аксиом вывести принцип оптимальности и построить методы выбора *любой точки* из множества точек, оптимальных по Парето. Такая классификация подмножества точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это выходит за рамки статьи.

2.3.2. Принцип оптимальности решения векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия

Определение 9. Принцип оптимальности 2. Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия. Векторная задача (2.1)– (2.4) с заданным приоритетом q-го критерия $p_k^q\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$ считается решенной, если найдена точка X^o и максимальный уровень λ^o среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max_{X \in S} min_{k \in K}} p_k^q \lambda_k\ (X), q \in \boldsymbol{K}. \qquad (2.27)$$

Используя взаимосвязь (2.23) и (2.24), преобразуем максиминную задачу (2.27) в λ-задачу, которую назовем λ-задачей с приоритетом q-го критерия:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max_{X \in S}}\ \lambda, \text{ при ограничениях } \lambda \le p_k^q \lambda_k\ (X), k = \overline{1,K}. \qquad (2.28)$$

В оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$, $\boldsymbol{X^o}$ – оптимальная точка, а λ^o – максимальный нижний уровень. Точка X^o и уровень λ^o соответствуют ограничениям (2.4), которые можно записать как: $\lambda^o \le p_k^q \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$.

Теорема 2. Теорема о наиболее противоречивых критериях в векторной задаче с заданным приоритетом.

Если в выпуклой векторной задаче математического программирования максимизации (2.1)- (2.4) задан приоритет q-го критерия $p_k^q, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, в точке оптимума $X^o \in \boldsymbol{S}$, полученной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, всегда найдется два критерия с индексами $r \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется строгое равенство из:

$$\lambda^\circ = p_k^r \lambda_r\ (X^\circ) = p_k^t\ \lambda_t\ (X^\circ), r, t, \in \boldsymbol{K}, \qquad (2.29)$$

и другие критерии определяются неравенствами:

$$\lambda^\circ \le p_k^q\ (X^\circ), k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}, q \ne r \ne t. \qquad (2.30)$$

Критерии с индексами $r \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется равенство (2.29), называются наиболее противоречивыми.

2.3.3. Конструктивный метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия.

Шаг 1. Решаем векторную задачу с равнозначными критериями. Алгоритм решения представлен в разделе 2.2.2. В результате решения получаем:

оптимальные точки по каждому критерию отдельно $X_k^*, k = \overline{1, K}$ и размеры критериальных функций в этих точках $f_k^* = f_k\ (X_k^*), k\ =\ \overline{1, K}$;

точки антиоптимума по каждому критерию $X_k^0 =\ \{x_j, j = \overline{1, N}$ и наихудшей неизменной части каждого критерия$f_k^0 = f_k\ (X_k^0), k = \overline{1, K}$;

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$ оптимальная точка, как результат решения VPMP.

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями. Если полученные результаты удовлетворяют лицо, принимающее решение, то конец, иначе выполняются последующие расчеты. Дополнительно вычислим: в каждой точке $X_k^*, k = \overline{1, K}$ определим величины всех критериев $f_k^* = f_k\ (X_k^*), k = \overline{1, K}$, которые представляют границу множества Парето, и относительных оценок: $\lambda\ (X^*)\ = \{\lambda_q\ (X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k\ (X)\ = \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$:

$$F\ (X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*) \dots\ f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*) \dots\ f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \lambda\ (X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*) \dots\ \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*) \dots\ \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \tag{2.31}$$

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории (см. теорему 1) известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия $q \in \boldsymbol{K}$ и $v \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство: $\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_v(X^o), q, v \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$, а для остальных: $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \neq v \neq k$.

Как правило, из этой пары выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить, такой критерий называется «приоритетным критерием»: $q \in \boldsymbol{K}$.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$ из матрицы (2.29) определим числовые пределы изменения величины критерия: в натуральных единицах $f_q\ (X)$ и в относительных единицах $\lambda_q\ (X)$, которые лежат в пределах:

$$f_k(X^o) \leq f_q\ (X) \leq f_q\ (X_q^*), k \in \boldsymbol{K},$$
$$\lambda_k(X^o) \leq \lambda_q\ (X) \leq \lambda_q\ (X_q^*), k \in \boldsymbol{K}, \tag{2.32}$$

где $\lambda_q\ (X_q^*)$ выводится из матрицы $\lambda\ (X^*)$, все критерии показывают размеры, измеренные в относительных единицах (отметим, что $\lambda_q\ (X_q^*) = 1), \lambda_q\ (X^o)$.

Выражения (2.32) выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия (Принятие решения). ЛПР проводит анализ результатов расчетов (2.32), выбирает числовую величину $f_q, q \in \boldsymbol{K}$**:**

$$f_q(X^o) \leq f_q \leq f_q\big(X_q^*\big), q \in \boldsymbol{K}. \tag{2.33}$$

Для выбранной величины критерия f_q необходимо определить вектор неизвестных X^{oo}, для этого проводим последующие вычисления.

Шаг 5. Расчет относительной оценки:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0}, \tag{2.34}$$

которая при переходе от точки X^o к X_q^*, в соответствии с (2.32):

$\lambda_q\ (X^\circ) \leq \lambda_q \leq \lambda_q\ (X_q^*) = 1$.

Шаг 6. Вычисление коэффициента линейной аппроксимации. Используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности ρ между

$\lambda_q(X^o), \lambda_q$: $\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q^* - \lambda_q^0}, q \in \boldsymbol{K}$,

Шаг 7. Вычисление координат приоритетного критерия f_q.

Координаты точки приоритетного критерия X_q лежат в следующих пределах: $X^o \leq X_q \leq X_q^*, q \in \boldsymbol{K}$**.** Предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1^q, \dots, x_N^q\}$ определим координаты точки приоритетного критерия с величиной f_q с относительной оценкой λ_q (2.34):

$X_q = \{x_1^q = x_1^o + \rho\,(x_q^*(1) - x_1^o), \dots,$

$x_N^q = x_N^o + \rho\,(x_q^*(N) - x_N^o)\}$,

где $X^o = \{x_1^o, \dots, x_N^o\}$, $X_q^* = \{x_q^*(1), \dots, x_q^*(N)\}$.

Шаг 8. Вычисление основных показателей точки X_q.

Для полученной точки $X_q = \{x_{qj}, j = \overline{1,N}\}$, вычислим:

все критерии в натуральных единицах: $F^q = \{f_k(X_q), k = \overline{1,K}\}$;

все относительные оценки критериев:

$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\}, \lambda_k(x^q) = \frac{f_k(X_q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$;

минимальную относительную оценку: $\lambda^{oq} = \min(p_k^q \lambda_k(X_q), k = \overline{1,K})$.

Аналогично рассчитывается любая точка по Парето: $\boldsymbol{X_t^o} = \{\boldsymbol{\lambda_t^o}, \boldsymbol{X_t^o}\} \in \boldsymbol{S^o}$.

Анализ результатов. Рассчитанная величина критерия $f_q(X_t^o), q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной f_q. Ошибка выбора:

$\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q|$ определяется ошибкой линейной аппроксимации.

Заключение по теории и аксиоматике векторной оптимизации.

Представленная теория, аксиоматика, принципы оптимальности являются дальнейшим развитием аксиоматического подхода, заложенного в знаменитом сочинении «Начала», древнегреческого ученого Евклида, который представил аксиомы для одно мерной математики. Это нашло отражение в теории оптимизации с одним критерием. Аксиоматика (Машунина Ю.К.), изложенная в работе, направлена на системное (с множеством критериев) исследование объектов, процессов инженерных систем.

2.4. Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования при равнозначных критериях

Для решения векторной задачи нелинейного программирования (ВЗНП) (2.1)- (2.4) при равнозначных критериях разработана программа в системе MATLAB, которая по существу представляет программу – шаблон для написания и решения других векторных задач нелинейного программирования (2.1)- (2.4) – математических моделей инженерных систем.

2.4.1. Характеристика программного обеспечение решения ВЗНП

Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования (2.1)- (2.4), на базе которой сформированы модели инженерных систем, реализовано на основе алгоритма решения ВЗНП, изложенного в предыдущих разделах. При решении ВЗНП по каждому критерию использована программа FMINCON (…) в системе MATLAB.

При использовании программы FMINCON (…) необходимо разработать две подпрограммы – функции. *Первая функция* включает два блока: первый блок предназначен для оценки в точке X критерия $f_k(X)$ $\forall k \in$К; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{df_k(X)}{dX}$ $\forall k \in$К.

Вторая функция включает те же два блока только для ограничений: для оценки в точке X ограничения $g_i\ (X), \forall i \in \boldsymbol{M}$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{dg_i(X)}{\mathrm{d}X}\ \forall i \in \boldsymbol{M}$.

Программа FMINCON (…) используется на первом шаге алгоритма решения ВЗНП раздела 2.2.3 и на втором шаге алгоритма (минимизации). Аналогично в соответствии с алгоритмом на 4 и 5 шаге решается λ-задача.

В целом при нелинейных ограничениях программное обеспечение решения ВЗНП включает: К*2 (1 шаг) + К*2 (2 шаг)+2 (λ-задача) функций. Так как критерии и ограничения ВЗНП индивидуальны, то для каждой ВЗНП пишется индивидуальное программное обеспечение.

Для решения ВЗНП (2.1)- (2.4) в [43, 44] представлен текст программы, которая по существу представляет программу – шаблон для написания и решения других ВЗНП (2.1)-(2.4) – математических моделей инженерных систем.

2.5. Методология моделирования и принятия оптимального решения выбора параметров сложных технических систем в условиях определенности, неопределенности

2.5.1. Виды задач, возникающих в процессе моделирования и принятия оптимального решения выбора параметров сложных технических систем.

Задачи, которые возникают в процессе принятия оптимального решения выбора оптимальных параметров сложных технических систем на базе векторной оптимизации включает последовательно три вида.

1 вид. *Решение векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях*. Полученный результат является основой для дальнейшего исследования системы. При этом используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях. Если полученный результат удовлетворяет лицу, принимающего решения, (ЛПР – проектировщик), то он берется за основу. Если не удовлетворяет, то переходим ко второму виду (прямая задача) или третьему виду решения векторных задач (Обратная задача).

2 вид. *Решение прямой задачи векторной оптимизации*, которая состоит в следующем: «Какие будут показатели (характеристики), если изменить параметры сложных технических систем». – Используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях.

3 вид. *Решение обратной задач векторной оптимизации*, которая состоит в следующем: «Какие будут параметры сложных технических систем при заданных характеристиках». – Используется метод решения векторной задачи при заданном приоритете критерия.

2.5.2. Методология моделирования и выбора оптимальных параметров сложных инженерных систем в условиях определенности, неопределенности.

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «сложная (многофункциональная) инженерная система», [17, 42, 44]. В организационном плане процесс моделирования и симулирования (the process of modeling and simulation of a engineering system) сложных инженерных систем, включающий три вида выше представленных задач, сформирован в виде методологии:

«Методология выбора оптимальных параметров сложных инженерных систем в условиях определенности и неопределенности».

Методология включает три блока, разделенных на ряд этапов.

Блок 1. Формирование технического задания, преобразование условий неопределенности (связанных с экспериментальными данными) в условия определенности, построение математической и численной модели инженерной системы (the process of modeling of a engineering system) включает 4 этапа.

1 этап. Формирование технического задания (исходных данных) на численное моделирование и выбора оптимальных параметров системы. Исходные данные формирует конструктор, который проектирует инженерную систему.

2 этап. Построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

3 этап. Преобразование условий неопределенности в условия определенности и построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

4 этап. Построение агрегированной математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

Блок 2. Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) в инженерной системе на базе векторной оптимизации (the process of simulation of a engineering system)

5 этап. Решение векторной задачи математического программирования (ВЗМП) – модели инженерной системы при равнозначных критериях (решение прямой задачи).

6 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с *N* параметрами и *K* критериями в двухмерную систему координат в относительных еди-ницах..

7 этап. Решение векторной задачи математического программирования – модели инженерной системы при заданном приоритете критерия (решение обратной задачи).

Блок 3. Исследование, проектирование, геометрическая интерпретация и выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы в многомерной математике включает 2 этапа.

8 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к ***N***-мерному пространству в относительных единицах.

9 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к ***N***-мерному пространству в физических единицах.

3. Выбор оптимальных параметров сложной технической системы в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики. Численная реализация.

Численная реализация выбора оптимальных параметров сложной технической системы выполняется в соответствии с теоретическими основами многомерной математики, включающей аксиоматику, принципы оптимальности и конструктивные методы многомерной математики как при равнозначных критериях, так и при заданном приоритете критериев, в соответствии разделом 2. Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) в технической системе изложена в разделе 2.5.2. Рассматривается задача принятия решений в сложной технической системе, о которой известны: во-первых, данные о функциональной взаимосвязи нескольких характеристик с ее компонентами (*условия определенности*); во-вторых, данные о некотором наборе дискретных значений нескольких характеристик (экспериментальные результаты), во взаимосвязи с дискретными значениями параметров – экспериментальные данные (*условия неопределенности*); в-третьих, ограничений, накладываемых на функционирование сложной технической системы. Численная задача моделирования сложной технической системы рассматривается с равнозначными критериями и с заданным приоритетом критерия.

3.1. Блок 1. Формирование технического задания и построение математической и численной модели технической системы (the process of modeling of the Technical System).

Первый этап, а также этап анализа результатов решения, выбора приоритетного критерия и его величины выполняется ***конструктором технической системы***. Остальные этапы выполняются ***математиком – программистом***.

3.1.1. ***1 этап. Техническое задание: «Выбор оптимальных параметров технической системы»***

Дано. Мы исследуем техническую систему (ТС). Функционирование технической системы определяется четырьмя параметрами $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, которые представляют вектор управляемых переменных. Параметры технической системы заданы в следующих пределах:

$$20.0 \le x_1 \le 80.0, 0.0 \le x_2 \le 60.0, 2.0 \le x_3 \le 8.0, 2.0 \le x_4 \le 8.0. \quad (3.1)$$

Функционирование технической системы определяются шестью критериями K=6 (характеристиками): $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_6(X)\}$, величина оценки которых зависит от вектора параметров X.

Условия определенности (когда известна функциональная зависимость критерия от параметров). Для пятой и шестой характеристики $f_5(X)$ и $f_6(X)$ известна функциональная зависимость от параметров $X = \{x_j, j = \overline{1, N}, N = 4\}$.

$$f_5(X) = 886.27 + 26.28x_1 + 33.95x_2 - 27.445x_3 - 49.5x_4 - 0.8451x_1x_2 + 0.5173x_1x_3 + 0.8219x_1x_4 - 0.1411x_2x_3 + 0.3593x_2x_4 - 0.0123x_3x_4 + 0.0438x_1^2 + 0.0401x_2^2 + 3.5281x_3^2 + 2.9103x_4^2, \quad (3.2)$$

$$f_6(X) = 41.758 + 0.6598x_1 + 0.4505x_2 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.011x_1x_2 - 0.0069x_1x_3 + 0.0161x_1x_4 - 0.0143x_2x_3 + 0.0134x_2x_4 - 0.0005x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2, \quad (3.3)$$

Условия неопределенности, они определяются тем, что неизвестна функциональная зависимость критерия от параметров.

Известны для первой, второй, третьей и четвертой характеристики: $f_k(X), k = 1, 2, 3, 4$ ***результаты экспериментальных данных***: во-первых, величины параметров $X = \{x_n = \{x_{ni}, i = \overline{1, M}\}, n = \overline{1, N}\}$, во-вторых, величины соответствующих характеристик $f_1(X), \dots, f_4(X)$. Числовые значения параметров X, характеристик представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Экспериментальные значения параметров и характеристик технической системы.

x_1	x_2	x_3	x_4	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$	$f_4(X) \to min$
20.0	0.0	20.0	20.0	330.0	957.8	43.4	20.2 22.617
20.0	0.0	20.0	50.0	340.0	970.0	43	23.0 23.001
20.0	0.0	20.0	80.0	348.0	980.	42.9	24.0 24.920
20.0	0.0	50.0	20.0	353.0	1010.	46.1	25.0 23.850
20.0	0.0	50.0	50.0	360.0	1050.	42.5	26.0 26.286
20.0	0.0	50.0	80.0	365.0	1048.	42.1	27.0 28.299
20.0	0.0	80.0	20.0	376.0	1047.	40.2	28.0 27.311
20.0	0.0	80.0	50.0	381.0	1044.	39.1	29.0 29.947
20.0	0.0	80.0	80.0	390.0	1043.	38.6	29.0 31.260
20.0	50.0	20.0	20.0	250.0	1785.8	53	16.6 13.176
20.0	50.0	20.0	50.0	258.0	1795.0	52.3	18.0 16.864
20.0	50.0	20.0	80.0	263.0	1803.0	51.9	21.0 20.228
20.0	50.0	50.0	20.0	270.0	1814.2	51.4	24.8 22.045
20.0	50.0	50.0	50.0	279.0	1821.0	50.1	27.9 25.732

20.0	50.0	50.0	80.0	283.0	1832.0	49.9	31.0 29.097
20.0	50.0	80.0	20.0	290.0	1842.6	49.8	32.9 30.925
20.0	50.0	80.0	50.0	301.0	1860.0	48	35.0 34.612
20.0	50.0	80.0	80.0	310.0	1871.0	48.2	41.0 37.977
20.0	100.0	20.0	20.0	170.0	2461.8	69	13.0 11.565
20.0	100.0	20.0	50.0	175.0	2350.0	65	15.0 15.304
20.0	100.0	20.0	80.0	185.0	2310.0	62	18.0 18.720
20.0	100.0	50.0	20.0	190.0	2290.2	60.4	20.2 23.353
20.0	100.0	50.0	50.0	198.0	2360.0	62	24.0 27.092
20.0	100.0	50.0	80.0	204.0	2420.0	64	27.0 30.508
20.0	100.0	80.0	20.0	210.0	2518.6	65.8	29.3 35.152
20.0	100.0	80.0	50.0	221.0	2530.0	65	33.0 38.891
20.0	100.0	80.0	80.0	230.0	2547.0	64.2	37.4 42.307
50.0	0.0	20.0	20.0	10.0	2985.8	91.4	9.4 20.246
50.0	0.0	20.0	50.0	16.0	3001.0	91	12.0 23.131
50.0	0.0	20.0	80.0	24.0	3007.0	90	14.0 25.693
50.0	0.0	50.0	20.0	30.0	3014.2	89.8	17.6 31.623
50.0	0.0	50.0	50.0	38.0	3019.0	89	19.0 34.508
50.0	0.0	50.0	80.0	44.0	3031.0	88.7	23.0 37.070
50.0	0.0	80.0	20.0	50.0	3042.6	88.2	25.7 43.011
50.0	0.0	80.0	50.0	60.0	3060.0	87	30.0 45.896
50.0	0.0	80.0	80.0	70.0	3071.0	86.6	33.8 48.457
50.0	50.0	20.0	20м	410.0	0996.2	49.6	44.0 25.595
50.0	50.0	20.0	50.0	417.0	1010.0	46	50.0 30.244
50.0	50.0	20.0	80.0	423.0	1030.0	44	54.0 34.569
50.0	50.0	50.0	20.0	430.0	1043.0	43.4	57.2 39.892
50.0	50.0	50.0	50.0	439.0	1060.0	42	63.0 44.540
50.0	50.0	50.0	80.0	444.0	1080.0	41	69.0 48.865
50.0	50.0	80.0	20.0	450.0	1099.8	40.2	73.4 54.199
50.0	50.0	80.0	50.0	460.0	1120.0	38.4	81.0 58.847
50.0	50.0	80.0	80.0	470.0	1156.6	37	89.7 63.172
50.0	80.0	20.0	20.0	410.0	1814.2	56.2	33.8 38.558
50.0	100.0	20.0	50.0	418.0	1830.0	55	38.0 44.970
50.0	100.0	20.0	80.0	423.0	1850.0	54	44.0 51.059
50.0	100.0	50.0	20.0	430.0	1871.0	53	50.0 55.773
50.0	100.0	50.0	50.0	437.0	1905.0	52	56.0 62.185
50.0	100.0	50.0	80.0	444.0	1912.0	51	61.0 68.274
50.0	100.0	80	20.0	450.0	1927.8	49.8	66.2 73.000
50.0	100.0	80.0	50.0	460.0	1950.0	43	71.0 79.411
50.0	100.0	80.0	80.0	470.0	1984.6	46.6	82.5 85.500
80.0	0.0	20.0	20.0	330.0	2490.2	72.2	26.6 17.347
80.0	0.0	20.0	50.0	338.0	2510.0	71	30.0 19.480
80.0	0.0	20.0	80.0	343.0	2530.0	70	36.0 21.291
80.0	0.0	50.0	20.0	350.0	2547.0	69	42.8 34.151
80.0	0.0	50.0	50.0	358.0	2590.0	69.2	51.0 36.285
80.0	0.0	50.0	80.0	363.0	2630.0	69.6	60.0 38.095
80.0	0.0	80.0	20.0	370.0	2703.8	69.8	69.0 50.966
80.0	0.0	80.0	50.0	380.0	2690.0	65	72.0 53.100

80.0	50.0	80.0	80.0	390.0	2660.6	62	75.3 87.623
80.0	50.0	20.0	20.0	170.0	3014.2	94.6	19.4 37.270
80.0	50.0	20.0	50.0	178.0	3033.0	93	25.0 42.879
80.0	50.0	20.0	80.0	182.0	3050.0	92	30.0 48.165
80.0	50.0	50.0	20.0	190.0	3071.0	91.4	35.6 56.993
80.0	50.0	50.0	50.0	198.0	3090.0	90	40.0 62.602
80.0	50.0	50.0	80.0	204.0	3110.0	89	45.0 67.889
80.0	50.0	80.0	20.0	210.0	3127.8	88.2	51.8 76.728
80.0	50.0	80.0	50.0	220.0	3060.0	87	61.0 82.337
80.0	50.0	80.0	80.0	230.0	3184.6	85	68.1 87.623
80.0	100.0	20.0	20.0	490.0	1014.6	53	72.5 64.806
80.0	100.0	20.0	50.0	498.0	1040.0	51	79.0 73.891
80.0	100.0	20.0	80.0	503.0	1060.0	50	86.0 82.653
80.0	100.0	50.0	20.0	510.0	1099.8	48.2	96.8 87.449
80.0	100.0	50.0	50.0	518.0	1120.0	46	105.0 96.534
80.0	100.0	50.0	80.0	523.0	1160.0	44	114.0 105.295
80.0	100.0	80.0	20.0	530.0	1185.0	43.4	121.2 110.102
80	100.0	80.0	50.0	541.0	1220.0	40	130.0 119.187
80	100.0	80.0	80.0	550.0	1270.2	38.6	145.6 127.949
Минимальные значения				10.0	957.8	37	9.4 12.1
Максимальные значения				550.0	3184.6	93	145.6 128.1
Индекс корреляции				0.6115	0.7149	0.6149	0.9017
Коэффициент детерминации				0.3740	0.5111	0.411	0.8130

В принимаемом решении, величину оценки по первой, третьей и шестой характеристики (критерия) желательно, получить как можно выше: $f_1(X) \rightarrow max, f_3(X) \rightarrow max, f_6(X) \rightarrow max$; второй, четвертой и пятой характеристики (функции), как можно ниже: $f_2(X) \rightarrow min, f_4(X) \rightarrow min, f_5(X) \rightarrow min$.

$20.0 \leq x_1 \leq 80.0, 0.0 \leq x_2 \leq 60.0, 2.0 \leq x_3 \leq 8.0, 2.0 \leq x_4 \leq 8.0.$

Параметры $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ изменяются в следующих пределах:

$x_1 \in [20.50.80.], x_2 \in [0.30.60.], x_3 \in [2.0\ 5.0\ 8.0], x_4 \in\ [2.2\ 5.5\ 8.8]$.

Ограничение: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120.$ (3.4)

Требуется. Построить математическую модель технической системы) в виде векторной задачи. Решить векторную задачу с равнозначными критериями (характеристиками). Выбрать приоритетный критерий. Установить численное значение приоритетного критерия. Принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия.

1а этап. *Построение математической модели технической системы в условиях определенности и неопределенности в общем виде.*

Построение математической модели для принятия оптимального управленческого решения технической системы показано в первом разделе. В соответствии с (1.17)- (1.20) представим математическую модель технической системы условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$Opt\ F\ (X)\ =\ \{max\ F_1(X) = \{max\ f_k\ (X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \tag{3.5}$$

$$max\ I_1(X) \equiv \{max\ f_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \tag{3.6}$$

$$min\ F_2(X) = \{min\ f_k\ (X), k = \overline{1, K_2^{def}}, \tag{3.7}$$

$$min\ I_2(X) \equiv \{min\ f_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}\}, \tag{3.8}$$

$$\text{ограничения } f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1,K}, \quad (3.9)$$

$$x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1,N}, \quad (3.10)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1,N}\}$ – это вектор управляемых переменных (параметров);

$F(X) = \{F_1(X)\ F_2(X)\ I_1(X)\ I_2(X)\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором критериев (характеристик) ТС (3.5)- (3.8), которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных X, где в (3.5) и (3.7) K_1^{def}, K_2^{def} (*definiteness*), а в (6) и (8) K_1^{unc}, K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев max и min сформированные в условиях определенности и определенности; в (3.9) $f_k^{min} \leq f_k\ (Y) \leq f_k^{max}, k = \overline{1,K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование технической системы; в (3.10) $x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1,N}$ – параметрические ограничения.

Предполагается, что функции $f_k\ (X), k = \overline{1,K}$ дифференцируемы и выпуклы, а заданное ограничениями $g_i\ (X), i = \overline{1,M}$ (3.9)- (3.10) множество допустимых точек $\boldsymbol{S}$ не пусто и представляет собой компакт:

$\boldsymbol{S} = \{Y \in R^n | G(Y) \leq 0, Y^{min} \leq Y \leq Y^{max}\} \neq \emptyset.$

3.1.2. **2 этап**. *Построение модели технической системы в условиях определенности*

Построение ТС в условиях определенности определяется функциональной зависимостью каждой характеристики и ограничений от параметров технической системы. В нашем примере известны характеристики (3.2)- (3.3) и ограничения (3.1). Используя данные (3.1), (3.2) построим двухкритериальную задачу нелинейного программирования в условиях определенности:

$$\min f_5(X) = 886.27 + 26.28x_1 + 33.95x_2 - 27.445x_3 - 49.5x_4 - 0.8451x_1x_2 + 0.5173x_1x_3 + 0.8219x_1x_4 - 0.1411x_2x_3 + 0.3593x_2x_4 - 0.0123x_3x_4 + 0.0438x_1^2 + 0.0401x_2^2 + 3.5281x_3^2 + 2.9103x_4^2, \quad (3.11)$$

$$max\ f_6(X) = 41.758 + 0.6598x_1 + 0.4505x_2 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.011x_1x_2 - 0.0069x_1x_3 + 0.0161x_1x_4 - 0.0143x_2x_3 + 0.0134x_2x_4 - 0.0005x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2, \quad (3.12)$$

при ограничениях: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120,$

$$20.0 \leq x_1 \leq 80.0, 0.0 \leq x_2 \leq 60.0, 2.0 \leq x_3 \leq 8.0, 2.0 \leq x_4 \leq 8.0. \quad (3.13)$$

Эти данные в дальнейшем используются при построении общей математической модели технической системы (определенности и неопределенности).

3.1.3. 3 этап. Построение модели технической системы в условиях неопределенности

Построение модели технической системы в условиях неопределенности состоит в использовании качественных и количественных описаний технической системы, полученных экспериментальных данных по принципу “вход-выход”. Преобразование информации (исходных данных в таблице 1):

$f_1(x_i, i = \overline{1,M})$, $f_2(x_i, i = \overline{1,M})$, $f_3(x_i, i = \overline{1,M})$, $f_4(x_i, i = \overline{1,M})$ в функциональный вид: $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ осуществляется путем использования математических методов (регрессионного анализа). Исходные данные таблицы 1 сформированы в системе MATLAB в виде матрицы:

$$I = |X, F| = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}, f_{i4}, i = \overline{1,M}\}. \quad (3.14)$$

Для каждого набора экспериментального данных $f_k, k = 1, 2, 3, 4$ строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\mathbf{min} \sum_{i=1}^{M} (x_i - \overline{x_\iota})^2$ в системе MATLAB. Для этого формируется полином A_k, определяющий взаимосвязь параметров: $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}\}$ и функции $\overline{x_{k\iota}} = f(X_i, A_k), k = 1, \ldots, 4$. Результатом является система коэффициентов: $A_k =$

$\{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{14k}\}$, которые определяют коэффициенты квадратичного полинома:

$$f_k(X,A) = A_{0k} + A_{1k}x_1 + A_{2k}x_2 + A_{3k}x_3 + A_{4k}x_4 + A_{5k}x_1x_2 + A_{6k}x_1x_3 + A_{7k}x_1x_4 + A_{8k}x_2x_3 + A_{9k}x_2x_4 + A_{10k}x_3x_4 + A_{11k}x_1^2 + A_{12k}x_2^2 + A_{13k}x_3^2 + A_{14k}x_4^2, k = 1, \dots, 6. \quad (3.15)$$

Программное обеспечение полиномиальной аппроксимации с четырьмя переменными и четырнадцатью факторами представлено в [44]. В итоге экспериментальные данные таблицы 1 преобразуются систему коэффициентов четырёх функции вида (3.15) в виде таблицы:

Ao= [269.8673 795.7195 39.7581 17.5032 % A_{0k} (3.16)
-1.8746 23.8932 0.6598 -0.0081 %A_{1k}
-2.9115 30.8660 0.4493 -0.7005 %A_{2k}
8.9389 -25.8586 -0.3094 -0.3605 %A_{3k}
10.9366 -45.0026 -1.8334 0.9769 %A_{4k}
0.0807 -0.7683 -0.0110 0.0138 %A_{5k}
-0.0517 0.4703 -0.0069 0.0708 %A_{6k}
-0.1413 0.7472 0.0161 -0.0001 %A_{7k}
0.0619 -0.1283 -0.0143 0.0436 %A_{8k}
-0.0868 0.3266 0.0134 0.0002 %A_{9k}
0.0030 -0.0112 -0.0005 0.0005 %A_{10k}
0.0119 0.0398 -0.0003 -0.0018 %A_{11k}
0.0098 0.0365 -0.0002 0.0029 %A_{12k}
-0.2028 3.2074 0.0279 0.0050 %A_{13k}
-0.4188 2.6457 0.1033 -0.0259]; %A_{14k}
Rj = [0.6115 0.7149 0.6551 0.9017];
RRj= [0.3740 0.5111 0.4292 0.8130];

На основе Ao (1), Ao (2), Ao (3), Ao (4) строятся функции $f_1(X), \dots, f_4(X)$, которые с учетом полученных коэффициентов примут вид:

$$max\ f_1(X) \equiv 269.86 - 1.8746x_1 - 2.9115x_2 + 8.9389x_3 + 10.936x_4 + 0.0807x_1x_2 - 0.0517x_1x_3 - 0.1413x_1x_4 + 0.0619x_2x_3 - 0.0868x_2x_4 + 0.003x_3x_4 + 0.0119x_1^2 + 0.0098x_2^2 - 0.2028x_3^2 - 0.4188x_4^2, \quad (3.17)$$

$$min\ f_2(X) \equiv 795.72 + 23.89x_1 + 30.866x_2 - 25.8586x_3 - 45.0026x_4 - 0.7683x_1x_2 + 0.4703x_1x_3 + 0.7472x_1x_4 - 0.1283x_2x_3 + 0.3266x_2x_4 - 0.0112x_3x_4 + 0.0398x_1^2 + 0.0365x_2^2 + 3.2x_3^2 + 2.6457x_4^2, \quad (3.18)$$

$$max\ f_3(X) \equiv 39.7581 + 0.6598x_1 + 0.4493x_3 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.0110x_1x_2 - 0.0069x_1x_3 + 0.0161x_1x_4 - 0.0143x_2x_3 + 0.0134x_2x_4 - 0.0005x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2, \quad (3.19)$$

$$min\ f_4(X) \equiv 17.5032 - 0.0081x_1 - 0.7005x_2 - 0.3605x_3 + 0.9769x_4 + 0.0138x_1x_2 + 0.0708x_1x_3 - 0.0001x_1x_4 + 0.0436x_2x_3 + 0.0002x_2x_4 + 0.0005x_3x_4 - 0.0018x_1^2 + 0.0029x_2^2 + 0.005x_3^2 - 0.0259x_4^2, \quad (3.20)$$

при ограничениях: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120$, (3.21)

$$20.0 \le x_1 \le 80.0, 0.0 \le x_2 \le 60.0, 2.0 \le x_3 \le 8.0, 2.0 \le x_4 \le 8.0. \quad (3.22)$$

Минимальные и максимальные значения экспериментальных данных $x_1, \dots, x_4$ представлены в табл. 1. Минимальные и максимальные значения функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ незначительно отличаются от экспериментальных данных. Индекс корреляции и коэффициенты детерминации представлены в нижних строках таблицы 1. Результаты регрессионного анализа (16) в дальнейшем используются при построении математической модели технической системы.

3.1.4. **4 этап**. *Построение агрегированной математической и численной модели технической системы условиях определенности*

Для построения математической модели технической системы используем: функции, полученные условиях определенности (3.11)- (3.12) и неопределенности (3.17)- (3.20), параметрические ограничения (3.21)- (3.22).

Функции (3.11)- (3.12), (3.17)- (3.20) рассматриваем как критерии, определяющие целенаправленность функционирования технической системы. Множество критериев K=6 включают три критерия $f_1(X) \to max, f_3(X) \to max, f_6(X) \to max$ и три $f_2(X) \to min, f_4(X) \to min, f_5(X) \to min$. В итоге математическая модель функционирования сложной технической системы представим шестимерной задачи в виде векторной задачей математического программирования: $f_1(X) \to max, f_3(X) \to max, f_6(X) \to max$; второй, четвертой и пятой характеристики (функции), как можно ниже: $f_2(X) \to min, f_4(X) \to min, f_5(X) \to min$.

$$opt\ F\ (X) = \{\max F_1\ (X) = \{max\ f_1(X) \equiv 269.86 - 1.8746x_1 - 2.9115x_2 + 8.9389x_3 + 10.936x_4 + 0.0807x_1x_2 - 0.0517x_1x_3 - 0.1413x_1x_4 + 0.0619x_2x_3 - 0.0868x_2x_4 + 0.003x_3x_4 + 0.0119x_1^2 + 0.0098x_2^2 - 0.2028x_3^2 - 0.4188x_4^2, \quad (3.23)$$

$$max\ f_3(X) \equiv 39.7581 + 0.6598x_1 + 0.4493x_3 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.0110x_1x_2 - 0.0069x_1x_3 + 0.0161x_1x_4 - 0.0143x_2x_3 + 0.0134x_2x_4 - 0.0005x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2, \quad (3.24)$$

$$max\ f_6(X) = 41.758 + 0.6598x_1 + 0.4505x_2 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.011x_1x_2 - 0.0069x_1x_3 + 0.0161x_1x_4 - 0.0143x_2x_3 + 0.0134x_2x_4 - 0.0005x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2\}, \quad (3.25)$$

$$\text{Min}\ F_1\ (X) = \{min\ f_2(X) \equiv 795.72 + 23.89x_1 + 30.866x_2 - 25.8586x_3 - 45.0026x_4 - 0.7683x_1x_2 + 0.4703x_1x_3 + 0.7472x_1x_4 - 0.1283x_2x_3 + 0.3266x_2x_4 - 0.0112x_3x_4 + 0.0398x_1^2 + 0.0365x_2^2 + 3.2x_3^2 + 2.6457x_4^2, \quad (3.26)$$

$$min\ f_4(X) \equiv 17.5032 - 0.0081x_1 - 0.7005x_2 - 0.3605x_3 + 0.9769x_4 + 0.0138x_1x_2 + 0.0708x_1x_3 - 0.0001x_1x_4 + 0.0436x_2x_3 + 0.0002x_2x_4 + 0.0005x_3x_4 - 0.0018x_1^2 + 0.0029x_2^2 + 0.005x_3^2 - 0.0259x_4^2, \quad (3.27)$$

$$min\ f_5(X) = 886.27 + 26.28x_1 + 33.95x_2 - 27.445x_3 - 49.5x_4 - 0.8451x_1x_2 + 0.5173x_1x_3 + 0.8219x_1x_4 - 0.1411x_2x_3 + 0.3593x_2x_4 - 0.0123x_3x_4 + 0.0438x_1^2 + 0.0401x_2^2 + 3.5281x_3^2 + 2.9103x_4^2\}\}, \quad (3.28)$$

$$\text{при ограничениях: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120,$$

$$20.0 \le x_1 \le 80.0, 0.0 \le x_2 \le 60.0, 2.0 \le x_3 \le 8.0, 2.0 \le x_4 \le 8.0. \quad (3.29)$$

Векторная задача математического программирования (3.23)- (3.29) представляет модель принятия оптимального решения технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

3.2. Блок 2. Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) в технической системе на базе ВЗМП

3.2.1. ***5 этап.*** *Решение ВЗМП – модели технической системы при равнозначных критериях (решение прямой задачи).*

Для решения векторных задач математического программирования (3.23)- (3.29) представлены методы, основанные на аксиоматике нормализации критериев и принципе гарантированного результата, вытекающие из аксиомы 1 и принципа оптимальности 1. Алгоритм представим в виде ряда шагов.

Шаг 1. Решение задачи (3.23)- (3.29) по каждому критерию отдельно, при этом используется функция *fmincon* (…) системы MATLAB, обращение к функции *fmincon* (…) рассмотрено в [17, 44]. В результате расчета по каждому критерию получаем точки оптимума: X_k^* и $f_k^* = f_k\ (X_k^*), k = \overline{1, K}$, $\boldsymbol{K}$=6– величины критериев в этой точке, т. е. наилучшее решение по каждому критерию:

$$1: X_1^* = \{x_1 = 46.76, x_2 = 43.23, x_3 = 8, x_4 = 2\}, f_1^* = f_1\ (X_1^*) = -323.9; \quad (3.30)$$

$$2: X_2^* = \{x_1 = 25, x_2 = 23.65, x_3 = 4.98, x_4 = 6.307\}, f_2^* = f_2\ (X_2^*) = 1696.7;$$

$$3: X_3^* = \{x_1 = 80.0, x_2 = 0.0, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\}, f_3^* = f_3\ (X_3^*) = -91.25;$$

4: $X_4^* = \{x_1 = 20.0, x_2 = 58.08, x_3 = 2.0, x_4 = 2.0\}$, $f_4^* = f_4\ (X_4^*)\ = 10.815$.
5: $X_5^* = \{x_1 = 25.2, x_2 = 23.69, x_3 = 4.8, x_4 = 6.75\}$, $f_5^* = f_5\ (X_5^*) = 1882.3$;
6: $X_6^* = \{x_1 = 80.0, x_2 = 0.0, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\}$, $f_6^* = f_6(Y_6^*) = -93.25$.

Ограничения (3.29) и точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*$ в координатах $\{x_1,\ x_2\}$ представлены на рис. 1.

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): X_k^0 и $f_k^0 = f_k\ (X_k^0), k = \overline{1, K}$, $\boldsymbol{K}$=4. Для чего решается задача (23)- (29) для каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум, для каждого критерия $k = \overline{1, K_2}$ на максимум. В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k\ (X_k^0)$ – величина k-го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1, K}$, (верхний индекс ноль):

1: $X_1^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 0, x_3 = 2., x_4 = 8.\}, f_1^0 = -175.15$ (3.31)
2: $X_2^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 8.0\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = -3548.08$;
3: $X_3^0 = \{x_1 = 20.0, x_2 = 25.37, x_3 = 8, x_4 = 6.625\}, f_3^0 = \ f_3\ (X_3^0) = 50.57$;

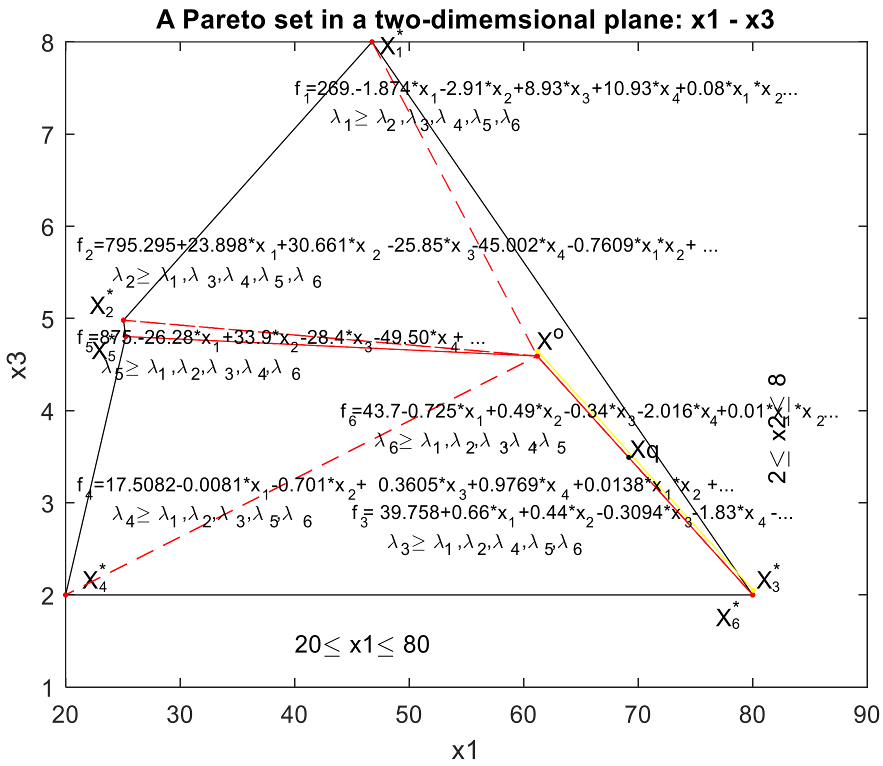

Рис. 1. Множество Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$, $X_1^*, \dots, X_6^*$ в двухмерной системе координат $\{x_1, x_2\}$

4: $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_2 = 22.88, x_3 = 6.39, x_4 = 20\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = -61.35$;
5: $X_5^* = \{x_1 = 80.0, x_2 = 0.0, x_3 = 8.0, x_4 = 8.0\}, f_5^0 = \ f_5(X_5^0) = -3921.8$;
6: $X_6^0 = \{x_1 = 20.0, x_2 = 25.36, x_3 = 8.0, x_4 = 6.63\}, f_6^0 = f_6(Y_6^0) = 52.604$.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето, (т.е. анализ по каждому критерию). В точках оптимума $X^* = \{X_1^*, \dots, X_6^*\}$ определяются величины целевых функций $F\ (X^*) = \left\| f_q\ (X_k^*) \right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$:

$$F\ (X^*) = \begin{Vmatrix} 324.0\ 1997.9\ 58.0\ 57.1\ 2216.7\ 60.0 \\ 272.3\ 1696.8\ 53.8\ 26.9\ 1882.4\ 55.8 \\ 175.2\ 3285.6\ 91.3\ 22.1\ 3627.1\ 93.3 \\ 221.5\ 2266.4\ 62.0\ 10.8\ 2506.0\ 64.0 \\ 270.9\ 1696.9\ 54.0\ 26.5\ 1882.3\ 56.0 \\ 175.2\ 3285.6\ 91.3\ 22.1\ 3627.1\ 93.3 \end{Vmatrix}, d_k = \begin{Vmatrix} 148.8 \\ -1851.3 \\ 40.7 \\ -50.5 \\ -2039.5 \\ 40.6 \end{Vmatrix}. \quad (3.32)$$

вектор отклонений по каждому критерию на множестве $\boldsymbol{S}$: $d_k = f_k^* - f_k^0, k = \overline{1,6}$:
$D = \ (d_1 = 148.7, d_2 = -1851, d_3 = 40.6, d_4 = -50.5, d_5 = -2039, d_6 = 40.6)^T$;
и матрицы относительных оценок по каждому критерию в точках X^* и X^0:
$\lambda\ (X^*) = \|\lambda_q\ (X_k^*)\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, где $\lambda_k\ (X) = \ (f_k^* - f_k^0)/d_k$

$$\lambda\ (X^*) = \begin{Vmatrix} \mathbf{1.0000}\ 0.8373\ 0.1814\ 0.0843\ 0.8361\ 0.1821 \\ 0.6527\ \mathbf{1.0000}\ 0.0787\ 0.6825\ 1.0000\ 0.0787 \\ 0\ 0.1418\ \mathbf{1.0000}\ 0.7774\ 0.1445\ 1.0000 \\ 0.3114\ 0.6923\ 0.2804\ \mathbf{1.0000}\ 0.6942\ 0.2816 \\ 0.6433\ 1.0000\ 0.0832\ 0.6898\ \mathbf{1.0000}\ 0.0832 \\ 0.0000\ 0.1418\ 1.0000\ 0.7774\ 0.1445\ \mathbf{1.0000} \end{Vmatrix}. \quad (3.33)$$

$$\lambda\ (X^0) = \begin{Vmatrix} \mathbf{0.0}\ 0.1418\ 1.0000\ 0.7774\ 0.1445\ 1.0000 \\ 0.1129\ \mathbf{0.0}\ 0.9135\ 0.1414\ -0.0000\ 0.9134 \\ 0.8005\ 0.9846\ \mathbf{0.0}\ 0.6063\ 0.9831\ 0.0000 \\ 0.7108\ 0.5921\ 0.4401\ \mathbf{0.0}\ 0.5912\ 0.4403 \\ 0.1129\ 0\ 0.9135\ 0.1414\ \mathbf{0.0}\ 0.9134 \\ 0.8005\ 0.9847\ 0.0000\ 0.6062\ 0.9832\ \mathbf{0.0} \end{Vmatrix}$$

Анализ величин критериев в относительных оценках показывает, что в точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии значительно меньше единицы. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки наиболее близки к единице. На решение этой проблемы направлено решение λ-задачи – шаги 4, 5.

Шаг 4. Построение λ-задачи. осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o \ = \ \boldsymbol{max_{Y\in S} min_{k\in K}} \lambda_k\ (\mathrm{X}), G\ (X) \le 0, X \ge 0, \quad (3.34)$$

которая на втором этапе преобразуется в стандартную задачу математического программирования (λ-задача):

$\lambda^o \ = \ max\ \lambda$, (3.35)

$$\text{с ограничениями } \lambda - \frac{f_1\ (X) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} \le 0, \lambda - \frac{f_3\ (X) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} \le 0,\ \lambda - \frac{f_6\ (X) - f_6^0}{f_6^* - f_6^0} \le 0, \quad (3.36)$$

$$\lambda - \frac{f_2\ (X) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} \le 0, \lambda - \frac{f_4\ (X) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} \le 0,\ \lambda - \frac{f_5\ (X) - f_5^0}{f_4^* - f_4^0} \le 0, \quad (3.37)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120, \quad (3.38)$$

$$0 \le \lambda \le 1, \quad (3.39)$$

$$20.0 \le x_1 \le 80.0, 0.0 \le x_2 \le 60.0, 2.0 \le x_3 \le 8.0, 2.0 \le x_4 \le 8.0. \quad (3.40)$$

где вектор неизвестных имеет размерность N+1: $\boldsymbol{X} = \{x_1, \dots, x_N, \lambda\}$; функции $f_1(X), f_2(X), \dots, f_6(X)$ соответствуют (3.23)- (3.29) соответственно. Подставив числовые значения функций $f_1(X), f_2(X), \dots, f_6(X)$, мы получим λ-задачу:

$\lambda^o \ = \ max\ \lambda$, (3.41)

$$\text{ограничения } \lambda \ - \frac{269.86 - 1.8746x_1 - \dots - 0.2028x_3^2 - 0.4188x_4^2 - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} \le 0, \dots, \quad (3.42)$$

$$\lambda \ - \frac{39.7581 + 0.6598x_1 + 0.4493x_3 - \dots + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2 - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} \le 0, \dots, \quad (3.43)$$

$$\lambda - \frac{41.758+0.6598x_1+0.4505x_2- \dots +0.0279x_3^2+0.1033x_4^2-f_6^0}{f_6^*-f_6^0} \leq 0, \quad (3.44)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120, \quad (3.45)$$

$$0\leq\lambda\leq1, 20.0 \leq x_1 \leq 80.0, 0.0 \leq x_2 \leq 60.0, 2.0 \leq x_3 \leq 8.0, 2.0 \leq x_4 \leq 8.0. \quad (3.46)$$

Шаг 5. Решение λ-задачи.

Решение λ-задачи. (3.41)- (3.46) осуществляется обращением к функции *fmincon* (…), [44]:

$[Xo, Lo] = fmincon\,('Z\_TehnSist\_4Krit\_L', X0, Ao, bo, Aeq, beq, lbo, ubo,$
$'Z\_TehnSist\_LConst', options)$.

В результате решения векторной задачи (3.23)- (3.29) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ-задачи (3.41)- (3.46) получили:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 61.188, x_2 = 12.219, x_3 = 4.591, x_4 = 2.0, \lambda^o = 0.5196\}$, (3.47)

точку оптимума $\boldsymbol{X^o}$, которая представляет конструктивные параметры технической системы при равнозначных критериях (характеристиках), рис. 1.

$f_k(X^o), k = \overline{1, K}$- величины критериев (характеристик ТС):

$$\{f_1(X^o) = 252.47, f_2\,(X^o) = 2308.6, f_3\,(X^o) = 71.709, f_4\,(X^o) = 35.09, f_5\,(X^o) = 2555.0, f_6\,(X^o) = 73.723\}; \quad (3.48)$$

$\lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}$- величины относительных оценок

$$\{\lambda_1(X^o) = 0.5196, \lambda_2(X^o) = 0.6695, \lambda_3(X^o) = 0.5196, \lambda_4(X^o) = 0.5196, \lambda_5(X^o) = 0.6702, \lambda_6(X^o) = 0.5196\}; \quad (3.49)$$

λ^o=0. 5196 – это максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок, измеренный в относительных единицах:

$$\lambda^o = min\,(\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o), \lambda_5(X^o), \lambda_6(X^o)) = 0.5196, \quad (3.50)$$

λ^o – также называют гарантированным результатом в относительных единицах, т. е. $\lambda_k(Y^o)$ в (3.50) и соответственно характеристики технической системы $f_k(X^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

Заметим, что в соответствии с теоремой с 1, в точке $\boldsymbol{X^o}$ критерии 1, 3, 4 и 6 противоречивы. Это противоречие определяется равенством:

$\lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda_4(X^o) = \lambda_6(X^o) = \lambda^o = 0.5196,$

остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^o) = 0.6695\}, \lambda_5(X^o) = 0.6702 > \lambda^o$.

В итоге теорема 1 служит основой для определения правильности решения векторной задачи. В векторной задаче математического программирования, как правило, для двух критериев выполняется равенство:

$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in S$, (в нашем примере такими критериями являются 1, 3, 4, 6), для других критериев определяется как неравенство.

Таким образом. Результат решения ВЗМП (3.23)- (3.29) ***с равнозначными критериями*** – математической модели технической системы (с четырьмя параметрами и шестью критериями) включает:

оптимальный результат по каждому критерию – точки оптимума

$$X_k^* = \{x_j, j = \overline{1, N}\}; \quad (3.51)$$

оптимальный результат по каждому критерию -функции:

$f_k^* = f_k\,(X_k^*), k = \overline{1, K}$, **K**=4

оптимальный результат – точки оптимума и функции:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}; f_k(X^o), k = \overline{1, K}; \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}$ – (3.47), (3.48), (3.49).

3.2.2. **6 этап.** *Геометрической интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 6 критериями в двухмерную систему координат (с 2 параметрами) в относительных единицах.*

Для геометрической интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 6 критериями в двухмерную систему координат (с 2-мя параметрами) в относительных единицах введем изменения. В ВЗМП (3.23)- (3.29) параметры x_1 и x_3 рассматриваются как переменные, параметры x_2 и x_4 рассматриваются как постоянные. Присвоим постоянным параметрам размерность $x_2 = 12.219, x_4 = 2.0$ в соответствии с результатом решения ВЗМП (3.23)- (3.29) при равнозначных критериях, представленных в (3.47).

В итоге ВЗМП (3.23)- (3.29) стала двух мерной.

В результате решения ВЗМП (3.23)- (3.29) с двумя переменными x_1 и x_3 (в обозначения результатов ввели дополнительно «о» X1omax) получили.

1. Координаты точки по первому критерию на максимум:

X1omax = {x_1 =46.7636 x_2 =12.2194 x_3 =8.0000 x_4 =2.0000}. (3.52)

Величины шести критериев в точке X1omax:

FX1omax = {$f_1(X1omax) = 270.4$ $f_2(X1omax) =$ 2103.7 $f_3(X1omax)$ =63.0 $f_4(X1omax)$ =43.0 $f_5(X1omax)$ =2333.1 $f_6(X1omax)$ =65.0}

Величины относительны оценок критериев в точке X1omax:

LX1omax = {$\lambda_1(X1omax)$ =0.6399 $\lambda_2(X1omax)$ = 0.7802 $\lambda_3(X1omax)$ =0.3063 $\lambda_4(X1omax)$ =0.3635 $\lambda_5(X1omax)$ = 0.7790 $\lambda_6(X1omax)$ =0.3062}. (3.53)

Координаты точки по первому критерию на минимум:

X1omin ={ 80.0000 12.2194 2.0000 2.0000 20.0000}.

Величины шести критериев в точке X1omin:

FX1omin ={1.0e+03 * 0.2466 2.6747 0.0830 0.0242 2.9552 0.0850}.

Величины относительны оценок критериев в точке X1omin:

LX1omin = (0.4803 0.4717 0.7976 0.7345 0.4740 0.7978) (3.54)

2. Координаты точки, функции и относительные оценки по второму критерию на максимум и минимум:

X2omax ={25.0532 12.2194 4.9806 2.0000 20.0000}.

FX2omax ={1.0e+03 * 0.2688 1.5342 0.0535 0.0239 1.7036 0.0555}.

LX2omax ={0.6293 1.0878 0.0716 0.7403 1.0876 0.0713}.

X2omin ={80.0000 12.2194 8.0000 2.0000 20.0000).

FX2omin ={1.0e+03 * 0.2678 2.9282 0.0785 0.0596 3.2400 0.0805}.

LX2omin ={0.6229 0.3348 0.6857 0.0356 0.3343 0.6859}. (3.55)

3. Координаты точки, функции и относительные оценки по третьему критерию на максимум и минимум:

X3omax ={ 80.0000 12.2194 2.0000 2.0000 20.0000}.

FX3omax ={1.0e+03 * 0.2466 2.6747 0.0830 0.0242 2.9552 0.0850}.

LX3omax ={0.4803 0.4717 0.7976 0.7345 0.4740 0.7978}.

X3omin ={20.0000 12.2194 8.0000 2.0000 20.0000).

FX3omin ={1.0e+03 * 0.2915 1.5037 0.0501 0.0268 1.6731 0.0521}.

LX3omin ={0.7821 1.1043 -0.0111 0.6847 1.1026 -0.0115}. (3.56)

4. Координаты точки, функции и относительные оценки по четвертому критерию на максимум и минимум:

X4omax ={20.0000 12.2194 2.0000 2.0000 20.0000}.

FX4omax ={1.0e+03 * 0.2517 1.4195 0.0522 0.0169 1.5745 0.0542}.

LX4omax ={0.5143 1.1498 0.0397 0.8793 1.1509 0.0393}.

X4omin ={62.7178 12.2194 8.0000 2.0000 20.0000}.

FX4omin ={1.0e+03 * 0.2659 2.4885 0.0705 0.0514 2.7564 0.0725}.

LX4omin ={0.6097 0.5723 0.4905 0.1963 0.5715 0.4905}. (3.57)

5. Координаты точки, функции и относительные оценки по пятому критерию на максимум и минимум:

X5omax ={25.2469 12.2194 4.8033 2.0000 20.0000}.

FX5omax ={1.0e+03 * 0.2675 1.5354 0.0537 0.0237 1.7047 0.0557}.

LX5omax ={0.6206 1.0872 0.0757 0.7458 1.0871 0.0754}.

X5omin ={80.0000 12.2194 8.0000 2.0000 20.0000}.

FX5omin ={1.0e+03 * 0.2678 2.9282 0.0785 0.0596 3.2400 0.0805}.

LX5omin ={0.6229 0.3348 0.6857 0.0356 0.3343 0.6859}. (3.58)

5. Координаты точки, функции и относительные оценки по шестому критерию на максимум и минимум:

X6omax ={80.0000 12.2194 2.0000 2.0000 20.0000}.

FX6omax ={1.0e+03 * 0.2466 2.6747 0.0830 0.0242 2.9552 0.0850}.

LX6omax ={0.4803 0.4717 0.7976 0.7345 0.4740 0.7978}.

X6omin ={20.0000 12.2194 8.0000 2.0000 20.0000}.

FX6omin ={1.0e+03 * 0.2915 1.5037 0.0501 0.0268 1.6731 0.0521}.

LX6omin ={0.7821 1.1043 -0.0111 0.6847 1.1026 -0.0115}. (3.59)

Представим в целом результаты решения ВЗМП с двумя переменными параметрами x_1 и x_3 (двухмерная ВЗМП):

X = [Xopt (1,:)={46.7636 43.2364 8.0000 2.0000}, $\lambda_1(X1omax)$ =0.6399;

Xopt (2,:)= {25.0532 23.6583 4.9806 6.3079}, $\lambda_2(X2omax)$ =0.6293;

Xopt (3,:)= {80.0000 0 2.0000 8.0000}, $\lambda_3(X3omax) = 0.4803$;

Xopt (4,:)= {20.0000 58.0862 2.0000 2.0000},$\lambda_4(X4omax) = 0.5143$;

Xopt (5,:)= {25.2469 23.6988 4.8033 6.2509}, $\lambda_5(X5omax) = 0.6206$;

Xopt (6,:)= {80.0000 0 2.0000 8.0000}, $\lambda_6(X6omax) = 0.4803$;

Xo (1:4)= {61.1888 12.2194 4.5919 2.0000}, λ(Xo) $= \lambda^o = 0.5196$. (3.60)

В допустимом множестве точек $\boldsymbol{S}$, образованных ограничениями (3.45)- (3.46), точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*$, объединенных в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$, представлены на рис 1.

Координаты этих точек, а также характеристики технической системы в относительных единицах $\lambda_1\ (X), \lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X), \lambda_4\ (X)$ показаны на рис. 2 в трех мерном пространстве $x_1\ x_2$ и λ, где третья ось λ – относительная оценка.

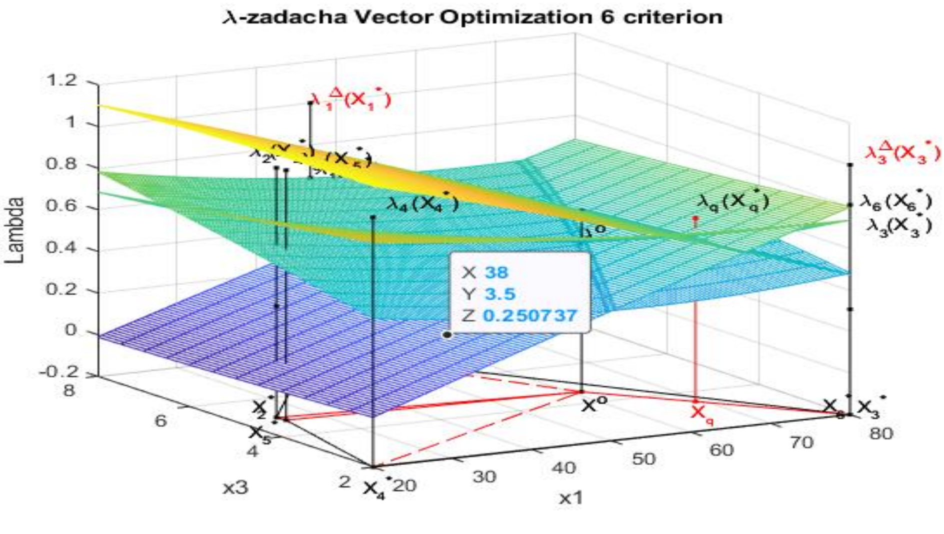

Рис. 2. Решение λ-задачи в трехмерной системе координат $x_1\ x_3$ и λ

Discussion. Сравним результаты решения ВЗМП (3.23)- (3.29) с переменными координатами $\{x_1 x_2\ x_3\ x_4\}$ (четырех мерная ВЗМП), представленные в (3.47), (3.48), (3.49), с результатами решения ВЗМП (3.23)- (3.29) с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ (двух мерная ВЗМП), представленные в (3.50).

Мы видим, что координаты шести точек оптимума в $\{x_1\ x_3\}$ и λ^o совпадают. Оптимальные величины критериев $f_k\ (X_k^*), k \in \boldsymbol{K}$ и соответствующие относительные оценки $\lambda_k\ (X_k^*), k \in \boldsymbol{K}$ не совпадают.

Рассмотрим, например, оптимальную точку X_3^*. Функция $\lambda_3\ (X)$ сформирована из функции $f_3\ (X)$ с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 12.219, x_4 = 2.0\}$, взятые из оптимальной точки X^o (3.47). В точке X_3^* относительная оценка LX3omax (3)= 0.7976 – показана на рис. 2 черной точкой. Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3\ (X_3^*)$ полученная из функции $f_3\ (X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*) = 1$ – показана на рис. 2 красной точкой.

Разность между $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*)$ = 1 и $\lambda_3\ (X_3^*) = 0.7976$ является ошибкой Δ=0.2024 перехода от четырехмерной (а в общем случае *N*-мерной) к двухмерной области. Аналогично показана точка X_1^* и соответствующие относительные оценки $\lambda_1\ (X_1^*)$ и $\lambda_1^\Delta\ (X_1^*)$. Обобщая и объединяя проблемы дискуссии, можем сформулировать методологию.

Методология геометрической интерпретации перехода от N-мерного к двухмерному измерению функці1 в векторной задаче математического программирования.

1 шаг. Построение и решение λ-задачи с *N*-мерными параметрами.

2 шаг. Построение и решение λ-задачи с *2*-мерными параметрами, остальные (*N-2)* параметры постоянные взятые из результатов решения λ-задачи с *N*-мерными параметрами (из шага 1).

3 шаг. Геометрическое построение функций из λ-задачи с *2*-мерными параметрами стандартными методами и соответствующими надписями.

Таким образом, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая иллюстрация от *N*-мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками аппроксимации.

3.2.3. **7 этап.** *Решение ВЗМП – модели технической системы при заданном приоритете критерия (решение обратной задачи).*

Лицом, принимающим решения, как правило, является конструктор системы.

Шаг 1. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Алгоритм решения векторной задачи представлен на стадии 3. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше.

Множество точек, оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ находится между оптимальными точками $X_1^*\ X^o\ X_3^*\ X_6^*\ X^o\ X_4^*\ X^o\ X_5^*\ X^o X_2^*\ X^o\ X_1^*$. Мы проведем анализ множества точек Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_1^*\ X_3^*\ X_4^*\ X_5^*\ X_2^*\ X_1^*$ с точкой X^o, которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили пять подмножеств точек $X \in \boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1,4}$. Подмножество $\boldsymbol{S_1^o} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, λ_4, то есть в поле первого критерия $\boldsymbol{S_1^o}$ имеет приоритет над остальными. Подобно $\boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$- подмножества точек, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, будем обозначать $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o} \cup \boldsymbol{S_5^o}$. Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1\ x_2\}$ на рис. 1. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1\ x_2\ \lambda\}$ на рис. 2, где третья ось λ-относительная оценка.

Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 2 он снижен до -0,2 (чтобы были видимы ограничения). Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком системы.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $\boldsymbol{S_1^o}, \boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}, \boldsymbol{S_5^o}$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 1 в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X), f_5(X), f_6(X)$.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in \boldsymbol{K}$ и $p \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство: $\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$, а для остальных выполняется неравенства: $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \neq p \neq k$.

В модели технической системы (3.23)- (3.29) и соответствующей λ-задачи (3.41)- (3.46) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$= 0.51958, т.е. для этих критериев выполняется числовая симметрия.

Эту симметрию геометрически покажем на рис. 3, где представлены функции $\lambda_1(X)$ и $\lambda_3(X)$ отдельно со стороны оптимальной точки $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$.

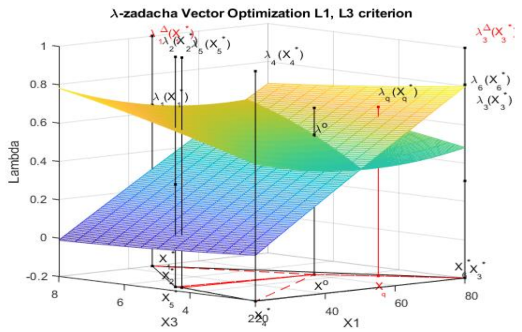

Рис. 3. Решение λ-задачи ($\lambda_1(X)$ и $\lambda_3(X)$) в трехмерной системе координат x_1 x_2 и λ. $\lambda_1(X^o) =$ 0.7372, $\lambda_3(X^o)$= 0.5195.

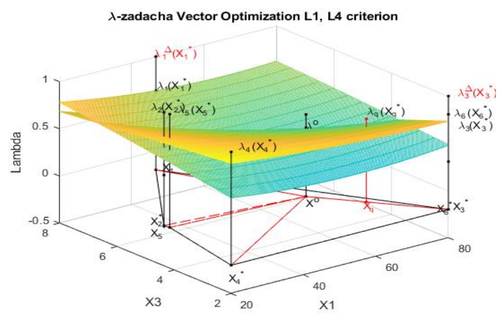

Рис. 4. Решение λ-задачи $\lambda_2(X), \lambda_3(X)$) в трехмерной системе координат x_1 x_2 и λ. $\lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$=0.5195 (точно на пересечении).

Для сравнения аналогично представим функции наиболее противоречивые критерии $\lambda_1(X)$ и $\lambda_4(X)$ отдельно со стороны оптимальной точки $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$. На рисунках 3 и 4 показаны все точки и данные, о которых говорилось на рис. 2.

Как правило, из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$= 0.5196 противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in \boldsymbol{K}$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $\boldsymbol{K} = 6$, показанных на рис. 3 (а).

На дисплей выдается сообщение:

q=input ('Введите приоритетный критерий (номер) *q*= ') – Ввели критерий *q*=3.

Шаг *3*. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o (50) в точку X_q^*, полученную на первом шаге. Данные о критерии q=3 выдаются на экран:

$$f_q(X^o) = 71.709 \le f_q(X) \le 91.25 = f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}. \quad (3.61)$$

В относительных единицах критерий q=3 изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.5196 \le \lambda_q(X) \le 1 = \lambda_q\left(X_q^*\right), q = 3 \in \boldsymbol{K}.$$

Эти данные анализируется.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$. (Decision-making).
На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия *fq*=»: вводим $\boldsymbol{f_q}$**=80**.

Шаг 5. *Вычисляется относительная оценка.*

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 80$ вычисляется относительная оценка: $\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{80-71.709}{91.25-71.709} = 0.7234$,

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в пределах (3.61):

$$\lambda_3(X^o) = 0.5196 \le \lambda_{q=3} = 0.7234 \le 1 = \lambda_3\,(X_3^*), q \in \boldsymbol{K}, \quad (3.62)$$

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q\,(X)$ в (3.61) и соответственно относительной оценки λ_q в (3.62), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q\,(X^o)$, λ_q, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q\,(X^o)}{\lambda_q\,(X_q^*) - \lambda_q\,(X^o)} = \frac{0.7234-0.5196}{1-0.5196} = 0.4243, q = 3 \in \boldsymbol{K}. \quad (3.63)$$

Шаг 7. Вычислим координаты точки приоритета критериев $f_q = 80$.

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$, $q = 3$ определим координаты точки с $f_q = 80$ с относительной оценкой (3.52):

$$x_{\lambda=0.74}^{q=3} = \{x_1 = X^o\,(1) + \rho\,(X_q^*\,(1) - X^o\,(1)),$$
$$x_2 = X^o(2) + \rho\left(X_q^*(2) - X^o(2)\right),$$
$$x_3 = X^o(3) + \rho\left(X_q^*(3) - X^o(3)\right),$$
$$x_4 = X^o(4) + \rho\left(X_q^*(4) - X^o(4)\right)\}, \quad (3.64)$$

где $X^o = \{X^o = \{x_1 = 61.188, x_2 = 12.219, x_3 = 4.591, x_4 = 2.0, \lambda^o = 0.5196\}$,
$X_3^* = \{x_1 = 80.0, x_2 = 0.0, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\}$.

Как результат решения (3.64) на экран выводится сообщение:
'Координаты точки Xq= [x1=69.1698 x2=7.0351 x3=3.4922 x4=4.5456]'

В итоге получили точку с координатами:
$X^q = \{x_1 = 69.169, x_2 = 7.035, x_3 = 3.492, x_4 = 4.545\}$.

Шаг 8. Вычисление главных показателей точки X^q.

Для полученной точки X^q, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k\,(X^q) = \{f_k\,(X^q), k = \overline{1,K}\}$,

$f\,(X^q) = \{f_1\,(X^q) = 228.1, f_2\,(X^q) = 2638.5, f_3\,(X^q) = 78.3, f_4\,(X^q) = 31.1, f_5\,(X^q) = 2916.8, f_6\,(X^q) = 80.3\}$;

все относительные оценки критериев:

$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\}, \lambda_k\,(X^q) = \frac{f_k\,(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$:

$\lambda_k\,(X^q) = \{\lambda_1\,(X^q) = 0.3557, \lambda_2\,(X^q) = 0.4913, \lambda_3\,(X^q) = 0.6812, \lambda_4\,(X^q) = 0.5981, \lambda_5\,(X^q) = 0.4928, \lambda_6\,(X^q) = 0.6812\}$;

минимальная относительная оценка: $\min \lambda\,(X^q) = \min\limits_{k \in K}\,(\lambda_k\,(X^q)) = 0.3557$.

вектор приоритетов критерия $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q\,(X^q)}{\lambda_k\,(X^q)}, k = \overline{1,K}\}$:

$P^q = [p_1^3 = 1.9151, p_2^3 = 1.3865, p_3^3 = 1.0, p_4^3 = 1.1389, p_5^3 = 1.3824, p_6^3 = 1.0]$;

относительная оценка с соответствующим вектором приоритетов:

$$\lambda_k\,(X^q) * P^q = \{p_1^3 * \lambda_1(X^q) = 0.6812, p_2^3 * \lambda_2(X^q) = 0.6812, p_3^3 * \lambda_3(X^q) = 0.6812, p_4^3 * \lambda_4\,(X^q) = 0.6812, p_5^3 * \lambda_5(X^q) = 0.6812, p_6^3 * \lambda_6\,(X^q) = 0.6812\}$$

минимальная относительная оценка: $\lambda^{oo} = \min\,(p_1^3\lambda_1(X^q), p_2^3\lambda_2\,(X^q), p_3^3\lambda_3\,(X^q), p_4^3\lambda_4\,(X^q), p_5^3\lambda_5\,(X^q), p_6^3\lambda_6\,(X^q)) = 0.6812$

Аналогично могут быть получены другие точки Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S^o}$

Анализ результатов. Рассчитанная величина $f_q\,(X_t^o) = 78.3, q = 3 \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 80$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q\,(X_t^o) - f_q| = |78.3 - 80| = 1.7$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.2\%$. Если ошибка $\Delta f_q = |f_q\,(X_t^o) - f_q| = |78.3 - 80| = 1.7$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.2\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \le \Delta f$, то вычисления завершаются. ***Конец***.

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения (3.29) и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений). В нашем примере окончательный вариант включает параметры: $X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 61.188, x_2 = 12.219, x_3 = 4.591, x_4 = 2.0, \lambda^o = 0.5196\}$,

параметры технической системы при заданном приоритете критерия:

q=3: $X^q = \{x_1 = 69.169, x_2 = 7.035, x_3 = 3.492, x_4 = 4.545\}$.

3.3. Блок 3. Исследование, геометрическая интерпретация N-мерного пространства в 2-х мерное и выбор оптимальных параметров сложной технической системы в многомерной математике.

Блок 3 включает 2 этапа: 8 этап исследования в относительных единицах: 9 этап исследования в физических единицах.

*3.3.1. **8 этап**. Геометрическая интерпретация результатов решения в относительных единицах при проектировании технической системы перехода от **N**-мерного к двухмерному к пространству.*

Геометрическая интерпретацию результатов решения в относительных единицах представим, во-первых, на примере функций $\lambda_1\,(X), \lambda_3\,(X)$, во-вторых, отдельно на примере функций $\lambda_3\,(X)$ и $\lambda_1\,(X)$.

1. Исследование функций $\boldsymbol{\lambda_1\,(X), \lambda_3\,(X)}$ на максимум.

При исследовании параметров технической системы на множестве точек $\boldsymbol{S}$, образованных ограничениями (3.45)- (3.46), точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*$, показанные на рис 1, объединены в контур и представляют множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$. Координаты этих точек, а также характеристики технической системы в относительных единицах $\lambda_1\,(X), \lambda_2\,(X), \lambda_3\,(X), \lambda_4\,(X), \lambda_5\,(X), \lambda_6\,(X)$ показаны на рис. 2 в двухмерном пространстве $x_1\ x_2$ и λ, где третья ось λ – относительная оценка.

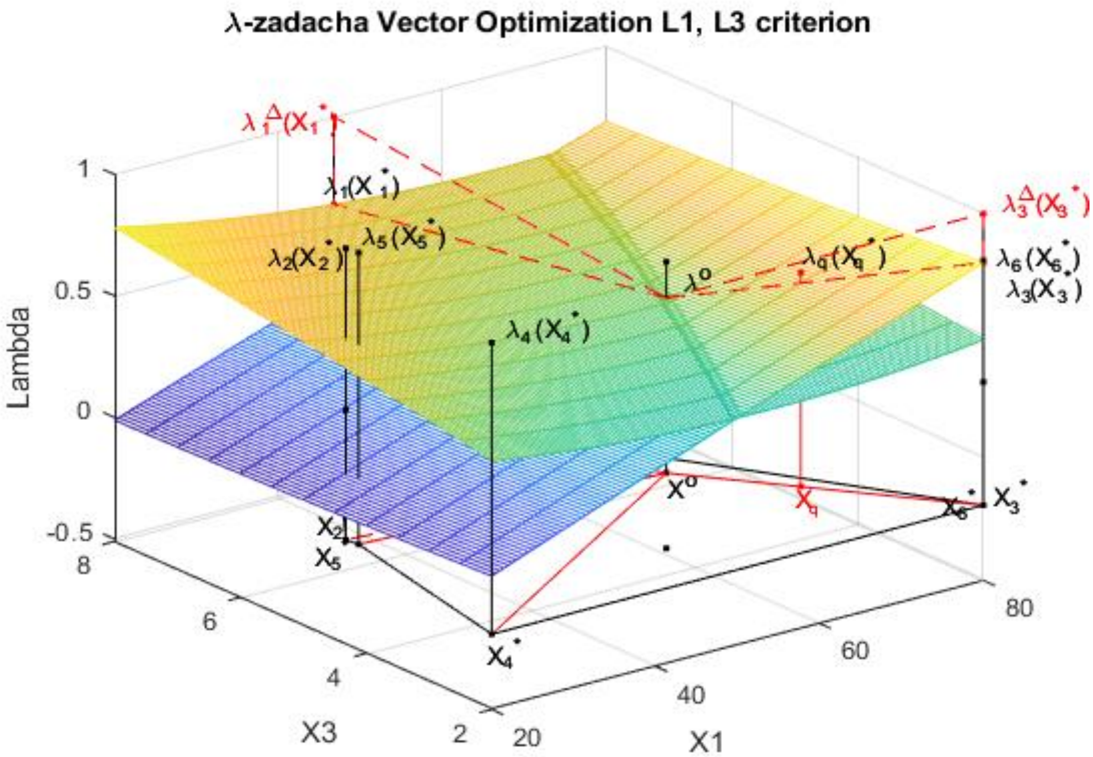

Рис. 5. Функции $\lambda_1\ (X), \lambda_3\ (X)$ и λ^o в λ-задаче в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и λ и геометрическая интерпретация $\lambda_1\ (X), \lambda_3\ (X)$ в четырех мерной системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Глядя на рисунок 2, мы можем представить изменения всех функций $\lambda_1(X), \dots, \lambda_6\ (X)$ в четырехмерном пространстве $x_1, \dots, x_4$. Для наглядности выберем две наиболее противоречивые функции $\lambda_1\ (X), \lambda_3\ (X)$, показанные на рис. 3, и представим эти функции $\lambda_1\ (X), \lambda_3\ (X)$ на рис. 5.

Рассмотрим на Рис. 5 оптимальную точку X_3^*. Функция $\lambda_3\ (X)$ – в относительных единицах сформирована из функции $f_3\ (X)$ – в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами:

$\{x_2 = 12.219, x_4 = 2.0\}$, взятые из оптимальной точки X^o (3.47). В точке X_3^* относительная оценка $\lambda_3\ (X_3^*) = 0.7976$ – показана на рис. 5 черной точкой.

Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3\ (X_3^*)$ полученная из функции $f_3\ (X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*) = 1$ – показана на рис. 5 красной точкой. Разность между $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*) = 1$ и $\lambda_3\ (X_3^*) = 0.7976$ является ошибкой Δ=0.2024 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области. Соединим линейной функцией относительные оценки λ^o и $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*)$, лежащей между точками X^o и X_3^*.

Аналогично X_3^* представим точку X_1^* с соответствующими относительными оценками $\lambda_1\ (X_1^*)$ в координатах $\{x_1\ x_3\}$ и $\lambda_1^\Delta\ (X_1^*)$, полученную в координатах $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$. Линейная функция, соединяющая точки λ^o и $\lambda_1^\Delta\ (X_1^*)$ в относительных единицах характеризует функцию $f_1\ (X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $\lambda_1^\Delta\ (X_1^*)$ -λ^o- $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*)$ представляют геометрическую интерполяцию функций $f_1\ (X)$ и $f_3\ (X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

2. Исследование функций $\boldsymbol{\lambda_1 (X), \lambda_3 (X)}$ отдельно на максимум и минимум четырехмерной системе.

Проведем исследование функций $f_1 (X)$, представленную в относительных единицах: $\lambda_1 (X)$, которая показана на рис. 6.

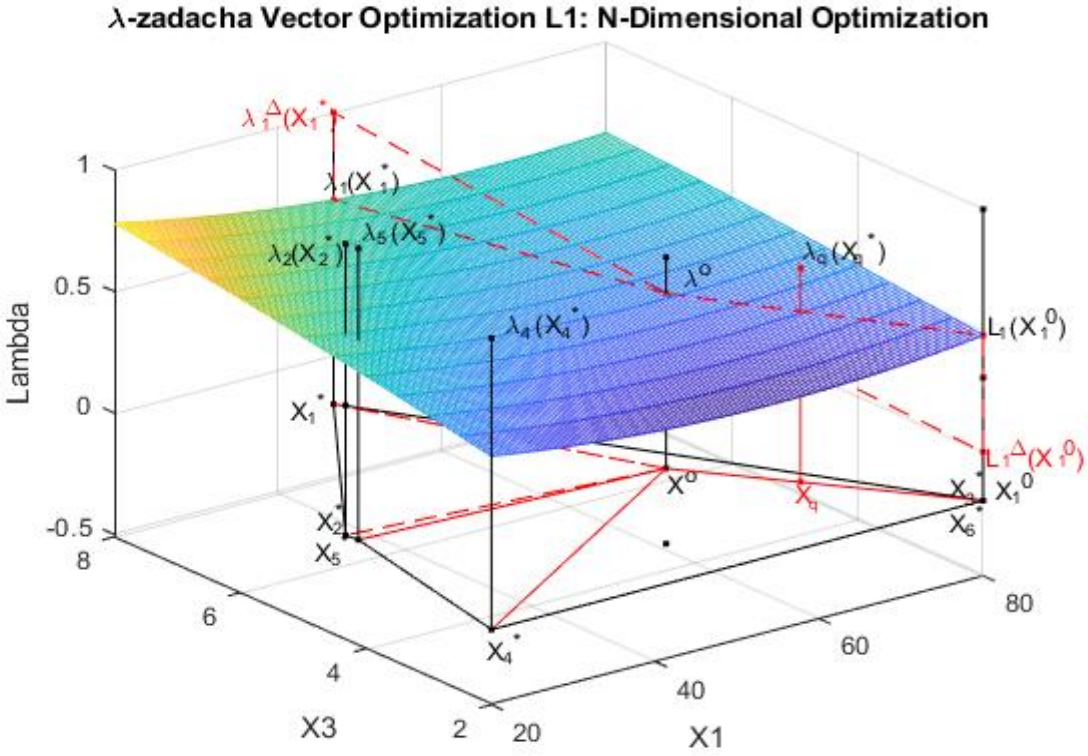

Рис. 6. Функции $\lambda_1 (X)$ и λ^o в λ-задаче в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ и геометрическая интерпретация $\lambda_1 (X)$ в четырехмерной системе координат x_1 x_2 x_3 x_4, (выделено красным цветом).

Для оценки максимального $\lambda_1^{\Delta} (X_1^*) = 1$ значения первого критерия в относительных единицах в четырехмерной системе координат $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$, (выделено красным цветом) используются, полученные на третьем шаге, данные (3.33) матрицы λ (X^*). Для оценки минимального $\lambda_1^{\Delta} (X_1^0) = 0$ значения первого критерия в относительных единицах в четырехмерной системе координат $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$, (выделено красным цветом) используются, полученные на третьем шаге, данные (3.33) матрицы λ (X^0).

Разность по максимуму между $\lambda_1^{\Delta} (X_1^*) = 1$ (четырехмерная система) и $\lambda_1 (X_1^*) = 0.6399$ (двухмерная система) является ошибкой Δ=0.3601 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области.

Разность по минимуму между $\lambda_1^{\Delta} (X_1^0) = 0$ (четырехмерная система) и $\lambda_1 (X_1^0) = 0.6399$ (двухмерная система) является ошибкой Δ=0.3601 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области.

Соединим линейной функцией относительные оценки $\lambda_1^{\Delta} (X_1^*)$ λ^o и $\lambda_1^{\Delta} (X_1^0)$, лежащей между точками X_1^* X^o и X_1^0. А в целом отрезки $\lambda_1^{\Delta} (X_1^*)$ -λ^o- $\lambda_1^{\Delta} (X_1^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функций $f_1 (X)$ в относительных единицах $\lambda_1 (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Проведем исследование функции $f_3\,(X)$, представленную в относительных единицах: $\lambda_3\,(X)$, показанную на рис. 7.

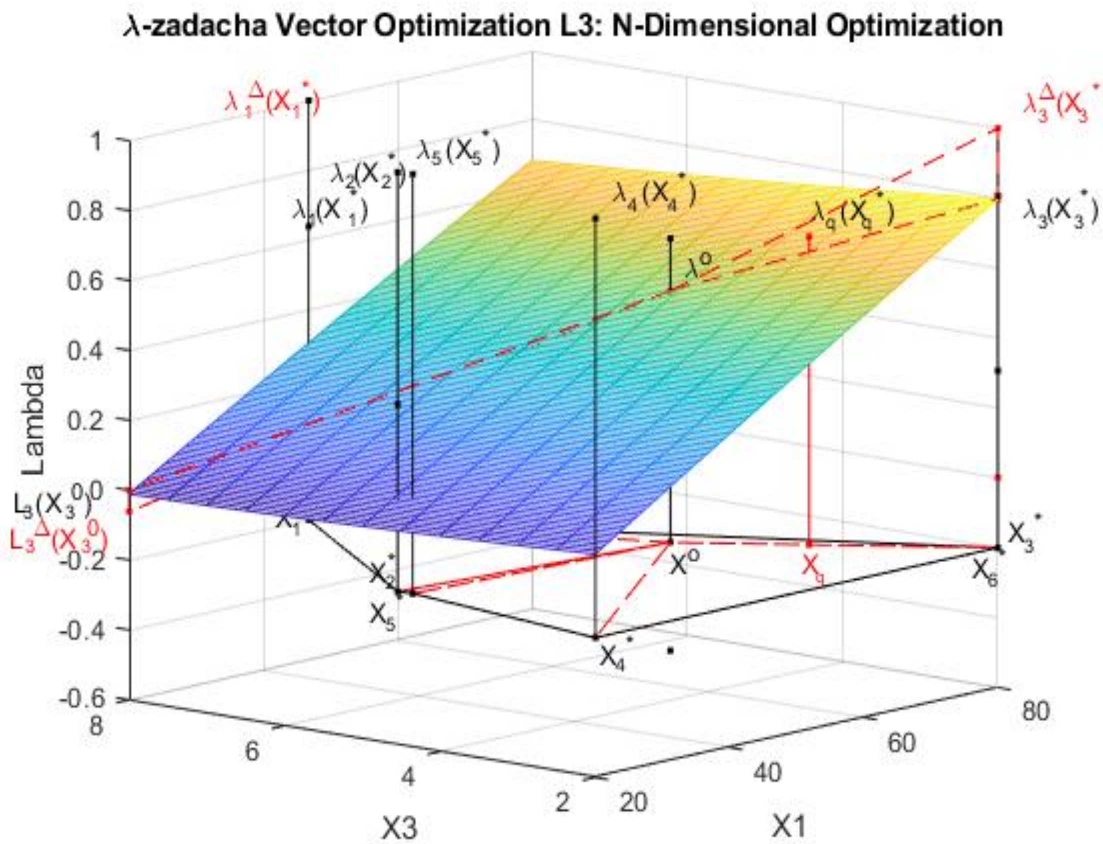

Рис. 7. Функции $\lambda_3\,(X)$ и λ^o в λ-задаче в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и λ и геометрическая интерпретация $\lambda_3\,(X)$ в четырех мерной системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$, (выделено красным цветом).

Для оценки максимального $\lambda_3^\Delta\,(X_3^*) = 1$ значения третьего критерия в относительных единицах в четырехмерной системе координат $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$, (выделено красным цветом) используются, полученные на третьем шаге, данные (3.33) матрицы λ (X^*). Для оценки минимального $\lambda_3^\Delta\,(X_0^0) = 0$ значения первого критерия в относительных единицах в четырехмерной системе координат $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$, (выделено красным цветом) используются, полученные на третьем шаге, данные (3.33) матрицы λ (X^0).

Разность по максимуму между $\lambda_3^\Delta\,(X_3^*) = 1$ (четырехмерная система) и $\lambda_3\,(X_3^*) = 0.3063$ (двухмерная система) является ошибкой Δ=0.6937 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области.

Разность по минимуму между $\lambda_3^\Delta\,(X_3^0) = 0$ (четырехмерная система) и $\lambda_3\,(X_3^0) = 0.7976$ (двухмерная система) является ошибкой Δ=0.6937 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области.

Соединим линейной функцией относительные оценки $\lambda_3^\Delta\,(X_3^*)\ \lambda^o$ и $\lambda_3^\Delta\,(X_3^0)$, лежащей между точками $X_3^*\ X^o$ и X_3^0. А в целом отрезки $\lambda_3^\Delta\,(X_3^*)$ -λ^o- $\lambda_3^\Delta\,(X_3^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функций $f_3\,(X)$ в относительных единицах $\lambda_3\,(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$.

Таким образом, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая интерпретация от $\boldsymbol{N}$-мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками аппроксимации.

*3.3.2. **9 этап**. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – модели технической системы при проектировании в трехмерной системе координат **в физических единицах**.*

На пятом шаге алгоритма мы рассчитали параметры точки оптимума при равнозначных критериях: $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 61.188, x_2 = 12.219, x_3 = 4.591, x_4 = 2.0, \lambda^o = 0.5196\}$. Представили $\boldsymbol{X^o}$ в двухмерной системе координат x_1, x_2 на Рис.1 и в трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ в относительных единицах на рис. 2, 3, 4 при проектировании.

На Рис.5 показаны: точки оптимума X_1^*, X_3^*, с соответствующими относительными оценками $\lambda_1\ (X_1^*)$ $\lambda_1^\Delta\ (X_1^*)$, $\lambda_3\ (X_3^*)$ $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*)$ и линейные функции $\lambda^o \lambda_1^\Delta\ (X_1^*)$, $\lambda^o \lambda_3^\Delta\ (X_3^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_1\ (X), f_3\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Исследуем и представим эти параметры для каждой характеристики технической: $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X), f_5(X), f_6(X)$ в **физических единицах**.

***9.1 этап**. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – **первой** характеристики технической системы при проектировании в физических единицах.*

Первая характеристика технической системы $f_1(X)$ сформирована в разделе 3.1.4:

$$max\ f_1(X) \equiv 269.86 - 1.8746x_1 - 2.9115x_2 + 8.9389x_3 + 10.936x_4 + 0.0807x_1x_2 - 0.0517x_1x_3 - 0.1413x_1x_4 + 0.0619x_2x_3 - 0.0868x_2x_4 + 0.003x_3x_4 + 0.0119x_1^2 + 0.0098x_2^2 - 0.2028x_3^2 - 0.4188x_4^2, \quad (3.23)$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $f_1(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 12.219, x_4 = 2.0\}$, взятые из оптимальной точки X^o (3.47) на рис 6.

Координаты точки **максимума** $X_1^* = \{x_1 = 46.7636, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 6 обозначена как X1omax). Величина целевой функции F_1^*=FX1omax = 270,4.

Координаты точки **минимума** $X_1^0 = \{x_1 = 80.0, x_3 = 2.0\}$ (на рис. 6 обозначена как X1omin). Величина целевой функции F_1^0=FX1omin = 246.6.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 61.188, x_3 = 4.591\}$ (на рис. 6 обозначена как X1o0). Величина целевой функции $f_1\ (X^o)$ =FX1o0 = 252.5.

Точки оптимума: X_1^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_1^* = f_1\ (X_1^*)\ = -323.9$; точка X_1^0 с величиной критерия

$f_1^0 = f_1(X_1^0) = -175.15$ – на рисунке обозначены ($f_1^\Delta\ (X_1^*)$, $f_1^\Delta\ (X_1^0)$.

Линейная функция, соединяющая точки $f_1\ (X^o)$ и $f_1^\Delta\ (X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_1^\Delta\ (X_1^*)$ -$f_1\ (X^o)$- $f_1^\Delta\ (X_1^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_1\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

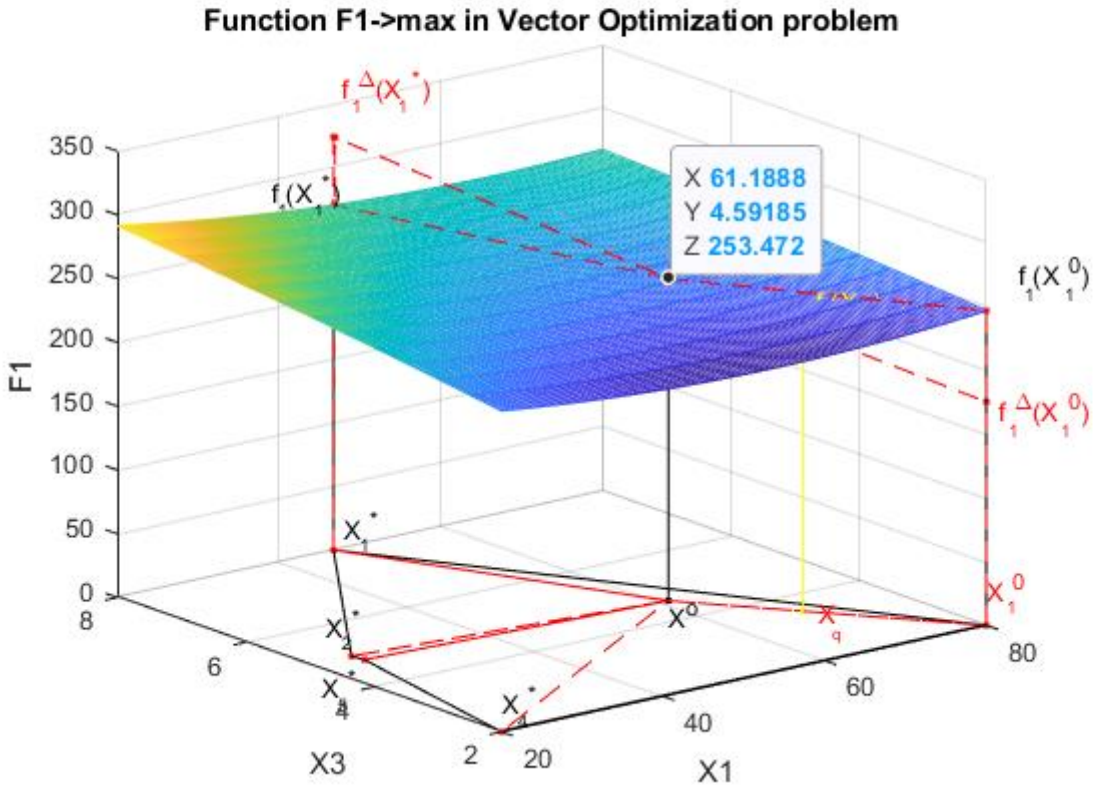

Рис. 6. Функция $f_1(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_1(X)$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4

***9.2 этап**. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – **второй** характеристики технической системы при проектировании в физических единицах.*

Вторая характеристика технической системы $f_2(X)$ представлена в разделе 3.1.4: $min\, f_2(X)$≡795.72 +23.89x_1+30.866x_2 -25.8586x_3 -45.0026x_4 -0.7683x_1x_2 +0.4703x_1x_3 +0.7472x_1x_4-0.1283x_2x_3+0.3266x_2x_4-0.0112x_3x_4+0.0398x_1^2+0.0365x_2^2 +3.2x_3^2+2.6457x_4^2, (3.26)

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 12.219, x_4 = 2\}$, взятые из оптимальной точки X^o (3.47) на рис.7.

Координаты точки **максимума** $X_2^* = \{x_1 = 25.0, x_3 = 4.98\}$ (на рис. 7 обозначена как X2omax). Величина целевой функции F_2^*=FX2omax = 1696.7.

Координаты точки **минимума** $X_2^0 = \{x_1 = 80.0, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 7 обозначена как X2omin). Величина целевой функции F_2^0=FX2omin = 3548.08.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 61.188, x_3 = 4.591\}$ (на рис. 7 обозначена как X2o0). Величина целевой функции f_2 (X^o)=FX2o0 = 2308.6.

Точки оптимума: X_2^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_2^* = f_2\ (X_2^*)\ = 1696.7$; точка X_2^0 с величиной критерия

$f_2^0 = f_2(X_2^0) = -3548.08$– на рисунке обозначены (f_2^Δ (X_2^*), f_2^Δ (X_2^0)).

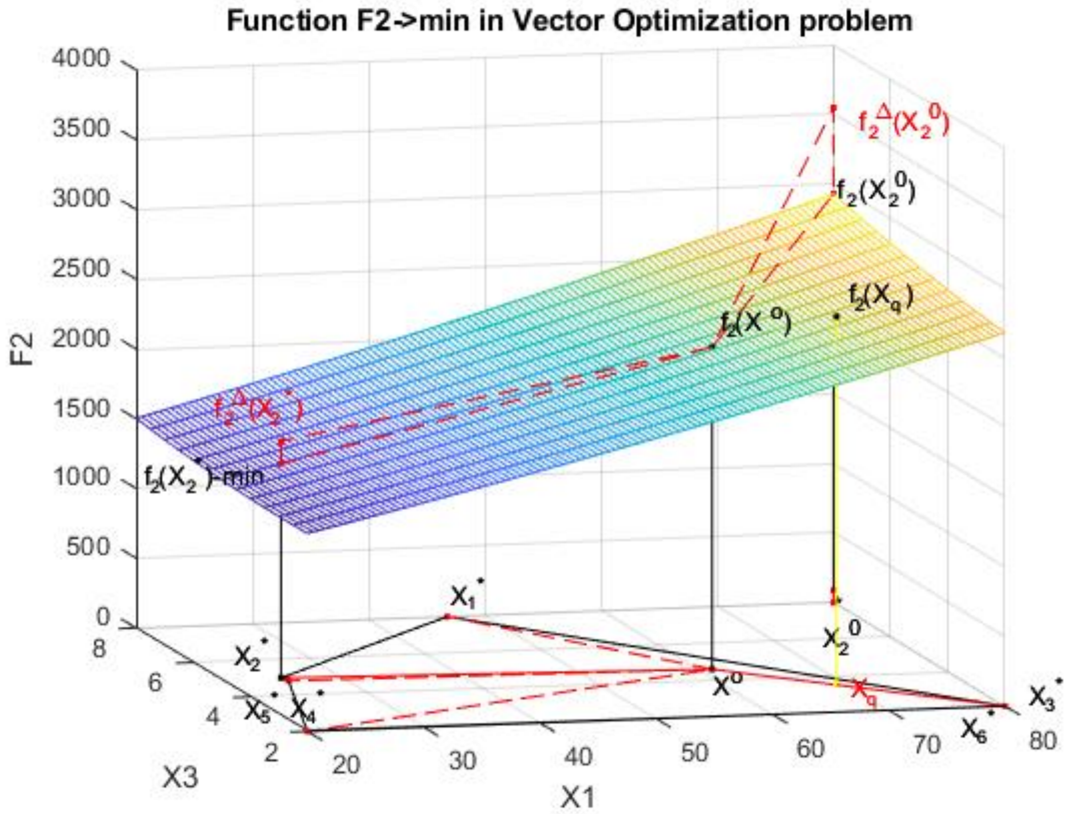

Рис. 7. Функция $f_2(X)$ в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_2(X)$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_2\ (X^o)$ и $f_2^{\Delta}\ (X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^{\Delta}\ (X_2^*)$ -$f_2\ (X^o)$- $f_2^{\Delta}\ (X_2^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

9.3 этап. *Геометрическая интерпретация решения ВЗМП –* ***третьей*** *характеристики технической системы проектированя в физических единицах.*

Третья характеристика технической системы $f_3(X)$ сформирована в разделе 3.1.4: $max\ f_3(X)$≡39.7581 +0.6598x_1 +0.4493x_3 -0.3094x_3 -1.8334x_4 -0.0110x_1x_2 -0.0069x_1x_3 + 0.0161x_1x_4-0.0143x_2x_3+0.0134x_2x_4-0.0005x_3x_4-0.0003x_1^2-0.0002x_2^2+0.0279x_3^2+0.1033x_4^2, (3.24)

Представим геометрическую интерпретацию функции $f_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 12.219, x_4 = 2.0\}$, взятые из оптимальной точки X^o (3.47) на рис 8.

Координаты точки **максимума** $X_3^* = \{x_1 = 80.0, x_3 = 2.0\}$ (на рис. 8 обозначена как X3omax). Величина целевой функции F_3^*=FX3omax = 91.25.

Координаты точки **минимума** $X_3^0 = \{x_1 = 20.0, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 8 обозначена как X3omin). Величина целевой функции f_3^0=FX3omin = 50.1.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 61.188, x_3 = 4.591\}$ (на рис. 8 обозначена как X3o0). Величина целевой функции $f_3\ (X^o)$ =FX3o0 = 71.7.

Точки оптимума: X_3^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_3^* = f_3\ (X_3^*)\ = -91.25$; точка X_3^0 с величиной критерия

$f_3^0 = f_3(X_3^0) =\ 50.57$ – на рисунке обозначены ($f_3^{\Delta}\ (X_3^*)$, $f_3^{\Delta}\ (X_3^0)$).

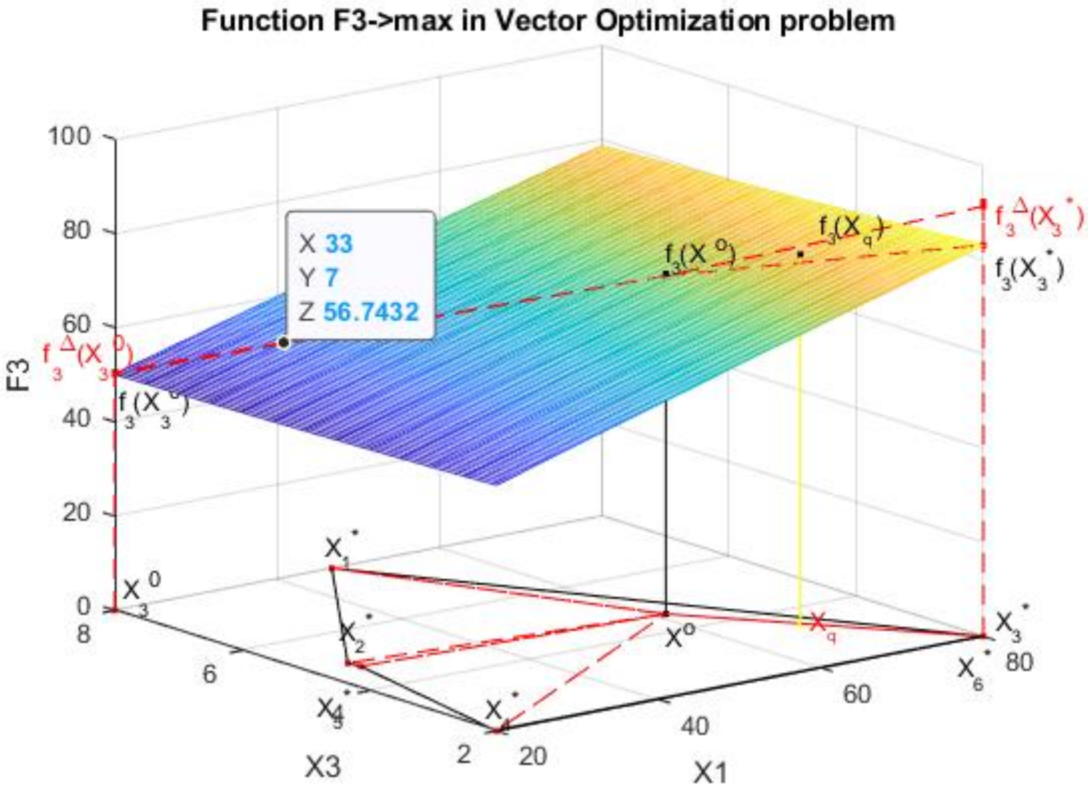

Рис. 8. Функция $f_3(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_3(X)$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4

Линейная функция, соединяющая точки f_3 (X^o) и f_3^{Δ} (X_3^*) в физических единицах характеризует функцию f_3 (X) в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$. А в целом отрезки f_3^{Δ} (X_1^*) -f_3 (X^o)- f_3^{Δ} (X_3^0) представляют геометрическую интерполяцию функции f_3 (X) в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$.

9.4 этап. *Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП –* ***четвертой*** *характеристики технической системы при проектировании в физических единицах.*

Четвертая характеристика технической системы $f_4(X)$ представлена в разделе 3.1.4: $min\ f_4(X)$≡17.5032 -0.0081x_1 -0.7005x_2 -0.3605x_3 +0.9769x_4 +0.0138x_1x_2 +0.0708x_1x_3 -0.0001x_1x_4+0.0436x_2x_3+0.0002x_2x_4+0.0005x_3x_4 -0.0018x_1^2+0.0029x_2^2+0.005x_3^2-0.0259x_4^2, (3.27)

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 12.219, x_4 = 2.0\}$, взятые из оптимальной точки X^o (3.47) на рис 9.

Координаты точки **максимума** $X_4^* = \{x_1 = 20.0, x_3 = 2.0\}$ (на рис. 9 обозначена как X2omax). Величина целевой функции F_4^*=FX4omax = 10.815.

Координаты точки **минимума** $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 6.39\}$ (на рис. 9 обозначена как X4omin). Величина целевой функции F_2^*=FX4omin = 61.35.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 61.188, x_3 = 4.591\}$ (на рис. 9 обозначена как X4o0). Величина целевой функции f_4 (X^o) FX4o0 = 35.1.

Точки оптимума: X_4^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_4^* = f_4$ (X_4^*) $= 10.815$; точка X_4^0 с величиной критерия

$f_4^0 = f_4(X_4^0) = -61.35$– на рисунке обозначены (f_4^{Δ} (X_4^*), f_4^{Δ} (X_4^0).

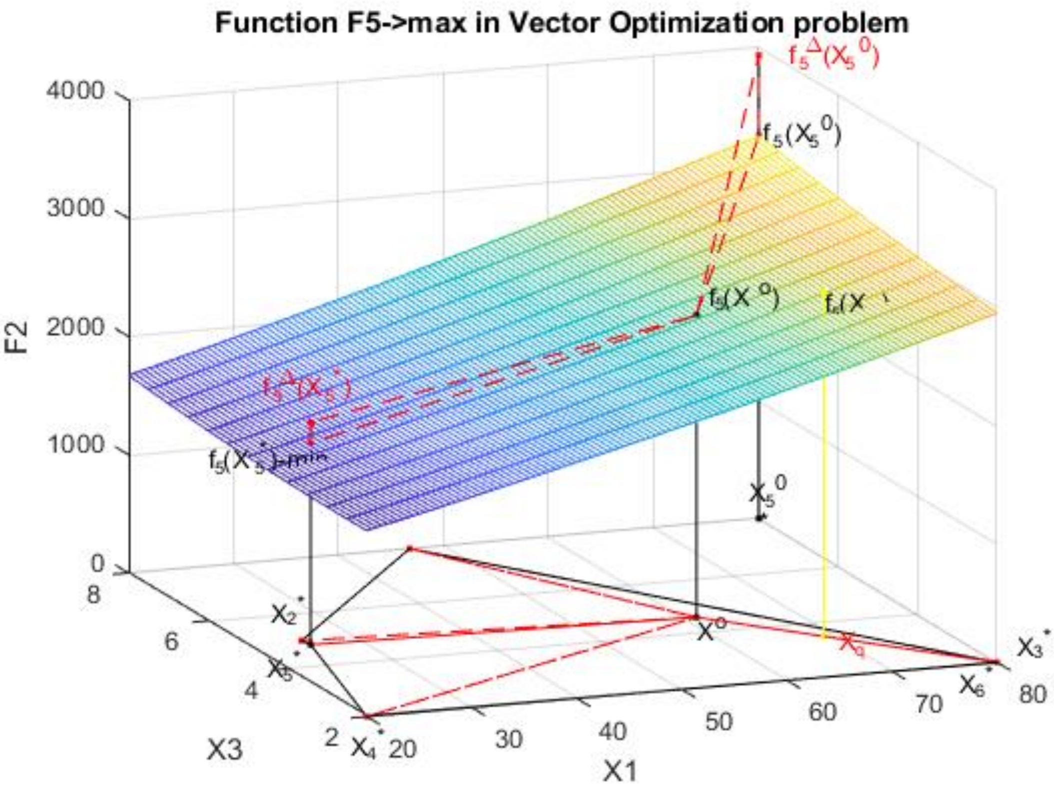

Рис. 9. Функция $f_4(X)$ в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_4(X)$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_4\,(X^o)$ и $f_4^{\Delta}\,(X_4^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_4\,(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_4^{\Delta}\,(X_4^*)$ -$f_4\,(X^o)$- $f_4^{\Delta}\,(X_4^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2\,(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

***9.5 этап**. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – **пятой** характеристики технической системы при проектировании в физических единицах.*

Пятая характеристика технической системы $f_5(X)$ сформирована в разделе 3.1.4:

$$min\ f_5(X) = 886.27 + 26.28x_1 + 33.95x_2 - 27.445x_3 - 49.5x_4 - 0.8451x_1x_2 + 0.5173x_1x_3 + 0.8219x_1x_4 - 0.1411x_2x_3 + 0.3593x_2x_4 - 0.0123x_3x_4 + 0.0438x_1^2 + 0.0401x_2^2 + 3.5281x_3^2 + 2.9103x_4^2\}\}, \qquad (3.28)$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $f_1(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 12.219, x_4 = 2.0\}$, взятые из оптимальной точки X^o (3.47) на рис 10.

Координаты точки **максимума** $X_5^* = \{x_1 = 25.2, x_3 = 4.8\}$ (на рис. 10 обозначена как X5omax). Величина целевой функции F_5^*=FX5omax = 1882.3.

Координаты точки **минимума** $X_5^0 = \{x_1 = 80.0, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 10 обозначена как X1omin). Величина целевой функции f_5^0=FX5omin = 3921.8.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 61.188, x_3 = 4.591\}$ (на рис. 10 обозначена как X6o0). Величина целевой функции $f_5\,(X^o)$ =FX5o0 = 2555.1.

Точки оптимума: X_1^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_5^* = f_5\,(X_5^*) = 1882.3$; точка X_5^0 с величиной критерия

$f_5^0 = f_5(X_5^0) = -3921.8$ – на рисунке обозначены ($f_5^{\Delta}\,(X_1^*)$, $f_5^{\Delta}\,(X_5^0)$).

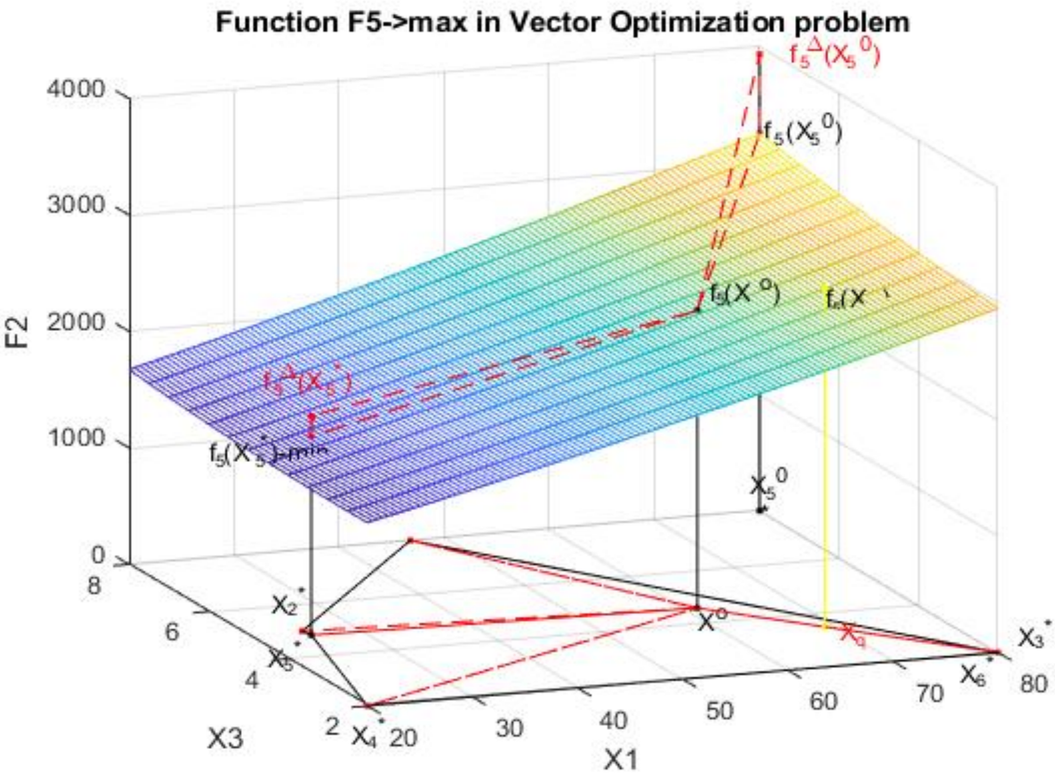

Рис. 10. Функция $f_5(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_5(X)$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4

Линейная функция, соединяющая точки f_5 (X^o) и f_5^Δ (X_5^*) в физических единицах характеризует функцию f_5 (X) в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки f_5^Δ (X_5^*) -f_5 (X^o)- f_5^Δ (X_5^0) представляют геометрическую интерполяцию функции f_5 (X) в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

9.6 этап. *Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – шестой характеристики технической системы при проектировании в физических единицах.*

Шестая характеристика технической системы $f_6(X)$ представлена в разделе 3.1.4:

$$max\ f_6(X) = 41.758 + 0.6598x_1 + 0.4505x_2 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.011x_1x_2 - 0.0069x_1x_3 + 0.0161x_1x_4 - 0.0143x_2x_3 + 0.0134x_2x_4 - 0.0005x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2\}, \quad (3.25)$$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_6(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 12.219, x_4 = 2.0\}$, взятые из оптимальной точки X^o (3.47) на рис 11.

Координаты точки **максимума** $X_6^* = \{x_1 = 80.0, x_3 = 2.0\}$ (на рис. 11 обозначена как X6omax). Величина целевой функции F_6^*=FX6omax = 93.25.

Координаты точки **минимума** $X_6^0 = \{x_1 = 20.0, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 11 обозначена как X6omin). Величина целевой функции f_6^0=FX6omin = 52.604.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 61.188, x_3 = 4.591\}$ (на рис. 11 обозначена как X6o0). Величина целевой функции f_6 (X^o)=FX2o0 = 73.7.

Точки оптимума: X_6^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_6^* = f_2$ (X_2^*) $= -93.25$; точка X_2^0 с величиной критерия
$f_6^0 = f_6(X_6^0) =$ 52.604– на рисунке обозначены (f_6^Δ (X_6^*), f_6^Δ (X_6^0).

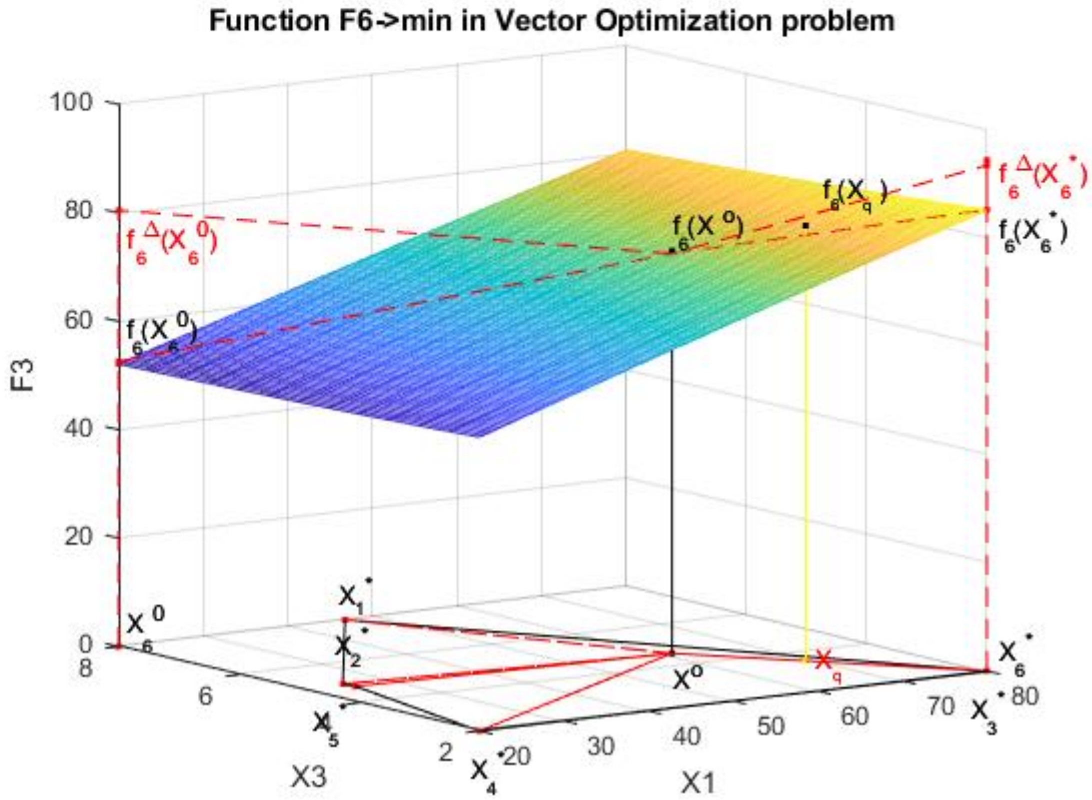

Рис. 11. Функция $f_6(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_6(X)$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4

Линейная функция, соединяющая точки $f_6\ (X^o)$ и $f_6^{\Delta}\ (X_8^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_6\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_6^{\Delta}\ (X_6^*)$ -$f_6\ (X^o)$- $f_6^{\Delta}\ (X_6^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_6\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

В совокупности, представлена версия программного обеспечения моделирования технической системы в многомерной математике выдает следующие результаты: точка оптимума – X^o;

характеристики (критерии) $F(X^o) = \{f_1(X^o), f_2(X^o), f_3(X^o), f_4(X^o), f_5(X^o), f_6(X^o)\}$;
относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o), \lambda_5(X^o), \lambda_6(X^o)\}$;
максимальную относительную оценку – λ^o, такую что $\lambda^o \leq \lambda_k\ (X^o)\ \forall k \in \boldsymbol{K}$.
точку оптимума с приоритетом q–го критерия – X^q;
характеристики (критерии) – $F(X^q) = \{f_1(X^q), f_2(X^q), f_3(X^q), f_4(X^q), f_5(X^q), f_6(X^q)\}$;
относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^q), \lambda_2(X^q), \lambda_3(X^q), \lambda_4(X^q), \lambda_5(X^q), \lambda_6(X^q)\}$;
максимальную относительную оценку λ^{oo}, такую что $\lambda^{oo} \leq p_k^q\ \lambda_k\ (X^q), k = \overline{1, K}$.

4. Выбор оптимальных параметров материала сложной структуры в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики. Численная реализация.

Численная реализация выбора оптимальных параметров материала сложной структуры выполняется в соответствии с теоретическими основами многомерной математики, включающей аксиоматику, принципы оптимальности и конструктивные методы многомерной математики как при равнозначных критериях, так и при заданном приоритете критериев, в соответствии разделом 2. Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) инженерной системы, в том числе материала сложной структуры, изложена в разделе 2.5.2. Рассматривается задача принятия решений в сложной структуре материала, о которой известны: во-первых, данные о функциональной взаимосвязи нескольких характеристик с ее компонентами (*условия определенности*); во-вторых, данные о некотором наборе дискретных значений нескольких характеристик (экспериментальные результаты), во взаимосвязи с дискретными значениями параметров – экспериментальные данные (*условия неопределенности*); в-третьих, ограничений, накладываемых на функционирование материала сложной структуры. Численная задача моделирования материала сложной структуры рассматривается с равнозначными критериями и с заданным приоритетом критерия.

4.1. Блок 1. Формирование технического задания и построение математической и численной модели материала сложной структуры (the process of modeling of the structure (composition) of the material).

Первый этап, а также этап анализа результатов решения, выбора приоритетного критерия и его величины выполняется ***конструктором материала сложной структуры***. Остальные этапы выполняются ***математиком – программистом***.

4.1.1. 1 этап. Техническое задание: «Выбор оптимальных параметров материала сложной структуры»

Дано. Исследуется структура материала, которая характеризуется четырьмя параметрами: $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Значения Y представляют вектор управляемых переменных. Заданы параметры структуры материала, которые изменяются в следующих пределах:

$21 \le y_1 \le 79;\ 5 \le y_2 \le 59;\ 2.1 \le y_3 \le 9.0;\ 2.2 \le y_4 \le 7.0.$ (4.1)

Функционирование структуры материала определяются четырьмя характеристиками (критериями): $H(Y) = \{h_1(Y), \dots, h_4(Y)\}$, величина оценки которых зависит от параметров $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Условия определенности. Для первой характеристик: $h_1(Y)$ известна функциональная зависимость от параметров $Y = \{y_v, v = \overline{1,V}, V = 4\}$:

$h_1(Y) = 323.84 - 2.249y_1 - 3.49y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026x_4^2$, (4.2)

Условия неопределенности. Известны **результаты экспериментальных данных**: для второй, третьей и четвертой характеристики $h_k(Y), k = 2, 3, 4$ для соответствующих величин параметров: $Y = \{y_v = \{y_{vi}, i = \overline{1,M}\}, v = \overline{1,V}\}$.

Числовые значения параметров Y и характеристик $h_2(Y), h_3(Y)$ представлены в табл. 2.

Таблица 2.

Экспериментальные значения параметров y_1, y_2, y_3, y_4 и характеристик структуры материала $h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$.

y_1	y_2	y_3	y_4	$h_2(Y)$	$h_3(Y)$	$h_4(Y)$
20	0	2	2	1149.6 1164.0	115.1	24.24 27.60
20	0	2	5	1176.0 1212.0	114.5	28.80 30.00
20	0	2	8	1260.0 1257.6	114.4	31.20 32.40
20	0	5	2	1256.4 1252.8	118.8	33.60 34.80
20	0	5	5	1251.6 2143.2	113.8	34.80 19.92
20	0	5	8	2154.0 2163.6	113.3	21.60 25.20
20	0	8	2	2176.8 2185.2	110.7	29.76 33.48
20	0	8	5	2198.4 2211.6	109.2	37.20 39.48
20	0	8	8	2232.0 2245.2	108.5	42.00 49.20
20	30	2	2	2954.4 2820.0	128.3	15.60 18.00

20	30	2	5	2772.0 2748.0	127.4	21.60 24.24
20	30	2	8	2832.0 2904.0	126.8	28.80 32.40
20	30	5	2	3022.8 3036.0	126.1	35.16 39.60
20	30	5	5	3056.4 3583.2	124.3	44.88 11.28
20	30	5	8	3601.2 3608.4	124.1	14.40 16.80
20	30	8	2	3616.8 3622.8	123.9	21.12 22.80
20	30	8	5	3637.2 3651.6	121.4	27.60 30.84
20	30	8	8	3672.0 36852	121.7	36.00 40.56
20	60	2	2	1195.2 1212.0	150.4	52.80 60.00
20	60	2	5	1236.0 1251.6	144.9	64.80 68.64
20	60	2	8	1272.0 1296.0	140.8	75.60 82.80
20	60	5	2	1318.8 1344.0	138.6	88.08 97.20
20	60	5	5	1388.4 2176.8	140.8	107.64 40.56
20	60	5	8	2196.0 2220.0	143.5	45.60 52.80
20	60	8	2	2245.2 2286.0	146.0	60.00 67.20
20	60	8	5	2294.4 2313.6	144.9	73.20 79.44
20	60	8	8	2340.0 2382.0	143.8	85.20 99.00
50	0	2	2	2988.0 3012.0	181.3	31.92 36.00
50	0	2	5	3036.0 3056.4	180.8	43.20 51.36
50	0	2	8	3108.0 3156.0	179.4	61.20 72.00
50	0	5	2	3244.8 3228.0	179.1	82.80 86.40
50	0	5	5	3193.2 3616.8	178.0	90.36 23.28
50	0	5	8	3639.6 3660.0	177.6	30.00 36.00
50	0	8	2	3685.2 3708.0	176.9	42.72 48.00
50	0	8	5	3732.0 3753.6	175.3	54.00 62.16
50	0	8	8	3672.0 3822.0	174.7	73.20 81.72
50	30	2	2	1218.0 1248.0	123.6	87.00 94.80
50	30	2	5	1272.0 1318.8	118.7	103.20 116.16
50	30	2	8	1344.0 1392.0	115.9	126.00 136.80
50	30	5	2	1422.0 1464.0	115.1	145.44 156.00
50	30	5	5	1524.0	113.2	174.72
50	30	5	8		111.8	
50	30	8	2		110.7	
50	30	8	5		108.2	
50	30	8	8		106.3	
50	60	2	2		132.8	
50	60	2	5		131.1	
50	60	2	8		129.7	
50	60	5	2		128.3	
50	60	5	5		127.0	
50	60	5	8		125.6	
50	60	8	2		123.9	
50	60	8	5		114.5	
50	60	8	8		119.5	
80	0	2	2		154.8	
80	0	2	5		153.2	
80	0	2	8		151.8	
80	0	5	2		150.4	

80	0	5	5		150.7	
80	0	5	8		151.2	
80	0	8	2		151.5	
80	0	8	5		144.9	
80	0	8	8		140.8	
80	30	2	2		185.7	
80	30	2	5		183.5	
80	30	2	8		182.2	
80	30	5	2		181.3	
80	30	5	5		179.4	
80	30	5	8		178.0	
80	30	8	2		176.9	
80	30	8	5		175.3	
80	30	8	8		172.5	
80	60	2	2		128.3	
80	60	2	5		125.6	
80	60	2	8		124.2	
80	60	5	2		121.7	
80	60	5	5		118.7	
80	60	5	8		115.9	
80	60	8	2		115.1	
80	60	8	5		110.4	
80	60	8	8		108.5	
min y_i (X), i=1,…, 81				1149.6	92.4	11.3
max y_i (X), i=1,…, 81				3822.0	161.5	174.7

В принимаемом решении, величину оценки по первой и третьей характеристики (критерия) желательно, получить как можно выше: $h_1(Y) \to max, h_3(Y) \to max$; второй и четвертой как можно ниже: $h_2(Y) \to min, h_4(Y) \to min$.

Параметры $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ изменяются в следующих пределах:

$$y_1 \in [20. 50. 80.], y_2 \in [0. 30. 60.], y_3 \in [2.0\ 5.0\ 8.0], y_4 \in [2.2\ 5.5\ 8.8]. \quad (4.3)$$

Химический состав материала изделия определяется (на единицу объема, веса) процентным содержанием некоторого множества компонент материала, которые в сумме равны ста процентам:

$$\text{ограничение } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100. \quad (4.4)$$

Требуется. Разработать математическую модель структуры материала в виде векторной задачи математического программирования. Задачу векторной оптимизации решить с равнозначными характеристиками (критериями). Выбрать из всего множества критериев приоритетный критерий. Установить численное значение приоритетного критерия. Решить задачу векторной оптимизации и принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия.

1а этап. *Построение математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности в общем виде.*

Построение математической модели для принятия оптимального управленческого решения структуры материала показано в разделе 1.3. В соответствии с (1.25)- (1.29) представим математическую модель материала в условиях определенности в виде задачи векторной оптимизации:

$$Opt\ H\ (Y)\ =\ \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\ (Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \tag{4.5}$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k\ (Y), k = \overline{1, K_2^{def}}, \tag{4.6}$$

$$\text{при ограничениях } G\ (Y) \leq B, \textstyle\sum_{v=1}^{V} y_v(t) = 100\%, \tag{4.7}$$

$$h_k^{min}\ \leq h_k(Y) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}, y_j^{min} \leq y_j \leq\ y_j^{max}, j = \overline{1, N}, \tag{4.8}$$

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров); $H\ (Y) = \{H_1(Y)\ H_2(Y)\ \}$ – векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (характеристик) материала, которые функционально зависят Y – значений вектора переменных;

в (4.8) $h_k^{min} \leq h_k\ (Y) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование материала;

в (4.8) $y_j^{min} \leq y_j \leq y_j^{max}, j = \overline{1, N}$ – параметрические ограничения.

Предполагается, что функции $h_k\ (Y), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i\ (Y), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (4.9) множество допустимых точек $\boldsymbol{S}$ не пусто и представляет собой компакт:

$\boldsymbol{S} = \{Y \in R^n | G(Y) \leq 0, Y^{min} \leq Y \leq Y^{max}\} \neq \emptyset.$

4.1.2. **2 этап**. ***Построение численной модели структуры материала в условиях определенности***

Построение модели структуры материала в условиях определенности определяется функциональной зависимостью каждой характеристики, ограничений от параметров материала. В нашем примере известны характеристика (4.2), ограничения (4.1). Используя данные (4.1), (4.2) построим численную модель в виде векторной задачи нелинейного программирования (4.5)- (4.8) в условиях определенности:

$$max\ h_1(Y) = 323.84 - 2.249y_1 -\ 3.49y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4\ + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 -\ 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2, \tag{4.9}$$

$$\text{при ограничениях: } y_1 +\ y_2 +\ y_3 +\ y_4 = 100, \tag{4.10}$$

$$21 \leq y_1 \leq 79, 5 \leq y_2 \leq 59, 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \tag{4.11}$$

Эти данные в дальнейшем используются при построении общей математической модели материала (в условиях определенности и неопределенности).

4.1.3. **3.1 этап**. ***Преобразование экспериментальных данных (условий неопределенности) в данные с функциональной зависимостью (условия определенности) и построение численной модели***

Условия неопределенности характеризуются тем, что исходные данные, характеризующие исследуемого объекта, представлены: а) случайными, б) нечеткими, или, в) не полными данными, т. е. в условиях неопределенности известны лишь конечное множество Y измеренных параметров $y = \overline{1, Y}$:

$Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}$, где $v = \overline{1, V}$ – число компонент (параметров), из которых может быть составлен (изготовлен) материал, $i = \overline{1, M}$ – номер и множество данных; и соответствующее множество K характеристик:

$h_k(Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K}.$

Поэтому *в условиях неопределенности* отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров. Информационные данные опций a) и b) преобразуются в числовые данные опции c) и представляются в табличной форме. В работе рассматривается опция c) информация с неполными данными, которые, как правило, ***получены в результате эксперимента***.

С учетом измеренных параметров Y_v и соответствующего множества K характеристик: $h_k(Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1,V}\}, i = \overline{1,M}), k = \overline{1,K}$ представим матрицу результатов экспериментальных данных по исследуемому материалу:

$$I = \begin{vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 = y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}\, h_2\ (Y_1), h_3\ (Y_1), h_4\ (Y_1) \\ \dots \\ Y_M = y_{M1}, y_{M2}, y_{M3}, y_{M4} h_2\ (Y_M), h_3\ (Y_M), h_4\ (Y_M) \end{vmatrix}, \quad (4.12)$$

Представим математическую модель структуры материала в условиях неопределенности в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt\ H\ (X)\ =\ \{\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k\ \ (Y_i, i = \overline{1,M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (4.13)$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k\ \ (Y_i, i = \overline{1,M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}\}, \quad (4.14)$$

$$\text{at restriction } h_k^{min}\ \le\ h_k(Y) \le h_k^{max}, k = \overline{1,K}, \quad (4.15)$$

$$\textstyle\sum_{v=1}^{V} y_v(t) = 100\%, y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, v =\ \overline{1,V}, \quad (4.16)$$

где $Y = \{y_v, v = \overline{1,V}\}$ – вектор управляемых переменных (параметров);

$H(Y) = \{I_1(Y)\ I_2(Y)\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (выходных характеристик исследуемого объекта). Величина характеристики (функции) зависит от дискретных значений вектора переменных Y. $I_1(Y) = \overline{1, K_1^{unc}}, I_2(Y) = \overline{1, K_2^{unc}}$ (*uncertainty*) – множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях неопределенности;

в (4.15) $h_k^{min}\ \le h(X) \le h_k^{max}, k = \overline{1,K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование исследуемого объекта, $y_v^{min} \le y_v \le\ y_v^{max}, v = \overline{1,V}$ – параметрические ограничения исследуемого объекта.

4.1.3. **3.2 этап**. ***Построение численной модели*** структуры ***материала в условиях неопределенности***

Построение численной модели структуры материала в условиях неопределённости состоит в использовании качественных и количественных описаний материала, полученных экспериментальных данных по принципу “вход-выход” в таблице 1.

Преобразование информации (исходных данных в таблице 1):

$h_2(Y_i, i = \overline{1,M})$, $h_3(Y_i, i = \overline{1,M})$, $h_4(Y_i, i = \overline{1,M})$ в функциональный вид:

$h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ осуществляется путем использования математических методов (регрессионного анализа). Исходные данные таблицы 2 сформированы в системе MATLAB в виде матрицы:

$$I = |Y, H|\ = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i4}, i = \overline{1,M}\}. \quad (4.17)$$

Для каждого набора экспериментального данных $h_k, k = 2,3,4$ строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\mathbf{min} \sum_{i=1}^{M}\ (y_i - \overline{y_i})^2$ в системе MATLAB. Для этого формируется полином A_k, определяющий взаимосвязь параметров: $Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}\}$ и функции $\overline{y_{ki}} = h(Y_i, A_k), k =\ 2,3,4$. Результатом является система коэффициентов: $A_k = \{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{14k}\}$, которые определяют коэффициенты квадратичного полинома:

$$h_k(Y, A) = A_{0k} + A_{1k}y_1 + A_{2k}y_2 + A_{3k}y_3 + A_{4k}y_4 + A_{5k}y_1y_2 + A_{6k}y_1y_3 + A_{7k}y_1y_4 + A_{8k}y_2y_3 + A_{9k}y_2y_4 + A_{10k}y_3y_4 + A_{11k}y_1^2 + A_{12k}y_2^2 + A_{13k}y_3^2 + A_{14k}y_4^2, k =\ 2,3,4. \quad (4.18)$$

Программное обеспечение полиномиальной аппроксимации с четырьмя переменными и четырнадцатью факторами представлено в [44]. В итоге экспериментальные данные таблицы 1 преобразуются систему коэффициентов трех функций вида (53) в виде таблицы (Программа: Z_Material_MMTT32_os13_4k):

Ao= [323.8408 954.8634 110.02 21.0051 % A_{0k} (4.19)
-2.2495 28.6719 0.9106 -0.0101 %A_{1k}
-3.4938 37.0392 0.6206 -0.8403 %A_{2k}
10.7267 -31.0303 -0.4287 -0.4314 %A_{3k}

13.1239 -54.0031 -2.5176 1.1718 %A_{4k}
0.0969 -0.9219 -0.0151 0.0166 %A_{5k}
-0.0621 0.5644 -0.0094 0.0850 %A_{6k}
-0.1696 0.8966 0.0222 -0.0001 %A_{7k}
0.0743 -0.1540 -0.0198 0.0522 %A_{8k}
-0.1042 0.3919 0.0184 0.0003 %A_{9k}
0.0036 -0.0135 -0.0006 0.0006 %A_{10k}
0.0142 0.0477 -0.0004 -0.0021 %A_{11k}
0.0117 0.0437 -0.0003 0.0035 %A_{12k}
-0.2433 3.8489 0.0390 0.0061 %A_{13k}
-0.5026 3.1748 0.1414 -0.0310]; %A_{14k}
Rj = [0.6115 0.7149 0.6551 0.9017];
RRj= [0.3740 0.5111 0.4292 0.8130];

На основе Ao (2) Ao (3) Ao (4) строятся функции $h_2(Y)$, $h_3(Y)$ и $h_4(Y)$, которые с учетом полученных коэффициентов (4.19) являются ***численной моделью структуры материала в условиях неопределенности***:

$$Opt\ H\ (Y)\ =\ \{max\ h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2, \quad (4.20)$$

$$min\ h_2(Y) \equiv 954.86 + 28.67y_1 + 37.03y_2 - 31.03y_3 + 54y_4 - 0.922y_1y_2 - 2y_1y_3 + 0.896y_1y_4 - 0.154y_2y_3 + 0.3919y_2y_4 - 0.0134y_3y_4 + 0.0478y_1^2 + 0.0438y_2^2 + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2, \quad (4.21)$$

$$min\ h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}, \quad (4.22)$$

$$\text{при ограничениях: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (4.23)$$

$$21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0. \quad (4.24)$$

Минимальные и максимальные значения экспериментальных данных $y_1, \dots, y_4$ представлены в нижней части таблицы 2. Минимальные и максимальные значения функций $h_1(Y), h_3(Y), h_2(Y), h_4(Y)$ незначительно отличаются от экспериментальных данных. Индекс корреляции и коэффициенты детерминации представлены в нижних строках таблицы 2. Результаты регрессионного анализа (4.20)- (4.24) в дальнейшем используются при необходимости построения общей математической модели материала.

4.1.4. **4 этап**. *Построение агрегированной математической и численной модели структуры материала в условиях определенности*

Объединяя математические модели структуры материала в условиях определённости (4.5)- (4.8) и неопределённости (4.13)- (4.16) представим математическую модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$Opt\ H\ (Y)\ =\ \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\ (Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (4.25)$$

$$\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k\ \ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (4.26)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k\ (X), k = \overline{1, K_2^{def}}, \quad (4.27)$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k\ \ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}\}, \quad (4.28)$$

при ограничениях

$$h_k^{min} \le h_k(Y) \le h_k^{max}, k = \overline{1, K}, y_j^{min} \le y_j \le y_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (4.29)$$

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров);

$H_1\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}$, $H_2\ (Y)\ =\ \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\}$ – множество функций max и min соответственно; $I_1\ (Y) = \{\{h_k\ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}_{\overline{1,N}}$, $I_2\ (Y) = \{\{h_k\ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}$ – множество матриц max и min соответственно; ($definiteness$), $K_1^{unc}. K_2^{unc}$ ($uncertainty$) множество критериев max и min сформированные в условиях определенности и неопределенности;

Объединяя численные модели структуры материала в условиях определённости (4.9)-(4.11) и неопределённости (4.20)- (4.24) представим числовую модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$opt\ F\ (X) = \{\max F_1\ (X) = \{\max h_1(X) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2, \quad (4.30)$$

$$max\ h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2\}, \quad (4.31)$$

$$\min F_1\ (X) = \{min\ h_2(Y) \equiv 954.86 + 28.67y_1 + 37.03y_2 - 31.03y_3 + 54y_4 - 0.922y_1y_2 - 2y_1y_3 + 0.896y_1y_4 - 0.154y_2y_3 + 0.3919y_2y_4 - 0.0134y_3y_4 + 0.0478y_1^2 + 0.0438y_2^2 + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2, \quad (4.32)$$

$$max\ h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}\}, \quad (4.33)$$

при ограничениях: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100,$ (4.34)

$21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0.$ (4.35)

Векторная задача математического программирования (4.30)- (4.35) представляет численную модель принятия оптимального решения структуры материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

4.2. Блок 2. Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) структуры материала на базе ВЗМП

4.2.1. **5 этап.** *Решение ВЗМП – модели структуры материала при равнозначных критериях (решение прямой задачи).*

Для решения векторных задач математического программирования (4.30)- (4.35) представлены методы, основанные на аксиоматике и принципа оптимальности 1. Алгоритм представим в виде ряда шагов.

Шаг 1. Решение задачи (4.30)- (4.35) по каждому критерию отдельно, при этом используется функция *fmincon* (…) системы MATLAB, обращение к функции *fmincon* (…) рассмотрено в [44]. В результате расчета по каждому критерию получаем точки оптимума: Y_k^* и $h_k^* = h_k\ (Y_k^*), k = \overline{1, K}$, $\boldsymbol{K}$=4– величины критериев в этой точке, т. е. наилучшее решение по каждому критерию:

1: $Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_1^* = h_1\ (Y_1^*)\ = -387.9;$

2: $Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_2^* = h_2\ (Y_2^*)\ = 1361.4;$

3: $Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_3^* = h_3\ (Y_3^*)\ = -210.3;$

4: $Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}, h_4^* = h_4\ (Y_4^*)\ = 30.714.$

Ограничения (4.34)- (4.35) и точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в координатах $\{x_1,\ x_2\}$ представлены на рис. 4.1.

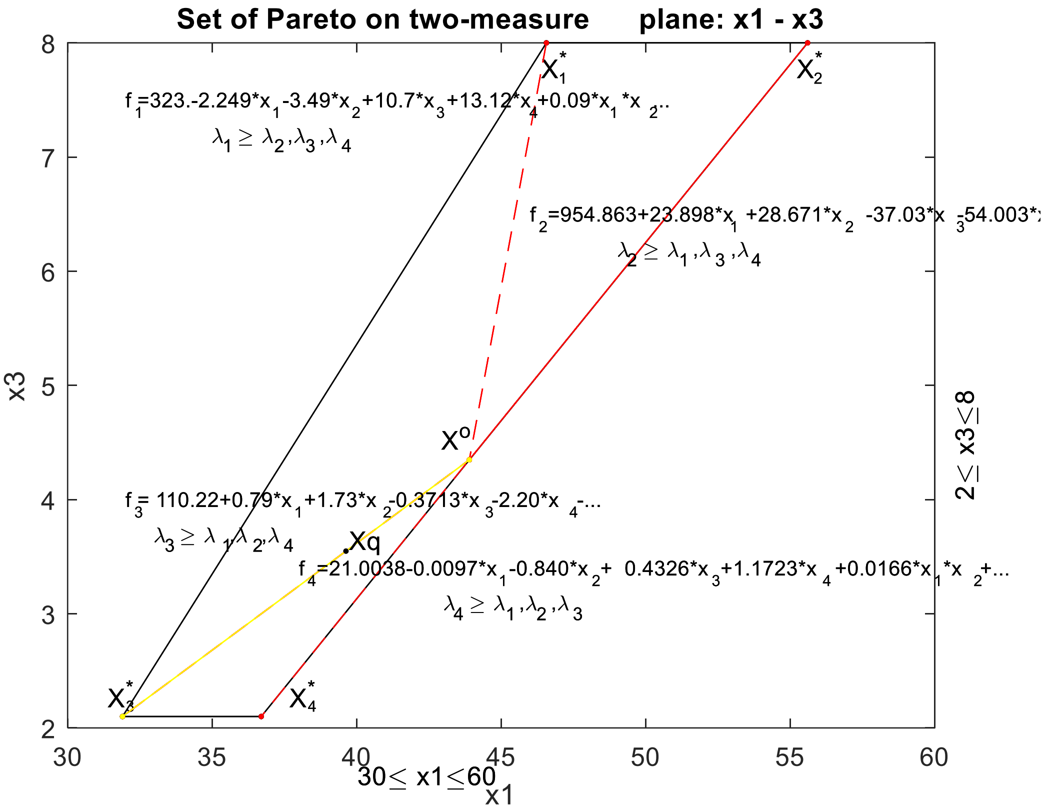

Рис. 4.1. Множество Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$, $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в двухмерные системы координат $\{x_1, x_2\}$

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): Y_k^0 и $h_k^0 = h_k\ (Y_k^0), k = \overline{1,K}$, $\boldsymbol{K}$=4. Для чего решается задача (58)- (62) для каждого критерия $k = \overline{1,K_1}$ на минимум, для каждого критерия $k = \overline{1,K_2}$ на максимум. В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1,N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1,K}$; $f_k^0 = f_k\ (X_k^0)$ – величина k-го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1,K}$, (верхний индекс ноль):

$Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.00\}, h_1^0 = h_1\ (Y_1^0) = \ 296.6;$
$Y_2^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.\}, h_2^0 = \ h_2\ (Y_2^0) = \ -2458.5;$
$Y_3^0 = \{y_1 = 78.16, y_2 = 9.02, y_3 = 8, y_4 = 4.81\}, h_3^0 = h_3\ (Y_3^0) = 169.26;$
$Y_4^0 = \{y_1 = 62.71, y_2 = 22.9, y_3 = 8, y_4 = 6.39\}, h_4^0 = \ h_4\ (Y_4^0) = -73.62.$

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках оптимума $Y^* = \{Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\}$ определяются величины целевых функций $H\ (Y^*) = \left\|h_q\ (Y_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, $D = \ (d_1\ d_2\ d_3\ d_4)^T$- вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$: $d_k = h_k^* - h_k^0, k = \overline{1,4}$, и матрица относительных оценок: $\lambda\ (Y^*) = \left\|\lambda_q\ (Y_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, $\lambda_k\ (X) = \ (h_k^* - h_k^0)/d_k$

$$H\ (Y^*) = \left\|\begin{matrix} 388.0\ 1444.2\ 183.9\ 68.5 \\ 382.0\ 1361.4\ 177.3\ 72.1 \\ 296.6\ 2458.5\ 210.4\ 30.2 \\ 330.1\ 2210.9\ 208.0\ 30.7 \end{matrix}\right\|, d_k = \left\|\begin{matrix} 91.4 \\ -1097 \\ 41.09 \\ -42.9 \end{matrix}\right\|,$$

$$\lambda\ (Y^*) = \left\| \begin{matrix} 1.0000\ 0.9245\ 0.3560\ 0.1197 \\ 0.9367\ 1.0000\ 0.1968\ 0.0363 \\ 0.0\ 0.0\ 1.0000\ 1.011 \\ 0.3669\ 0.2257\ 0.9427\ 1.0000 \end{matrix} \right\|. \quad (4.36)$$

Системный анализ величин критериев в относительных оценках показывает, что в точках оптимума $Y^* = \{ Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии значительно меньше единицы. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки наиболее близки к единице. На решение этой проблемы формируется λ-задача, шаг 4, 5.

Шаг 4. Построение λ-задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o\ =\ \boldsymbol{max_{Y\in S}min_{k\in K}}\lambda_k\ (Y), G\ (Y)\le 0, Y\ge 0, \quad (4.36)$$

которая на втором этапе преобразуется в стандартную задачу математического программирования (λ-задача):

$$\lambda^o\ =\ max\,\lambda, \quad (4.37)$$

$$\text{с ограничениями } \lambda-\frac{h_1\ (Y)-h_1^0}{h_1^*-h_1^0}\le 0, \lambda-\frac{h_3\ (Y)-h_3^0}{h_3^*-h_3^0}\le 0, \quad (4.38)$$

$$\lambda-\frac{h_2\ (Y)-h_2^0}{h_2^*-h_2^0}\le 0, \lambda-\frac{h_4\ (Y)-h_4^0}{h_4^*-h_4^0}\le 0, \quad (4.39)$$

$$y_1+\ y_2+\ y_3+\ y_4=100, \quad (4.40)$$

$$0\le\lambda\le 1, 21\le y_1\le 79, 5\le y_2\le 59, 2.1\le y_3\le 9.0, 2.2\le y_4\le 7.0. \quad (4.41)$$

где вектор неизвестных имеет размерность N+1: $\boldsymbol{Y}=\{y_1,\dots,y_N,\lambda\}$; функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ соответствуют (4.30)- (4.35). Подставив числовые значения функций $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$, мы получим λ-задачу:

$$\lambda^o\ =\ max\,\lambda, \quad (4.42)$$

$$\text{ограничения } \lambda\ -\frac{323.84-2.249y_1-3.49*x2\ \dots-0.2434y_3^2-0.5026y_4^2-h_1^0}{h_1^*-h_1^0}\le 0, \quad (4.43)$$

$$\lambda\ -\frac{110.22+0.7918y_1+1.73y_2-\ \dots+0.0335y_3^2+0.124y_4^2-h_3^0}{f_3^*-f_3^0}\le 0, \quad (4.44)$$

$$\lambda\ -\frac{954.8+28.67y_1+37y_2-\ \dots+3.8489y_3^2+3.1748y_4^2-h_2^0}{h_2^*-h_2^0}\le 0, \quad (4.45)$$

$$\lambda\ -\frac{21-0.0097y_1-0.841y_2-\ \dots+0.006y_3^2-0.0311y_4^2-h_4^0}{h_4^*-h_4^0}\le 0, \quad (4.46)$$

$$y_1+\ y_2+\ y_3+\ y_4=100, \quad (4.47)$$

$$0\le\lambda\le 1, 21\le y_1\le 79, 5\le y_2\le 59, 2.1\le y_3\le 9.0, 2.2\le y_4\le 7.0. \quad (4.48)$$

Шаг 5. Решение λ-задачи.

Решение λ-задачи. (4.42)- (4.48) осуществляется обращением к функции *fmincon* (…), [44]:

$[Xo, Lo] = fmincon\ ('Z\_TehnSist\_4Krit\_L', X0, Ao, bo, Aeq, beq, lbo, ubo,$
$'Z\_TehnSist\_LConst', options)$.

В результате решения ВЗМП (4.30)- (4.35) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ-задачи (4.42)- (4.48) получили:

$$\boldsymbol{X^o}=\{Y^o=\{y_1=43.9, y_2=49.54, y_3=4.348, y_4=2.2, \lambda^o=0.6087\}, \quad (4.49)$$

точку оптимума $\boldsymbol{X^o}$, которая представляет конструктивные параметры материала при равнозначных критериях (характеристиках, представлена на рис. 1;

$h_k(Y^o), k=\overline{1,K}$- величины критериев (характеристик структуры материала):

$$\{h_1(Y^o)=364.0, h_2\ (Y^o)=1790.7, h_3\ (Y^o)=\ 194.3, h_4\ (Y^o)=\ 47.5\}; \quad (4.50)$$

$\lambda_k(Y^o), k=\overline{1,K}$- величины относительных оценок

$\{\lambda_1(Y^o) = 0.7372, \lambda_2(Y^o) = 0.6087, \lambda_3(Y^o) = 0.6087, \lambda_4(Y^o) = 0.6087\};$ (4.51)

λ°=0.6087 – это максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок, измеренный в относительных единицах:

$\lambda^o = min\ (\lambda_1(Y^o), \lambda_2(Y^o), \lambda_3(Y^o), \lambda_4(Y^o)) =\ 0.6087,$

λ° – также называют гарантированным результатом в относительных единицах, т. е. $\lambda_k(Y^o)$ и соответственно характеристики технической системы $f_k(Y^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

Заметим, что в соответствии с теоремой с 1, в точке $\boldsymbol{X^o}$ критерии 2, 3 и 4 противоречивы. Это противоречие определяется равенством:

$\lambda_2(Y^o) = \lambda_3(Y^o) = \lambda_4(Y^o) = \lambda^o = 0.6087,$

а остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^o) = 0.7372\} > \lambda^o$.

Теорема 1 служит основой для определения правильности решения векторной задачи. В векторной задаче математического программирования, как правило, для двух критериев выполняется равенство: $\lambda^o = \lambda_q(Y^o) = \lambda_p(Y^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in S,$ (в нашем примере такие критерии 2, 3, 4), для других критериев определяется как неравенство.

4.2.2. **6 этап.** *Геометрической интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 4 критериями в двухмерную систему координат (с 2 параметрами) в относительных единицах.*

Для геометрической интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 4 критериями в двухмерную систему координат (с 2-мя параметрами) в относительных единицах введем изменения. В ВЗМП (4.30)- (4.35) параметры y_1 и y_3 рассматриваются как переменные, параметры y_2 и y_4 рассматриваются как постоянные. Присвоим постоянным параметрам размерность:

$y_2 = 49.5492, y_4 = 2.2$ в соответствии с результатом решения ВЗМП (4.30)- (4.35) при равнозначных критериях, представленных в (4.49).

В итоге ВЗМП (4.30)- (4.35) стала двух мерной.

В результате решения ВЗМП (4.30)- (4.35) с двумя переменными y_1 и y_3 (в обозначения результатов ввели дополнительно «о» Y1omax) получили.

1. Координаты точки по первому критерию на максимум:

Y1omax = $\{x_1$ =46.5676 x_2 =49.5492 x_3 =8.0000 x_4 =2.2000}. (4.52)

Величины четырех критериев в точке Y1omax:

FY1omax = $\{f_1(Y1omax) = 403.6$ $f_2(Y1omax) =$ 1430.3 $f_3(Y1omax)$ =190.2 $f_4(Y1omax)$ =72.7.

Величины относительны оценок критериев в точке X1omax:

LY1omax = $\{\lambda_1(Y1omax)$ =1.1708 $\lambda_2(Y1omax) = 0.9372$
$\lambda_3(Y1omax)$ =0.5098 $\lambda_4(Y1omax)$ =0.0207. (4.53)

Координаты точки по первому критерию на минимум:

Y1omin ={31.9000 49.5492 2.1000 2.2000}.

Величины шести критериев в точке Y1omin:

FY1omin ={1.0e+03 * 0.3037 2.2073 0.1957 0.0243}.

Величины относительны оценок критериев в точке Y1omin:

LY1omin = (0.0774 0.2290 0.6441 1.1503) (4.54)

2. Координаты точки, функции и относительные оценки по второму критерию на максимум и минимум:

Y2omax ={55.6075 49.5492 8.0000 2.2000}.

FY2omax ={1.0e+03 * 0.4320 1.1936 0.1909 0.0842}.

LY2omax ={1.4813 1.1530 0.5268 -0.2467}.

Y2omin ={31.9000 49.5492 2.1000 2.2000).

FY2omin ={1.0e+03 * 0.3037 2.2073 0.1957 0.0243}.

LY2omin ={0.0774 0.2290 0.6441 1.1503}. (4.55)

3. Координаты точки, функции и относительные оценки по третьему критерию на максимум и минимум:

Y3omax ={31.9000 49.5492 2.1000 2.2000 }.

FY3omax ={1.0e+03 * 0.3037 2.2073 0.1957 0.0243}.

LY3omax ={0.0774 0.2290 0.6441 1.1503}.

Y3omin ={78.1673 49.5492 8.0000 2.2000}.

FY3omin ={512.9622 636.7052 192.3963 111.3139}.

LY3omin ={2.3673 1.6606 0.5629 -0.8782}. (4.56)

4. Координаты точки, функции и относительные оценки по четвертому критерию на максимум и минимум:

Y4omax ={36.7000 49.5492 2.1000 2.2000}. (4.57)

FY4omax ={1.0e+03 * 0.3182 2.1306 0.1964 0.0283}.

LY4omax ={0.2363 0.2989 0.6603 1.0562}.

Y4omin ={62.7123 49.5492 8.0000 2.2000}. (4.58)

FY4omin ={1.0e+03 * 0.4559 1.0129 0.1914 0.0930}.

LY4omin ={1.7432 1.3176 0.5391 -0.4511}. (4.59)

Представим в целом результаты решения ВЗМП с двумя переменными параметрами x_1 и x_3 (двухмерная ВЗМП):

Y = [Yopt (1,:)={46.5676 43.2324 8.0000 2.2000}, $\lambda_1(\text{Y}1omax) =0.5$;

Yopt (2,:)= {55.6075 34.1925 8.0000 2.2000}, $\lambda_2(\text{Y}2omax) =0.6087$;

Yopt (3,:)= {31.9000 59.0000 2.1000 7.0000}, $\lambda_3(\text{Y}3omax) = 0.6087$;

Yopt (4,:)= {36.7000 59.0000 2.1000 2.2000},$\lambda_4(\text{Y}4omax) = 0.7372$;

Yo (1:4)= {43.9022 49.5492 4.3486 2.200}, $\lambda(\text{Yo}) = \lambda^o = 0.5196$. (4.60)

В допустимом множестве точек $\boldsymbol{S}$, образованных ограничениями (4.47)- (4.48), точки оптимума Y_1^*, Y_2^*, Y, Y_4^*, объединенных в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$, представлены на рис 4.1. Координаты этих точек, а также характеристики материала в относительных единицах $\lambda_1\ (Y), \lambda_2\ (Y), \lambda_3\ (Y), \lambda_4\ (Y)$ показаны на рис. 4.2 в трех мерном пространстве $x_1\ x_2$ и λ, где третья ось λ – относительная оценка.

\

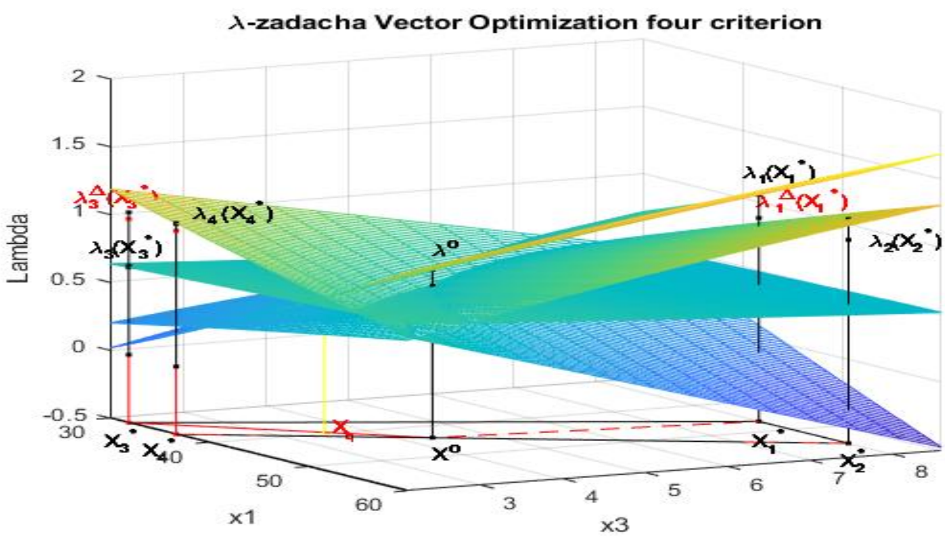

Рис. 4.2. Решение λ-задачи в трехмерной системе координат $x_1\ x_3\ (= y_1\ y_3)$, λ

Discussion. Сравним результаты решения ВЗМП (4.30)- (4.35) с переменными координатами $\{y_1 y_2\ y_3\ y_4\}$ (четырех мерная ВЗМП), представленные в (4.49), (4.50), (4.51), с результатами решения ВЗМП (4.30)- (4.35) с переменными координатами $\{y_1\ y_3\}$ (двух мерная ВЗМП), представленные в (3.60). (На рисунках 4.2, …, 4.7 вектор $\boldsymbol{Y} = \{y_1, \dots, y_N, \lambda\}$ и функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ заменены на $\boldsymbol{X} = \{x_1, \dots, x_N, \lambda\}$; функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$).

Мы видим, что координаты шести точек оптимума в $\{y_1\ y_3\}$ и λ^o совпадают. Оптимальные величины критериев $h_k\ (Y_k^*), k \in \boldsymbol{K}$ и соответствующие относительные оценки $\lambda_k\ (Y_k^*), k \in \boldsymbol{K}$ не совпадают.

Рассмотрим, например, оптимальную точку X_3^*. Функция $\lambda_3\ (X)$ сформирована из функции $h_3\ (X)$ с переменными координатами $\{y_1\ y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2$=49.54, y_4=2.2$\}$, взятые из оптимальной точки Y^o (4.49). В точке Y_3^* относительная оценка $\lambda_3\ (Y_3^*) = 0.6441$– показана на рис. 4.2 черной точкой. Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3\ (Y_3^*)$ полученная из функции $h_3\ (Y_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^\Delta\ (Y_3^*) = 1$ – показана на рис. 4.2 красной точкой.

Разность между $\lambda_3^\Delta\ (Y_3^*)$ = 1 и $\lambda_3\ (Y_3^*) = 0.6441$ является ошибкой Δ=0.3559 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области. Аналогично показана точка X_1^* и соответствующие относительные оценки $\lambda_1\ (Y_1^*)$ и $\lambda_1^\Delta\ (Y_1^*)$. Обобщая и объединяя проблемы дискуссии, можем сформулировать методологию.

***Методология геометрической интерпретации перехода от N-мерного к двухмерному измерению функці1 в векторной задаче математического программирования*.**

1 шаг. Построение и решение λ-задачи с N-мерными параметрами.

2 шаг. Построение и решение λ-задачи с *2*-мерными параметрами, остальные (*N-2)* параметры постоянные взятые из результатов решения λ-задачи с N-мерными параметрами (из шага 1).

3 шаг. Геометрическое построение функций из λ-задачи с *2*-мерными параметрами стандартными методами и соответствующими надписями

Таким образом, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая иллюстрация от N-мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками аппроксимации.

4.2.3. **7 этап.** *Решение ВЗМП – модели структуры материала при заданном приоритете критерия (решение обратной задачи).*

Лицом, принимающим решения, как правило, является конструктор системы. В разделе переменная Y заменена на переменную X.

Шаг 1. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Алгоритм решения векторной задачи представлен на стадии 3. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше.

Множество точек, оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o}\subset\boldsymbol{S}$ находится между оптимальными точками $X_1^*\ X^o\ X_3^*\ X^o\ X_4^*\ X^o\ X_2^*\ X^o\ X_1^*$ (на рисунках вместо Y используется X). Мы проведем анализ множества точек Парето $\boldsymbol{S^o}\subset\boldsymbol{S}$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_1^*\ X_3^*\ X_4^*\ X_2^*\ X_1^*$ с точкой X^o, которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили четыре подмножеств точек $X \in \boldsymbol{S_q^o}\subset\boldsymbol{S^o}\subset\boldsymbol{S}, q = \overline{1,4}$. Подмножество $\boldsymbol{S_1^o}\subset\boldsymbol{S^o}\subset\boldsymbol{S}$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, λ_4, то есть в поле первого критерия $\boldsymbol{S_1^o}$ имеет приоритет над остальными. Подобно $\boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$- подмножества точек, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, будем обозначать:

$\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o}$. Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1\ x_2\}$ на рис. 4.1. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1\ x_2\ \lambda\}$ на рис. 4.2, где третья ось λ- относительная оценка. Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 2 он снижен до -0,5. Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком системы (структуры материала).

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $\boldsymbol{S_1^o}, \boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 4.1 в виде функций $f_1(X), \dots, f_4(X)$.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

В соответствии с теоремой 1 известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in \boldsymbol{K}$ и $p \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$,

а для остальных выполняется неравенства: $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \neq p \neq k$.

В модели материала (4.30)- (4.35) и соответствующей λ-задачи (4.42)- (4.48) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$= 0.6087, т.е. выполняется числовая симметрия.

Эту симметрию покажем на рис. 4.3, где представлены функции $\lambda_1(X)$ и $\lambda_3(X)$ отдельно со стороны оптимальной точки $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$.

Для сравнения аналогично представим функции наиболее противоречивые критерии $\lambda_2(X)$ и $\lambda_3(X)$ отдельно со стороны оптимальной точки $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$. На рис. 4.3 и 4.4 показаны все точки и данные, о которых говорилось на рис. 4.2.

Как правило, из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$= 0.6087 противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in \boldsymbol{K}$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $\boldsymbol{K} = 4$, показанных на рис. 4.3. На дисплей выдается сообщение:

q=input ('Введите приоритетный критерий (номер) *q*= ') – Ввели критерий *q*=3.

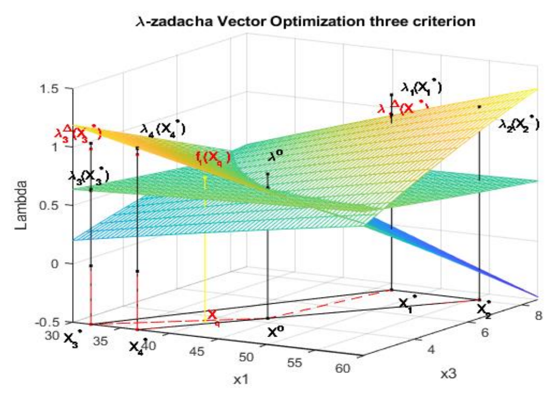

Рис. 4.3. Решение λ-задачи: $\lambda_2(X)$, ($\lambda_3(X)$ и $\lambda_4(X)$ в трехмерной системе координат $x_1\ x_2$ и λ, $\lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda_4(X^o)$= 0.6087

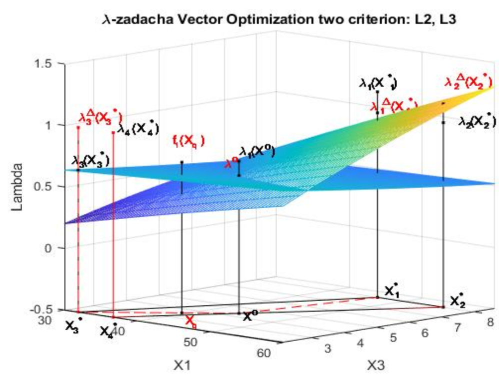

Рис. 4.4. Решение λ-задачи ($\lambda_2(X)$ и $\lambda_3(X)$) в трехмерной системе координат $x_1\ x_2$ λ, $\lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$= 0.6087.

***Шаг** 3*. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o (4.49) в точку X_q^*, полученную на первом шаге. Данные о критерии q=3 выдаются на экран:

$$f_q(X^o) = 194.27 \leq f_q(X) \leq 210.35 = f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}. \quad (4.61)$$

В относительных единицах критерий $q=3$ изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.6087 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in \boldsymbol{K}. \quad (4.62)$$

Эти данные анализируется.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия *fq*=» – вводим, например, f_q=200.

Шаг 5. *Вычисляется относительная оценка*.

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 200$ вычисляется относительная оценка: $\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{200-194.27}{210.35-194.27} = 0.7479,$

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в предела (4.61):

$$0.6087 = \lambda_3(X^o) \leq \lambda_3 = 0.7489 \leq \lambda_3(X_3^*) = 1, q \in \boldsymbol{K},$$

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (4.61) и соответственно относительной оценки λ_q в (4.62), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, λ_q, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.7489-0.6087}{1-0.6087} = 0.3558, q = 3 \in \boldsymbol{K}. \quad (4.63)$$

***Шаг** 7*. Вычислим координаты точки приоритета критериев с размерностью f_q. Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1\, x_2\, x_3\, x_4\}, q = 3,$ определим координаты для точки с $f_q = 200$ с относительной оценкой (4.53):

$$x_{\lambda=0.74}^{q=3} = \{x_1 = X^o(1) + \rho\,(X_q^*(1) - X^o(1)),$$
$$x_2 = X^o(2) + \rho\left(X_q^*(2) - X^o(2)\right),$$
$$x_3 = X^o(3) + \rho\left(X_q^*(3) - X^o(3)\right),$$
$$x_4 = X^o(4) + \rho\left(X_q^*(4) - X^o(4)\right)\}, \quad (4.64)$$

где $X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}$,

$X_3^* = \{x_1 = 31.9, x_2 = 59.00, x_3 = 2.1, x_4 = 7.0\}$.

Как результат решения (4.64) мы получим точку с координатами:

$X^q = \{x_1 = 39.63, x_2 = 52.91, x_3 = 3.54, x_4 = 3.907\}$.

***Шаг** 8*. Вычисление главных показателей точки X^q.

Для полученной точки X^q, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1,K}\}$,

$f(X^q) = \{f_1(X^q) = 344.3, f_2(X^q) = 2000, f_3(X^q) = 199, f_4(X^q) = 41.7\}$;

все относительные оценки критериев:

$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\}, \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$:

$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.5224, \lambda_2(X^q) = 0.418, \lambda_3(X^q) = 0.7244, \lambda_4(X^q) = 0.7446\}$;

минимальная относительная оценка: $\min\lambda(X^q) = \min_{k \in K}(\lambda_k(X^q)) = 0.418$.

$P^q = [p_1^3 = 1.3868, p_2^3 = 1.7333, p_3^3 = 1.0, p_4^3 = 0.973]$;

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q\,(X^q)}{\lambda_k\,(X^q)}, k = \overline{1, K}\}$:

$$\lambda_k\,(X^q) * P^q = \{p_1^3 * \lambda_1(X^q) = 0.7244, p_2^3 * \lambda_2(X^q) = 0.7244,$$
$$p_3^3 * \lambda_3(X^q) = 0.7244, p_4^3 * \lambda_4\,(X^q) = 0.7244\}$$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min\,(p_1^3\lambda_1(X^q), p_2^3\lambda_2\,(X^q), p_3^3\lambda_3\,(X^q), p_4^3\lambda_4\,(X^q)) = 0.7244$$

Аналогично другие точки Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S^o}$ могут быть получены.

Анализ полученных результатов. Рассчитанная величина $f_q\,(X_t^o) = 199, q = 3 \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 200$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q\,(X_t^o) - f_q| = |199 - 200| = 1.0$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.5\%$. Если ошибка $\Delta f_q = |f_q\,(X_t^o) - f_q| = |199 - 200| = 1.0$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.5\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. ***Конец.***

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения (4.48) и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений).

В нашем примере окончательный вариант включает параметры: $X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}$;

параметры технической системы при заданном приоритете критерия:

q=3: $X^q = \{x_1 = 39.63, x_2 = 52.91, x_3 = 3.54, x_4 = 3.907\}$.

4.3. Блок 3. Исследование, проектирование, геометрическая интерпретация N-мерного пространства в 2-х мерное и выбор оптимальных параметров сложной структуры материала в многомерной математике.

Блок 3 включает 2 этапа: 8 этап исследования в относительных единицах: 9 этап исследования в физических единицах.

4.3.1. **8 этап.** *Геометрическая интерпретация результатов решение в относительных единицах при проектировании структуры материала перехода от N-мерного к двухмерному пространству.*

Геометрическая интерпретацию результатов решения в относительных единицах представим, во-первых, на примере функций $\lambda_2\,(X), \lambda_3\,(X)$, во-вторых, отдельно на примере функций $\lambda_2\,(X)$ и $\lambda_3\,(X)$.

1. Исследование функций $\boldsymbol{\lambda_2\,(X), \lambda_3\,(X)}$ на максимум.

При исследовании параметров структуры материала на множестве точек $\boldsymbol{S}$, образованных ограничениями (4.30)- (4.35), точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$, показанные на рис 4.1, объединены в контур и представляют множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$.

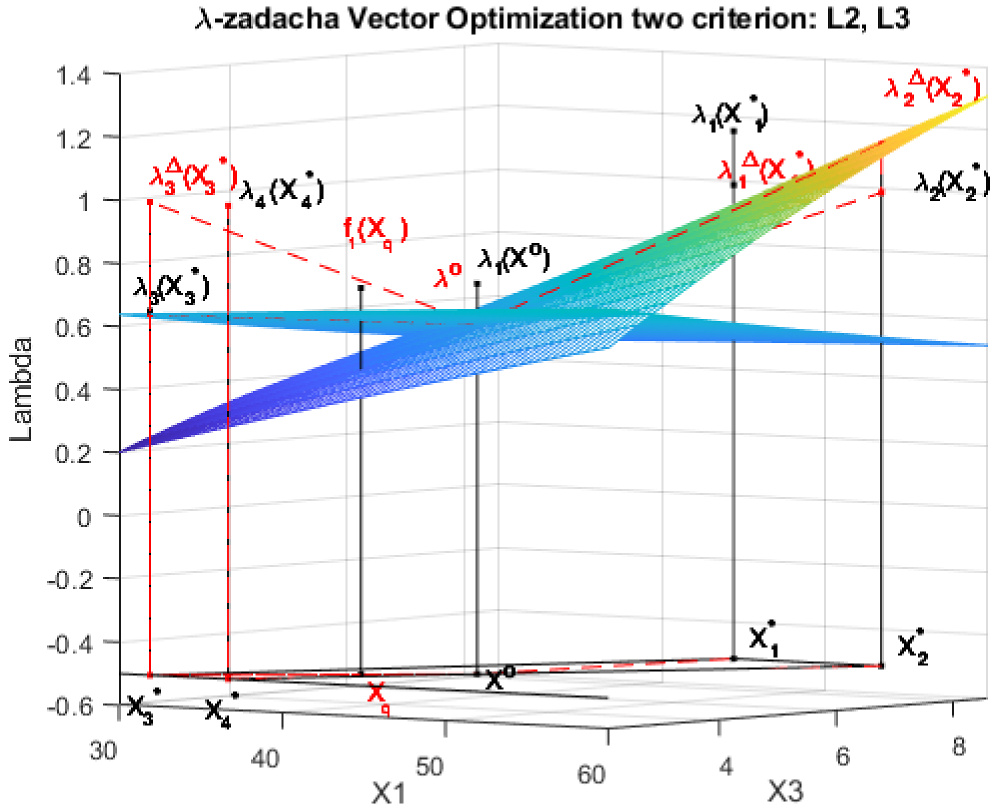

Рис. 4.5. Функции $\lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X)$ и λ^o в λ-задаче в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и λ и геометрическая интерпретация $\lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X)$ в четырех мерной системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Координаты этих точек, а также характеристики структуры материала в относительных единицах $\lambda_1\ (X), \lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X), \lambda_4\ (X)$ показаны на рис. 4.2 в двухмерном пространстве $x_1\ x_2$ и λ, где третья ось λ – относительная оценка.

Глядя на рисунок 4.2, мы можем представить изменения всех функций $\lambda_1(X), \dots, \lambda_4\ (X)$ в четырехмерном пространстве $x_1, \dots, x_4$. Для наглядности выберем две наиболее противоречивые функции $\lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X)$, показанные на рис. 4.3, и представим эти функции $\lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X)$ на рис. 4.5.

Рассмотрим на Рис. 4.5 оптимальную точку X_3^*. Функция $\lambda_3\ (X)$ – в относительных единицах сформирована из функции $f_3\ (X)$ – в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 1790.7, x_4 = 47.5\}$, взятые из оптимальной точки X^o (4.50). В точке X_3^* относительная оценка $\lambda_3\ (X_3^*) = 0.6441$ – показана на рис. 2 черной точкой.

Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3\ (X_3^*)$ полученная из функции $f_3\ (X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*) = 1$ – показана на рис. 4.5 красной точкой. Разность между $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*) = 1$ и $\lambda_3\ (X_3^*) = 0.6441$ является ошибкой Δ=0.3559 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области. Соединим линейной функцией относительные оценки λ^o и $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*)$, лежащей между точками X^o и X_3^*.

Аналогично X_3^* представим точку X_2^* с соответствующими относительными оценками $\lambda_2\ (X_2^*)$= 1.1530 в координатах $\{x_2\ x_3\}$ и $\lambda_2^\Delta(X_1^*) = 1$, полученную в координатах $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$. Линейная функция, соединяющая точки λ^o и $\lambda_2^\Delta\ (X_2^*)$ в относительных единицах характеризует функцию $f_2\,(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $\lambda_2^{\Delta}\,(X_2^*)$ -λ^o- $\lambda_3^{\Delta}\,(X_3^*)$ представляют геометрическую интерполяцию функций $f_2\,(X)$ и $f_3\,(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

2. Исследование функций $\boldsymbol{\lambda_2\,(X), \lambda_3\,(X)}$ отдельно на максимум и минимум четырехмерной системе.

Проведем исследование функций $f_2\,(X)$, представленную в относительных единицах: $\lambda_2\,(X)$, которая показана на рис. 4.6.

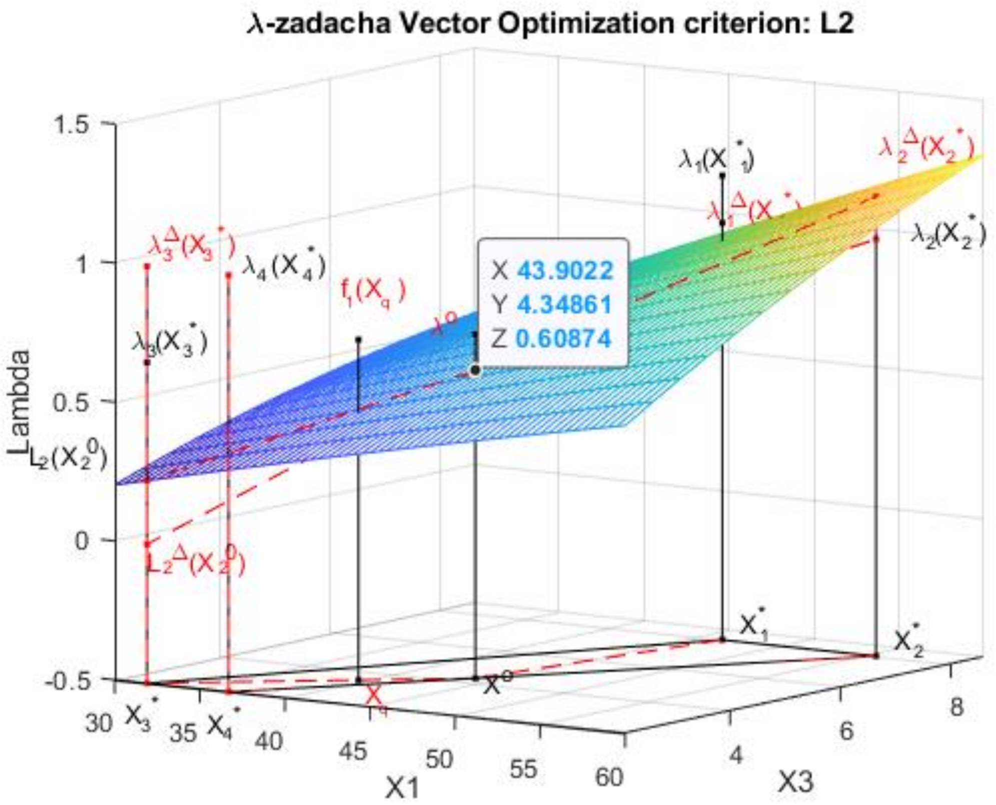

Рис. 6. Функции $\lambda_2\,(X)$ и λ^o в λ-задаче в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и λ и геометрическая интерпретация $\lambda_2\,(X)$ в четырехмерной системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$, (выделено красным цветом).

Для оценки максимального $\lambda_2^{\Delta}\,(X_2^*)$ = 1 значения второго критерия в относительных единицах в четырехмерной системе координат $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$, (выделено красным цветом) используются, полученные на третьем шаге, данные (4.36) матрицы λ (X^*). Для оценки минимального $\lambda_2^{\Delta}\,(X_2^0)$ = 0 значения второго критерия в относительных единицах в четырехмерной системе координат $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$, (выделено красным цветом) используются, полученные на третьем шаге, данные (4.36) матрицы λ (X^0).

Разность по максимуму между $\lambda_2^{\Delta}\,(X_2^*)$ = 1 (четырехмерная система) и $\lambda_2\,(X_1^*) = 1.1530$ (двухмерная система) является ошибкой Δ=0.1530 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области.

Разность по минимуму между $\lambda_1^{\Delta}(X_1^0) = 0$ (четырехмерная система) и $\lambda_1(X_2^0) = 0.2290$ (двухмерная система) является ошибкой Δ= 0.2290 перехода от четырехмерной (а в общем случае *N*-мерной) к двухмерной области.

Соединим линейной функцией относительные оценки $\lambda_2^{\Delta}(X_2^*)$ λ^o и $\lambda_2^{\Delta}(X_2^0)$, лежащей между точками X_2^* X^o и X_2^0. А в целом отрезки $\lambda_2^{\Delta}(X_2^*)$ -λ^o- $\lambda_2^{\Delta}(X_2^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функций $f_2(X)$ в относительных единицах $\lambda_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Проведем исследование функции $f_3(X)$, представленную в относительных единицах: $\lambda_3(X)$, показанную на рис. 4.7.

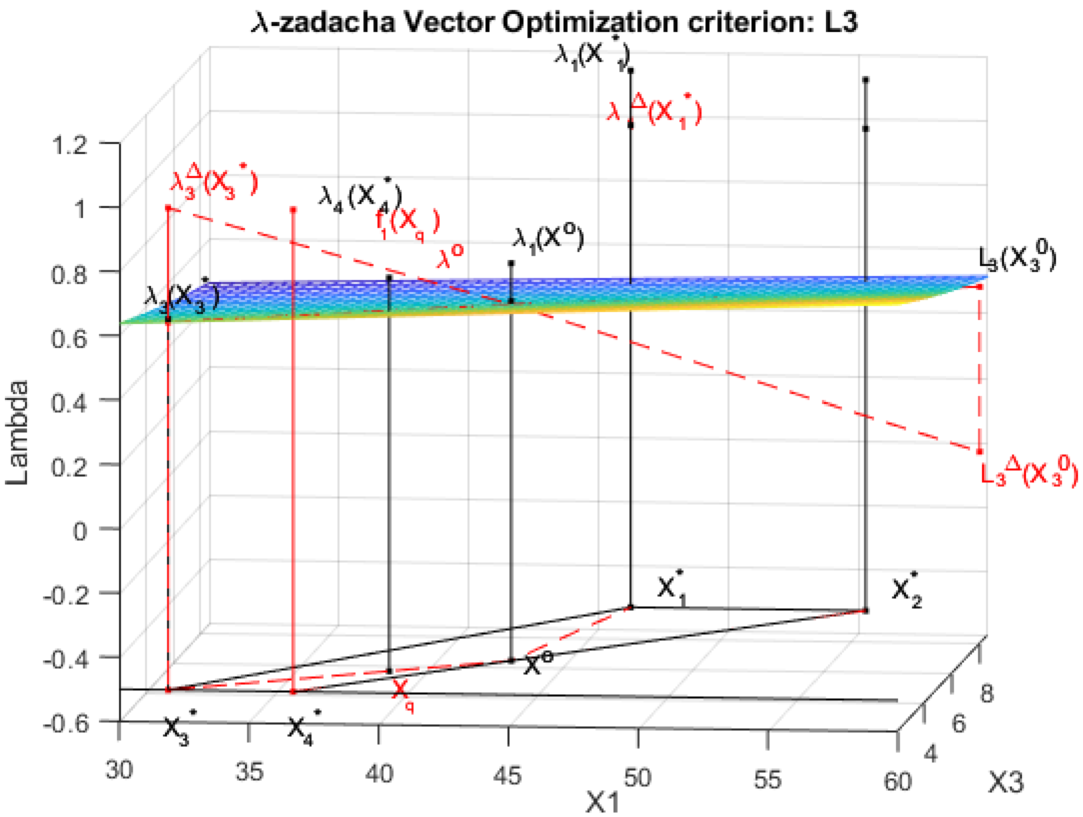

Рис. 7. Функции $\lambda_3(X)$ и λ^o в λ-задаче в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ и геометрическая интерпретация $\lambda_3(X)$ в четырех мерной системе координат x_1 x_2 x_3 x_4, (выделено красным цветом).

Для оценки максимального $\lambda_3^{\Delta}(X_3^*) = 1$ значения третьего критерия в относительных единицах в четырехмерной системе координат $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$, (выделено красным цветом) используются, полученные на третьем шаге, данные (4.36) матрицы $\lambda(X^*)$. Для оценки минимального $\lambda_3^{\Delta}(X_0^0) = 0$ значения первого критерия в относительных единицах в четырехмерной системе координат $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$, (выделено красным цветом) используются, полученные на третьем шаге, данные (4.363) матрицы $\lambda(X^0)$.

Разность по максимуму между $\lambda_3^{\Delta}(X_3^*) = 1$ (четырехмерная система) и $\lambda_3(X_3^*) = 0.6441$ (двухмерная система) является ошибкой Δ=0.3559 перехода от четырехмерной (а в общем случае *N*-мерной) к двухмерной области.

Разность по минимуму между $\lambda_3^{\Delta}(X_3^0) = 0$ (четырехмерная система) и $\lambda_3(X_3^0) = 0.5629$ (двухмерная система) является ошибкой Δ=0.4371 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области.

Соединим линейной функцией относительные оценки $\lambda_3^{\Delta}(X_3^*)$ λ^o и $\lambda_3^{\Delta}(X_3^0)$, лежащей между точками X_3^* X^o и X_3^0. А в целом отрезки $\lambda_3^{\Delta}(X_3^*)$ -λ^o- $\lambda_3^{\Delta}(X_3^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функций $f_3(X)$ в относительных единицах $\lambda_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Таким образом, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая интерпретация от ***N***-мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками аппроксимации.

9 этап. *Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – модели технической системы при проектировании в трехмерной системе координат* ***в физических единицах***.

На пятом шаге алгоритма мы рассчитали параметры точки оптимума при равнозначных критериях: $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}$, в двухмерной системе координат x_1, x_2 Рис. 4.1 и в трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ в относительных единицах на рис. 4.2, 4.3, 4.4 при проектировании.

На Рис. 4.5 показаны: точки оптимума X_1^*, X_3^*, с соответствующими относительными оценками $\lambda_1(X_1^*)$ $\lambda_1^{\Delta}(X_1^*)$, $\lambda_3(X_3^*)$ $\lambda_3^{\Delta}(X_3^*)$ и линейные функции $\lambda^o\lambda_1^{\Delta}(X_1^*)$, $\lambda^o\lambda_3^{\Delta}(X_3^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_1(X), f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Исследуем и представим эти параметры для каждой характеристики технической системы (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X), f_5(X), f_6(X)$ в ***физических единицах***.

9.1 этап. *Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП –* ***первой*** *характеристики технической системы при проектировании в физических единицах*.

Первая характеристика структуры материала $f_1(X)$ сформирована в 4.1.4:

$$\max h_1(X) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2, \quad (4.30)$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_1(Y)$ в физических единицах с переменными координатами $\{y_1\ y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^o (4.49) на рис 4.6.

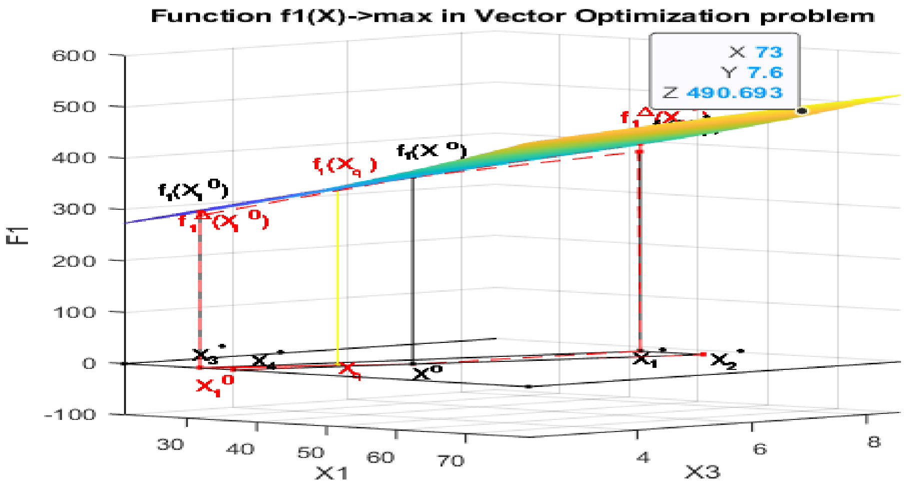

Рис. 4.6. Функция $f_1(X)$ в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_1(X)$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Координаты точки **максимума** $Y_1^* = \{y_1 = 46.7636, y_3 = 8.0\}$ (на рис. 4.6 обозначена как X1omax). Величина целевой функции h_1^*=FX1omax = 387.9.

Координаты точки **минимума** $X_1^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 4.6 обозначена как X1omin). Величина целевой функции F_1^0=FX1omin = 296.6.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 4.6 обозначена как X1o0). Величина целевой функции $f_1(X^o)$ =FX1o0 = 364.0.

Точки оптимума: X_1^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_1^* = f_1\,(X_1^*) = -387.9$; точка X_1^0 с величиной критерия

$f_1^0 = f_1(X_1^0) = 296.6$ – на рисунке обозначены ($f_1^\Delta\,(X_1^*)$, $f_1^\Delta\,(X_1^0)$.

Линейная функция, соединяющая точки $f_1\,(X^o)$ и $f_1^\Delta\,(X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1\,(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_1^\Delta\,(X_1^*)$ -$f_1\,(X^o)$- $f_1^\Delta\,(X_1^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_1\,(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

9.2 этап. *Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП –* ***второй*** *характеристики технической системы при проектировании в физических единицах*.

Вторая характеристика технической системы $f_2(X)$ представлена в 4.1.4: $min\,f_2(X)$≡795.72 +23.89x_1+30.866x_2 -25.8586x_3 -45.0026x_4 -0.7683x_1x_2 +0.4703x_1x_3 +0.7472x_1x_4-0.1283x_2x_3+0.3266x_2x_4-0.0112x_3x_4+0.0398x_1^2+0.0365x_2^2 +3.2x_3^2+2.6457x_4^2, (3.26)

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^o (4.49) на рис 4.7.

Координаты точки **максимума** $X_2^* = \{x_1 = 55.6, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 4.7 обозначена как X2omax). Величина целевой функции F_2^*=FX2omax = 1361.4.

Координаты точки **минимума** $X_2^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 4.7 обозначена как X2omin). Величина целевой функции F_2^0=FX2omin = 2458.5.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 7 обозначена как X2o0). Величина целевой функции $f_2\,(X^o)$ =FX2o0 = 1790.7.

Точки оптимума: X_2^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_2^* = f_2\,(X_2^*) = 1361.4$; точка X_2^0 с величиной критерия

$f_2^0 = f_2(X_2^0) = -2458.5$– на рисунке обозначены ($f_2^\Delta\,(X_2^*)$, $f_2^\Delta\,(X_2^0)$.

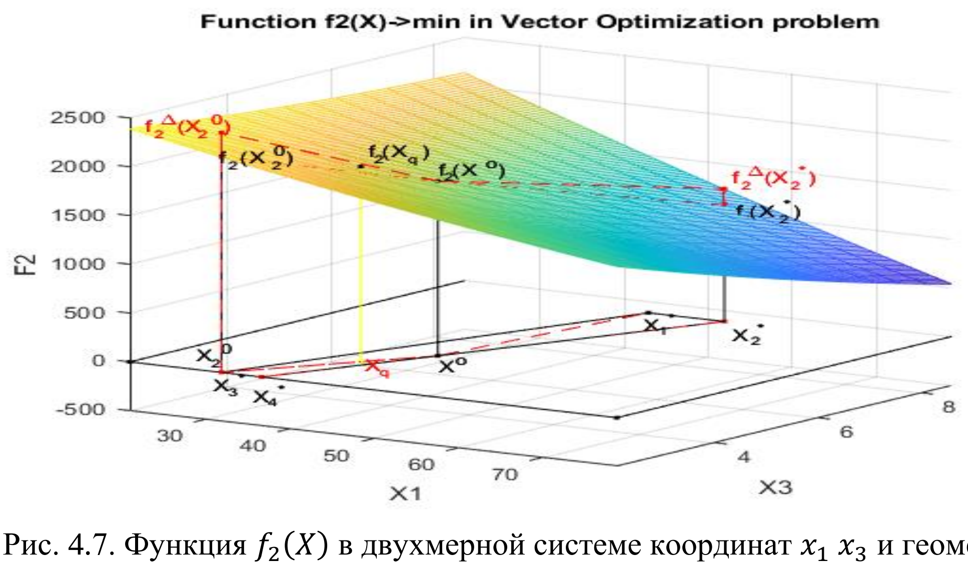

Рис. 4.7. Функция $f_2(X)$ в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_2(X)$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_2\ (X^o)$ и $f_2^{\Delta}\ (X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^{\Delta}\ (X_2^*)$ -$f_2\ (X^o)$- $f_2^{\Delta}\ (X_2^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

9.3 этап. *Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП –* ***третьей*** *характеристики технической системы при проектировании в физических единицах*.

Третья характеристика технической системы $f_3(X)$ сформирована в 4.1.4:

$$max\ h_3(Y)\equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2\}, \quad (4.31)$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $f_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^o (4.49) на рис 4.8.

Координаты точки **максимума** $X_3^* = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 4.8 обозначена как X3omax). Величина целевой функции F_3^*=FX3omax = 210.3.

Координаты точки **минимума** $X_3^0 = \{x_1 = 78.16, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 4.8 обозначена как X3omin). Величина целевой функции f_3^0=FX3omin = 169.26.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 4.8 обозначена как X3o0). Величина целевой функции $f_3\ (X^o)$ =FX3o0 = 194.3.

Точки оптимума: X_3^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_3^* = f_3\ (X_3^*)\ = -210.3$; точка X_3^0 с величиной критерия

$f_3^0 = f_3(X_3^0) =\ 169.26$ – на рисунке обозначены ($f_3^{\Delta}\ (X_3^*)$, $f_3^{\Delta}\ (X_3^0)$.

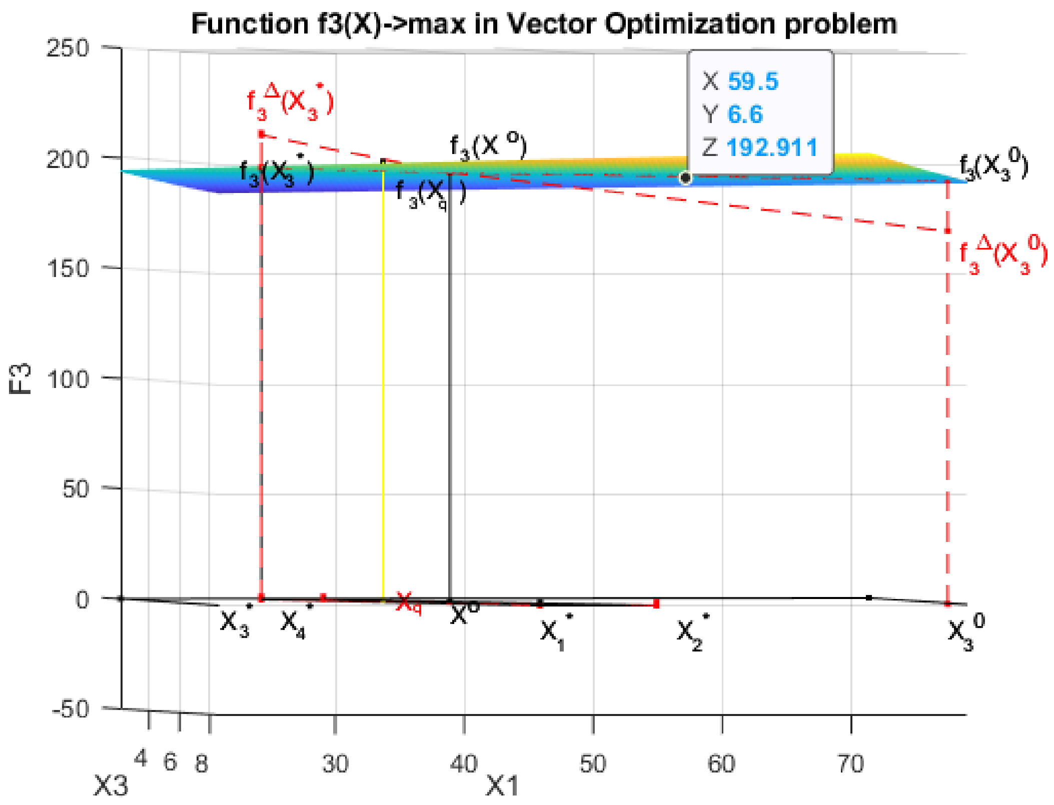

Рис. 4.8. Функция $f_3(X)$ в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_3(X)$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_3\,(X^o)$ и $f_3^\Delta\,(X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3\,(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$.

А в целом отрезки $f_3^\Delta\,(X_1^*)$ -$f_3\,(X^o)$- $f_3^\Delta\,(X_3^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_3\,(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$.

9.4 этап*. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП –* ***четвертой*** *характеристики технической системы при проектировании в физических единицах.*

Четвертая характеристика технической системы $f_4(X)$ представлена в 3.1.4:

$$max\, h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}\}, \quad (4.33)$$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\; x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^o (4.49) на рис. 4.9.

Координаты точки **максимума** $X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 4.9 обозначена как X4omax). Величина целевой функции F_4^*=FX4omax = 30.714.

Координаты точки **минимума** $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 8\}$ (на рис. 4.9 обозначена как X4omin). Величина целевой функции F_4^*=FX4omin = -73.62.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 4.9 обозначена как X4o0). Величина целевой функции $f_4\,(X^o)$ FX4o0 = 47.5.

Точки оптимума: X_4^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_4^* = f_4\,(X_4^*) = 30.714$; точка X_4^0 с величиной критерия

$f_4^0 = f_4(X_4^0) = -73.62$– на рисунке обозначены ($f_4^\Delta\,(X_4^*)$, $f_4^\Delta\,(X_4^0)$).

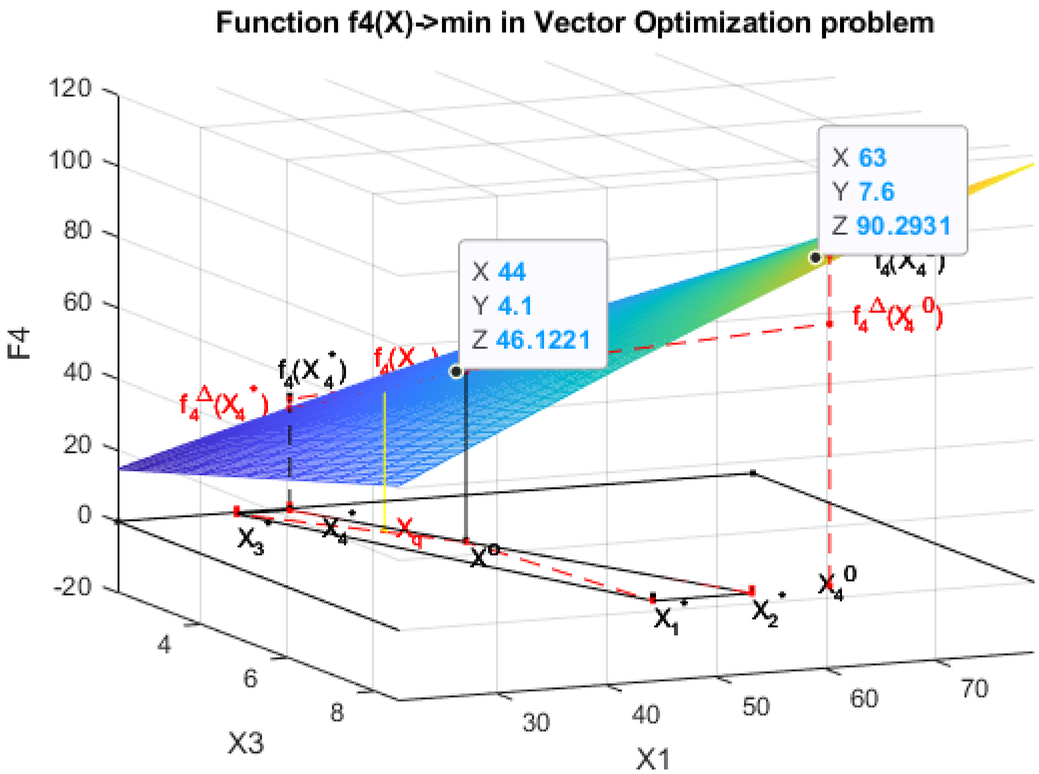

Рис. 4.9. Функция $f_4(X)$ в двухмерной системе координат $x_1\; x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_4(X)$ в системе координат $x_1\; x_2\; x_3\; x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_4\,(X^o)$ и $f_4^{\Delta}\,(X_4^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_4\,(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_4^{\Delta}\,(X_4^*)$ -$f_4\,(X^o)$- $f_4^{\Delta}\,(X_4^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2\,(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

В совокупности, представлена версия программного обеспечения выдает следующие результаты: точка оптимума – X^o;

характеристики (критерии) – $F(X^o) = \{f_1(X^o), f_2(X^o), f_3(X^o), f_4(X^o)\}$;

относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o)\}$;

максимальную относительную оценку – λ^o, такую что $\lambda^o \leq \lambda_k\,(X^o)\ \forall k \in \boldsymbol{K}$.

точку оптимума с приоритетом q–го критерия – X^q;

характеристики (критерии) – $F(X^q) = \{f_1(X^q), f_2(X^q), f_3(X^q), f_4(X^q)\}$;

относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^q), \lambda_2(X^q), \lambda_3(X^q), \lambda_4(X^q)\}$;

максимальную относительную оценку λ^{oo}, такую что $\lambda^{oo} \leq p_k^q\,\lambda_k\,(X^q), k = \overline{1, K}$.

Заключение по разделу. Проблема разработки математических методов векторной оптимизации и принятия оптимального решения на их основе в сложной структуре материала по некоторому набору экспериментальных данных и функциональных характеристик является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования. В работе разработана методология автоматизации проектирования путем: построения математической модели материала в условиях определенности и неопределенности; разработки методов решения векторной задачи и выбора оптимальных параметров материала по множеству характеристик.

5. Сравнение прикладных методов многомерной математики с методами искусственного интеллекта.

Оценим прикладные методы многомерной математики – {аксиоматика Машунина Ю.К., принципы оптимальности и методы решения векторных задач математического (выпуклого) программирования}, представленные в третьем и четвертом разделе данной работы, и сравним их с методами искусственного интеллекта. Используя теорию векторной оптимизации, мы получили для инженерной системы (в частности, технической системы, структуры материала):

точки оптимума – $X^o = (x_j^o, j = \overline{1, N}\}$;

характеристики (критерии) – $F(X^o) = \{f_k\,(X^o), k = \overline{1, K}\}$;

относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_k\,(X^o), k = \overline{1, K}\}$, которые лежат в пределах $\{0 \leq \lambda_k(X^o) \leq 1\ (100\%), k = \overline{1, K}\}$, и легко переводится в натуральные (физические) данные.

Может ли эти результаты получить искусственный интеллект, функционирующий, как правило, по принципу перебора. Ответим: «Нет». Искусственный интеллект может получить только приблизительный результат, который задал человек, но чем этот результат лучше других результатов также должен оценить человек на основе интуиции.

Таким образом, разработанная теория векторной оптимизации может являться математическим аппаратом вычислительного интеллекта искусственного интеллекта.

Заключение

Проблема разработки математических методов многомерной математики в приложении к векторной задаче оптимизации и принятия оптимального решения на их основе в сложной технической системе по некоторому набору функциональных характеристик и экспериментальных данных является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования технической системы. В работе разработана методология автоматизации проектирования путем: построения математической модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности; разработки методов решения векторной задачи.

Представлено построение математической и численной модели выбора оптимальных параметров сложной технической системы и материала сложной структуры и их реализация по множеству характеристик.

Список литературы

1. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.1 А – Г. 1977. 1152 с.

2. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.3 Коо -Од – М. 1982. 1184 с.

3. Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.

4. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964, 837 с.

5. Гермейер Ю.Б. Игры с не противоположными интересами. – М.: Наука, 1976, 326 стр.

6. Зак Ю.А. Многоэтапные процессы принятия решений в задаче векторной оптимизации // АиТ. 1976. № 6, С. 41-45.

7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе В.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматиз. 1961. 268 с.

8. Красовский Н.Н., Красовский А.Н., Третьяков В.У. Управление динамической системой. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. 195 с.

9. Прядкин Л.Л., Гончаров А.Л., Бойчук В.Г. Автоматизация управления технологическими процессами в прокатном производстве на базе микропроцессорной технике. – М.: ЦНИИТЭИ приборостроения, 1986. 136 с.

10. Ю.Н. Киселёв, С.Н. Аввакумов, М.В. Орлов. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. – 270 с. ISBN 5-89407-288-3.

11. Добрынина И.С., Карпов И.И., Черноусько Ф.Л. Метод декомпозиции в задачах управления системой твердых тел // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995.№ 2.

12. Краснощеков П.С., Морозов В.В., Федоров В. В. Последовательное агрегирование в задачах внутреннего проектирования технических систем// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. N 5.

13. Михайлевич В. С., Волкович В. П. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982, 285 с.

14. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука. 1982. 256 с.

15. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. – М.: Наука, 1986. 141 с.

16. Машунин Ю. К., Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем: монография. – Владивосток: ДВГАЭУ, 1996. 131 с.

17. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93. Yu. K. Mashunin, "Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector optimization methods," Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus).

18. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.

Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Decision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)

19. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономических системах. – М.: Логос. 2013. 448 с. (Новая университетская библиотека)

20. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3 (9): September, 2014. P. 84-96.

21. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3 (10): October, 2014. P. 224-240.

22. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.

23. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.

24. Yu. K. Mashunin, “Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data. «American Journal of Modeling and Optimization, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. Doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.

25. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.

26. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.

27. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

28. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

29. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. https://rdcu.be/bhZ8i (Scopus).

30. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization,” Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. https://doi.org/10.3390/asi2040032 (Scopus)

31. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7

32. Торгашов А.Ю., Кривошеев В.П., Машунин Ю.К., Холланд Ч.Д. Расчет и многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения // Изв. ВУЗов. Нефть и газ, 2001, №3, с. 82-86.

33. Mashunin Yu.K. Theory, Applied Mathematics and Software for Optimal Decision Making on a set of Criteria in Engineering Systems, monograph: monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow: RuScience, 2024. – 260 с. ISBN 978-5-466-05940-3.

34. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Шахнова. – М.: Радио и связь, 1981. 560 с.

35. J. Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. New York, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2010. 460 p.

36. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. New York. London. 2010. 550 p.

37. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 2009. 197 p.

38. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.

39. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.

40. Левицкий В. Л. Математическое моделирование и оптимизация магнитоэлектрических линейных индукторных двигателей постоянного тока. Диссертация канд. Техн. Наук, Новосибирск. НЭТИ. 1990. 163 с.

41. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.4 Ок-Сло. 1984. 1216 с.

42. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume Two), Cambridge Scholars Publishing. 2021, 270 p. ISBN (10): 1-5275-7413-X ISBN (13): 978-1-5275-7413-7

43. Yury Mashunin. Digital Transformation of Optimal Decision making in Economic and Engineering Systems Based and Methods of Vector Optimization, Modern Intelligent Times. 2024, 1-57 p. ISSN 2957-7942 (Online) DOI: 10.53964/mit.2023007

44. Mashunin Yu.K. Modeling, simulation, making optimal decision in engineering and production systems based on vector optimization: monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow: RuScience, 2024. – 368 с. ISBN 978-5-466-08001-8.