

Середа Татьяна Юрьевна,
кпн, учитель математики,
МАОУ «Гимназия №3», Балашиха

Михалина Анастасия Юрьевна,
МАОУ «Гимназия №3», Балашиха

ФРАКТАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Аннотация: В статье рассматриваются основные понятия и свойства фракталов, их применение в различных сферах, и роль, которую выполняют фракталы при описании множества природных явлений.

Ключевые слова: Фрактальная геометрия, фракталы Серпинского, самоподобие.

Фракталы – это объекты, которые на протяжении последних десятилетий привлекают внимание как ученых, так и любителей искусства. Они вызывают интерес сложным, красивым внешним видом, глубокими математическими принципами, на которых основаны. Фракталы способны описывать множество природных явлений: от структуры островов и гор до форм нейронных сетей человека. Их самоподобие и повышенная детализация на всех масштабах делают их уникальными и практически незаменимыми в различных областях науки, техники и искусства.

В нашем мире существуют множества объектов непонятной для нас формы. Бывает идешь зимой по улице, вокруг падают снежинки и каждый раз при разглядывании этой снежинки встает вопрос: какой она формы, почему все ее части так похожи между собой? Оказывается, снежинка является фракталом.

Фракталы – уникальные объекты, полученные хаотическими движениями. Их находят в самых разных местах окружающего нас мира. Если сказать проще, фрактал – это геометрическая фигура, определенная часть которой повторяется снова и снова, меняясь в размерах. Отсюда следует принцип самоподобия. Само слово «фрактал» (от латинского – fractus – поделенный на части) появилось благодаря ученому Бенуа Мандельброту (французский и американский математик, создатель фрактальной геометрии, Лауреат премии Вольфа по физике в 1993 г.), который в 1975 году открыл самый известный фрактал – множество Мандельброта. Определение фрактала, данное Мандельбротом, звучит так: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому».

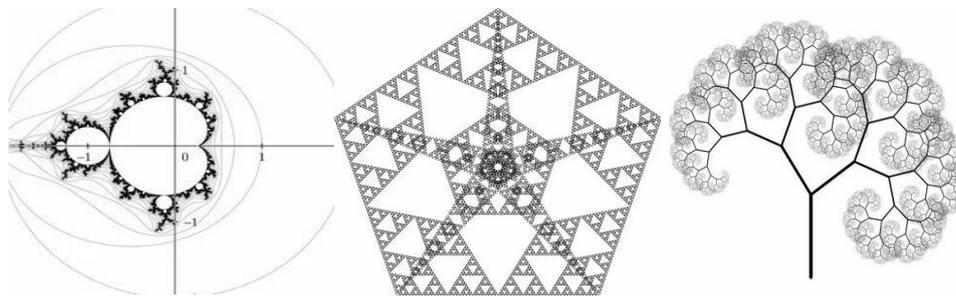


Основные виды фракталов:

Геометрические

Алгебраические

Стохастические



Фракталы все больше получают применение в различных сферах общества. Основная причина этого заключается в том, что они описывают мир иногда лучше, чем география, физика или математика. Вот несколько сфер использования фракталов:

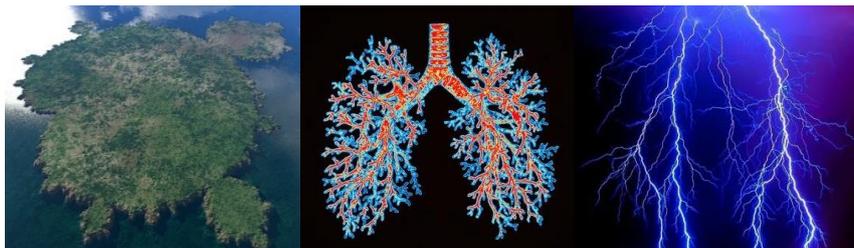
- компьютерные системы: наиболее полезным использованием фракталов в компьютерной науке является фрактальное сжатие данных.



- телекоммуникации: для передачи данных на расстояния используются антенны, имеющие фрактальные формы, что сильно уменьшает их размеры и вес, что делает более выгодную установку этих моделей. Главное применение фракталов – современная компьютерная графика.



- науки и природа: очень часто фракталы применяются в геологии и геофизике. Побережья островов и континентов имеют некоторую фрактальную размерность, зная которую можно очень точно вычислить их длины. В природе фракталы встречаются почти везде. Каждый из них удивительными, с идеальной геометрией и гармонией. Это и молния, и осьминог с фрактальным строением тела, и цветы, и кровеносная система человека.

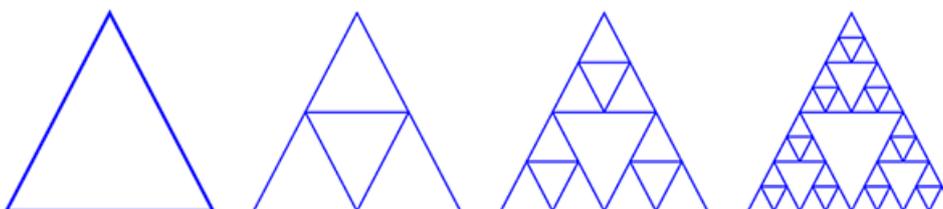


Фрактальные множества были введены и применяются с целью описания формы таких природных объектов, как облако, гора, дерево, береговая линия, система кровеносных сосудов, турбулентный водный поток и т.п. – объектов, для моделирования которых классическая геометрия не имеет описательной базы. Большой вклад в теорию фракталов вносят мощные современные компьютерные программы, рисующие листья деревьев и папоротника, искусственные горные цепи, облака и не существующие в природе планеты с вымышленными океанами и континентами.

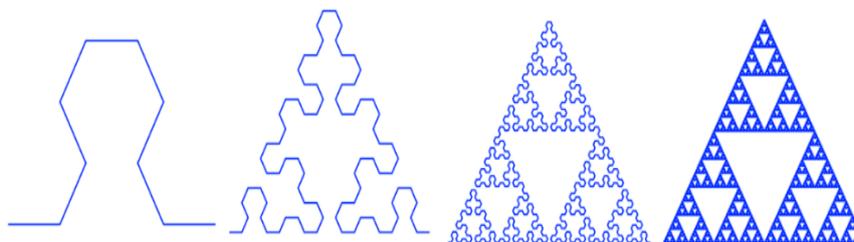
Многие из фракталов очень интересны в подробном изучении, как например треугольник Серпинского – это фрактал, который в 1915 году открыл и описал Вацлав Серпинский – известный польский математик, родившийся 14 марта 1882 года в Варшаве в семье врача, автор 724 статей и 50 книг, работавший часть жизни в Москве. Он задался вопросом: может ли фигура иметь нулевую площадь? Оказывается, может это одно из свойств треугольника. Чтобы его получить, нужно взять равносторонний треугольник с внутренней областью, провести в нём средние линии и убрать центральный из четырех образовавшихся маленьких треугольников. Дальше эти же действия нужно повторить с каждым из оставшихся треугольников. Это один трех способов построения.



Второй способ получить треугольник Серпинского – это строить его в обратном направлении: взять изначально «пустой» равносторонний треугольник, затем достроить в нём еще один равносторонний треугольник, после этого в каждом из трех угловых треугольников сделать то же самое и повторять эти действия.



Третий способ получить треугольник Серпинского похож на обычную схему построения геометрических фракталов. Здесь на каждом шагу составляющие ломаную отрезки заменяются на ломаную из трех звеньев. Откладывать эту ломаную нужно попеременно то вправо, то влево.

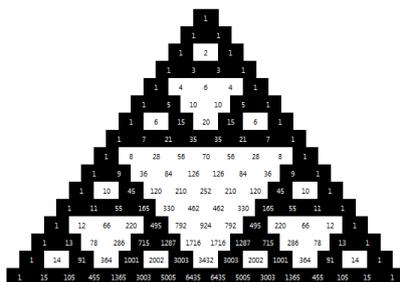


У треугольника Серпинского есть несколько необычных свойств:

- имеет нулевую площадь. То есть, если отталкиваться от построения первым способом, из треугольника убрали всю внутренность: после каждой итерации площадь того, что остается, умножается на $3/4$, то есть становится всё меньше и стремится к 0;
- треугольник Серпинского состоит из 3 одинаковых частей, коэффициент подобия $1/2$;
- треугольник Серпинского замкнут;
- важным свойством треугольника Серпинского является самоподобие: он состоит из своих копий, уменьшенных в два раза.

Интересные факты:

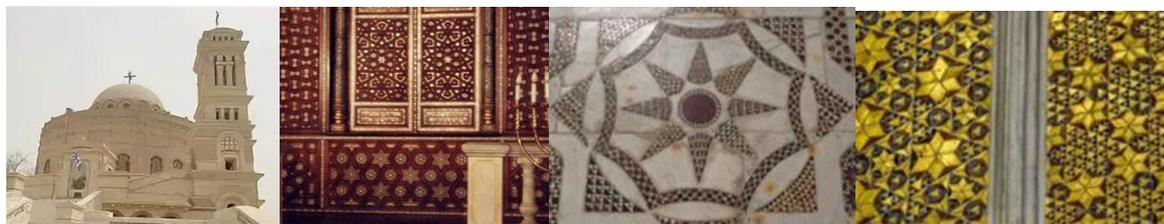
Если в треугольнике Паскаля все нечётные числа окрасить в чёрный цвет, а чётные – в белый, то образуется треугольник Серпинского.



Изображения треугольника Серпинского в 1919 году стали мотивом нескольких графических произведений Георгия Нарбута (русский и украинский художник, график и иллюстратор). Его графика отличается декоративностью и чёткостью контурного рисунка), в частности эта фигура использована им при оформлении некоторых журналов «Мистецтво» (1919–1920 гг.)



Вариации фигур на основе треугольника Серпинского использованы в интерьере синагоги Бен-Эзра, Каир, Египет.



Четыре первых итерации фрактальных треугольников Серпинского использовались в орнаментах стиля косматеско (разновидность мозаичного набора, главным образом полов, из мелких кусочков разноцветного камня и мрамора) в средневековых соборах Италии, арабских и персидских интерьерах.

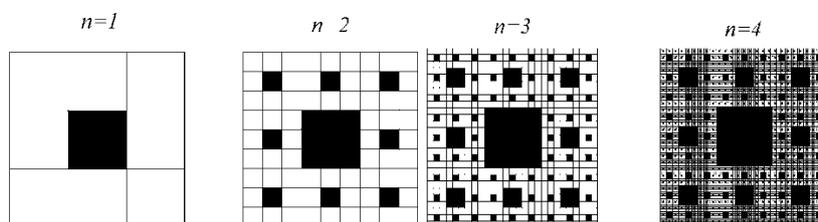


При определенных преобразованиях и вращениях треугольника, может получиться папоротник Барнсли (Майкл Филдинг Барнсли – 1946 года рождения, британский и американский математик, исследователь, работавший над фрактальным сжатием данных). Форма листа папоротника является классическим примером фрактала. Самому растению приписываются магические свойства.

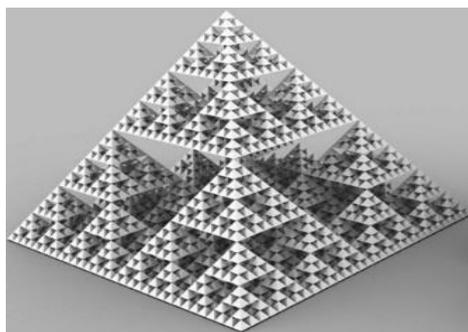


Вацлаву Серпинскому стало интересно, есть ли еще фигуры с такими же свойствами как у треугольника. Он провел исследования и выяснил, что кроме треугольника можно построить еще квадрат и пирамиду.

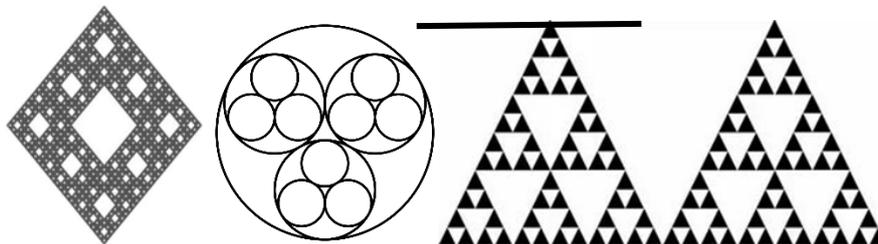
Квадрат Серпинского был описан в 1916 году. Ему удалось доказать, что любая кривая, которую можно нарисовать на плоскости без самопересечений, гомеоморфна какому-то подмножеству этого квадрата. Как и треугольник, квадрат можно получить из разных конструкций. И площадь у него так же нулевая. На рисунке изображен классический способ получить эту фигуру: деление квадрата на 9 частей и удаление центральной части. Затем то же повторяется для оставшихся 8 квадратов, и так далее. Повторяя похожие построения, будет получаться все более «дырявая» фигура. То, что остается после всех вырезаний, будет называться ковром Серпинского. Эта фигура также носит название «салфетки Серпинского».



Пирамида Серпинского – один из трехмерных аналогов треугольника Серпинского. Строится аналогично с учетом трехмерности: 5 копий начальной пирамиды составляют первую итерацию, ее 5 копий составят вторую итерацию. У фигуры нулевой объем, но при этом площадь поверхности сохраняется от итерации к итерации.



Как видим, существует множество видов разнообразных фракталов. Мы задались вопросом: может ли существовать другая фигура, кроме пирамиды, квадрата и треугольника с аналогичными свойствами? Оказывается, что может, например, фрактальный ромб и фрактальный круг.



Фрактальную трапецию построить не удалось, но она содержит в себе 2 треугольника Серпинского, при этом сама не является фракталом, потому что не соблюдается принцип самоподобия.

Фракталы служат не только в математике, но и находят применение в природе, телекоммуникациях и многом другом. Они помогают моделировать сложные природные явления, такие как формы гор, облаков и морских побережий. Новые виды фракталов открывали раньше, открывают сейчас и с каждым новым днем открывают все больше и больше.

Список литературы:

1. Фрактальная геометрия. Преподавание, задачи, алгоритмы, синергетика, эстетика, приложения. Учебное пособие: Санкт-Петербург: Лань, 2019 г, 177 стр.
2. Фракталы, случай и финансы. Мандельброт Б.Б.: Регулярная и хаотическая динамика, 2004г, 256 стр.
3. Просто фрактал. Деменок С.Л.: Страта, 2019, 274 стр.
4. Повесть о двух фракталах. Кириллов А. А.: МЦНМО, 2010 г, 180 стр.
5. Введение в теорию фракталов. Морозов А.Д.: Институт компьютерных исследований, 2004г, 139 с.

