

Березин Павел Владимирович,

Инженер связи АО «Уфанет»

РФ, р. Башкортостан, с. Иглино

Berezin Pavel Vladimirovich

Communication engineer at Ufanet JSC

Березин Алексей Владимирович,

Кадастровый инженер, индивидуальный предприниматель,

РФ, р. Башкортостан, с. Иглино

Berezin Alexey Vladimirovich,

Cadastral engineer, individual entrepreneur

Березин Сергей Викторович,

Электромонтёр «МБУ»,

РФ, р. Башкортостан, с. Иглино

Berezin Sergey Viktorovich

Electrician "MBU"

Груздов Андрей Викторович,

Главный инженер ООО «РусПромХолод»,

РФ, р. Башкортостан, с. Иглино

Gruzlov Andrey Viktorovich,

Chief Engineer of RusPromHolod LLC

МАСТЕР ФАКТОРИАЛОВ И РЯДОВ MASTER OF FACTORIALS AND ROWS

Аннотация: Мастер и его кварки в ряде случаев позволяют обойтись без чисел Эйлера, Стирлинга и Бернулли, упрощают и ускоряют алгоритмы определения различных коэффициентов. Из мастера можно получить мультиномиальные коэффициенты и некоторые обобщения факториалов, а также степенные ряды большого набора специальных и элементарных функций.

Abstract: The master and its quarks in some cases allow one to do without Euler, Stirling and Bernoulli numbers, simplify and speed up algorithms for determining various coefficients. From the master, one can obtain multinomial coefficients and some generalizations of factorials, as well as power series of a large set of special and elementary functions.

Ключевые слова: управляемая прогрессия; естественные функции; слияние функций; кварк факториала; мастер факториалов; мастер рядов.

Key words: guided progression; natural functions; function merge; factorial quark; master of factorials; row master.

Существуют такие последовательности чисел, в которых у каждого члена, начиная со второго, на один множитель больше, чем у предыдущего.

$$u_1 = 1 \quad (1)$$

$$u_2 = 1 \cdot p_1 \quad (2)$$

$$u_3 = 1 \cdot p_1 p_2 \quad (3)$$

В одной из таких последовательностей каждый множитель является простой разницей номера члена « t » и номера множителя « j » ($t - j$). Количество таких множителей должно быть меньше номера члена, иначе произведение будет равно нулю.



$$u_t = \prod_{j=1}^{t-1} (t-j) \quad (4)$$

$$\text{function } u(t) \{ \text{for}(u = 1, j = 1; j < t; j = j + 1) u = u \cdot (t-j); \text{return } u \} \quad (5)$$

Так как количество таких множителей меньше номера члена, такие множители могут быть только у членов с номером 2 и более. Члены, у которых нет таких множителей, члены с номером 1 и менее, равны единице.

$$u_1 = 1 = \Gamma(1) \quad (6)$$

$$u_2 = (2-1) = \Gamma(2) \quad (7)$$

$$u_3 = (3-1)(3-2) = \Gamma(3) \quad (8)$$

$$u_4 = (4-1)(4-2)(4-3) = \Gamma(4) \quad (9)$$

В такой последовательности, каждый член равен гамма-функции от номера этого члена, то есть от положительного целого числа $u_t = \Gamma(t), t > 0$. Гамма-функция от отрицательных целых вещественных чисел и от нуля не определена.

Если добавить к каждой разнице число 1, то получится другая последовательность, в которой каждый член равен факториалу от его номера $u_t = t!, t \geq 0$. Факториал не определён только от отрицательных целых вещественных чисел, поэтому нулевой член в этой последовательности существует. Но множители здесь появляются также, только со второго члена.

$$u_0 = 1 = 0! \quad (10)$$

$$u_1 = 1 = 1! \quad (11)$$

$$u_2 = (1+2-1) = 2! \quad (12)$$

$$u_3 = (1+3-1)(1+3-2) = 3! \quad (13)$$

$$u_4 = (1+4-1)(1+4-2)(1+4-3) = 4! \quad (14)$$

Вместо единицы добавим к каждой разнице константу m , чтобы с её помощью выбирать член нужной последовательности.

$$u_t = \prod_{j=1}^{t-1} (m+t-j) \quad (15)$$

Значение **вычитаемого** разницы $(t-j)$ величины «j» увеличивается в каждом следующем **множителе** данного члена на единицу. Чтобы увеличивать или уменьшать влияние **номера множителя** на разницу, умножим в этой разнице величину j на коэффициент « r » $(t-rj)$. При $r=0$ у последовательности множителей одного члена не будет никакой прогрессии, и всё произведение будет просто некоторым числом в степени $t-1$.

$$u_t = \prod_{j=1}^{t-1} (m+t-0 \cdot j) = (m+t)^{t-1} \quad (16)$$

Значение **уменьшаемого** разницы $(t-rj)$, величины « t » увеличивается в каждом следующем **члене** на единицу. Чтобы увеличивать или уменьшать влияние **номера члена** на разницу, умножим в этой разнице величину t на коэффициент « s » $(st-rj)$. При $s=0$ и при $s=r$, все члены последовательности, начиная с третьего будут наследовать множители от предыдущих членов.

$$u_t = \prod_{j=1}^{t-1} (m-rj) \quad (17)$$

$$u_{t+1} = u_t(m-rt) \quad (18)$$

Выражение $(m+st-rj)$ называется элемент мастера факториалов. Произведение элементов мастера $\prod_{j=1}^{t-1} (m+st-rj)$ называется числом мастера.

Константы m, s, r – параметры мастера, могут обозначаться позиционно или перечисляться в строчку.

$$u_{m,s,r,t} = m!_r^s t = \text{master!}(m; s; r; t) = \prod_{j=1}^{t-1} (m+st-rj) \quad (19)$$

$$\text{function } u(m, s, r, t) \{ \text{for}(u = 1, j = 1; j < t; j = j + 1) u = u \cdot (m+st-rj); \text{return } u \} \quad (20)$$



Если все константы выражены одной или двумя буквами или цифрами, то лучше использовать знак мастера $m_r!^s$. Для длинных выражений можно использовать строчную форму записи $master!(m; s; r; t)$.

Свойства и закономерности последовательности чисел мастера зависят от значений константы m и двух коэффициентов разницы s и r ($m+st-rj$), то есть от всех параметров мастера $m_r!^s$. Если вместо конкретных значений в параметрах стоят буквы или условия, например ($\neq 0$), значит речь идёт не об одной, а о множестве последовательностей, которые имеют некоторые общие для них свойства.

В математике широко используются различные обобщения факториалов. Мастер факториалов тоже является обобщением факториалов, но мастер объединяет больше предметов в единый класс. Из мастера могут быть получены другие обобщения факториалов.

Чтобы получить **гамма-функцию** от целого числа $t > 0$, нужно взять член с номером t , последовательности $0; 1; 1$. Другими словами, нужно в параметры мастера подать значения $0; 1; 1$, а в его независимый аргумент подать число t . В позиционированной форме записи мастера параметры перечисляются слева направо, сверху вниз.

$$\Gamma(t) = {}^0_1!^1_t = \prod_{j=1}^{t-1} (0 + 1t - 1j), \quad t \in N^* \quad (21)$$

Чтобы получить **факториал** от любого целого положительного числа t , нужно в параметры мастера подать значения $1; 1; 1$.

$$t! = {}^1_1!^1_t = \prod_{j=1}^{t-1} (1 + 1t - 1j), \quad t \in N \quad (22)$$

Чтобы получить **r-кратный факториал** от числа n , этот независимый аргумент надо вначале преобразовать, так как количество множителей у кратных факториалов совсем другое. Для определения количества множителей используется округление результата деления целых чисел в большую сторону $t = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$. В параметры мастера надо подать значения $n - rt; r; r$.

$$n!_{(r)} = {}^{n-rt}_r!^r_{r \cdot t+1}, \quad t = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil \quad (23)$$

Например, чтобы получить **3-кратный факториал** числа 5, нужно вначале найти

$$t = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil = \left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil = 2, \quad \text{затем } m = n - rt = 5 - 3 \cdot 2 = -1. \quad (24)$$

$$5!!! = {}^{-1}_3!^3_3 = \prod_{j=1}^2 (-1 + 9 - 3j) = (-1 + 9 - 3 \cdot 1)(-1 + 9 - 3 \cdot 2) = 5 \cdot 2 = 10 \quad (25)$$

$$6!!! = {}^0_3!^3_3 = \prod_{j=1}^2 (0 + 9 - 3j) = (0 + 9 - 3 \cdot 1)(0 + 9 - 3 \cdot 2) = 6 \cdot 3 = 18 \quad (26)$$

$$7!!! = {}^{-2}_3!^3_4 = \prod_{j=1}^3 (-2 + 12 - 3j) = (-2 + 12 - 3 \cdot 1)(-2 + 12 - 3 \cdot 2)(-2 + 12 - 3 \cdot 3) = 7 \cdot 4 \cdot 1 = 28 \quad (27)$$

Как видим, для 3-кратного факториала от разных чисел мы используем 3 разные последовательности. Так как в одной последовательности разные члены не могут иметь одинаковое количество прогрессирующих множителей по определению.

Если второй и третий (слэш) параметры мастера равны $m_r!^r$, можно во второй параметр подать 0, а третий параметр подавать с противоположным знаком ${}^{m_1}_r!^0$. Прогрессирующие множители будут расположены в обратном порядке, но произведение останется таким же. Это неизбежное следствие главного фактора прогресса множителей мастера – разницы номеров. Такие последовательности связаны следующим тождеством.

$${}^{m_1}_r!^0 = {}^{m_1}_r!^r \quad (28)$$

$${}^{-2}_3!^3_4 = 7 \cdot 4 \cdot 1 = 28 \quad (29)$$

$${}^{-2}_3!^0_4 = 1 \cdot 4 \cdot 7 = 28 \quad (30)$$



Если нужен кратный факториал со знаком, то есть, когда все кратные факториалы с нечётным количеством множителей имеют отрицательный знак, нужно параметры подавать с противоположным знаком.

$${}_{3/4}^2!_0 = \prod_{j=1}^3 (2 + 0 - 3j) = (-1) \cdot (-4) \cdot (-7) = -28 \quad (31)$$

Мастер может давать и **неполные факториалы**. Чтобы получить **убывающий факториал** $(n)_k$, нужно в параметры мастера подать значения $n+1;0;1$. А в независимый аргумент подать значение $k+1$.

$${}_{1 \cdot k+1}^{n+1!}_0 = \prod_{j=1}^k ((n+1) + 0 - 1j) = (n)_k \quad (32)$$

$$(7)_2 = {}_{1/3}^8!_0 = 7 \cdot 6 = 42 \quad (33)$$

Через эти же параметры можно получать **биномиальные коэффициенты**

$$\binom{n}{k} = \frac{{}_{1 \cdot k+1}^{n+1!}_0}{k!} \quad (34)$$

Чтобы получить **возрастающий факториал** - функцию Похгаммера $n^{(k)}$, нужно в параметры мастера подать значения $n-1;0;-1$ или $n-1;1;1$. А в независимый аргумент подать значение $k+1$.

$${}_{-1 \cdot k+1}^{n-1!}_0 = \prod_{j=1}^k ((n-1) + 0 + 1j) = n^{(k)} \quad (35)$$

$$7^{(2)} = {}_{-1/3}^6!_0 = 7 \cdot 8 = 56 \quad (36)$$

$${}_{1 \cdot k+1}^{n-1!}_1 = \prod_{j=1}^k ((n-1) + 1(k+1) - 1j) = n^{(k)} \quad (37)$$

$$7^{(2)} = {}_{1/3}^6!_1 = 8 \cdot 7 = 56 \quad (38)$$

Формулы произведений последовательности множителей громоздкие. Удобнее использовать знак мастера, на котором обозначены четыре выражения. Чтобы определить формулу множителей из знака мастера, используется следующий алгоритм.

$$\frac{m!_s}{r!_t} \quad (39)$$

1. Берём левое верхнее выражение (m) – первый параметр, балласт разницы. Далее двигаемся по часовой стрелке.

2. Прибавляем к нему произведение правых выражений (st).

3. Отнимаем от этой суммы произведение левого нижнего выражения и номера множителя (rj).

4. Нумерация множителей начинается от 1. Количество множителей на 1 меньше значения правого нижнего выражения, если $t=4$, j может принимать только следующие значения: **1, 2 и 3**.

$${}_{1 \cdot 4}^8!_1 = (8 + 1 \cdot 4 - 1 \cdot \mathbf{1})(8 + 1 \cdot 4 - 1 \cdot \mathbf{2})(8 + 1 \cdot 4 - 1 \cdot \mathbf{3}) \quad (40)$$

В предыдущих примерах мы рассмотрели числа мастера второго рода, у которых второй (верхний правый) параметр мастера равен нулю или третьему (нижнему левому) параметру мастера. Ниже будет показано, как числа таких последовательностей используются членами степенных рядов натурального логарифма, арифметических корней, геометрических рядов, биномиального разложения, тригонометрических и гиперболических арктангенсов и арккотангенсов.

Числа мастера первого рода, у которых третий параметр характеристики равен нулю, используется в степенных рядах функции Ламберта и некоторых её обобщений. Если третий параметр мастера равен нулю, у его множителей нет прогрессии. Всё произведение будет просто степенью некоторого числа.

$${}_{0/5}^2!_1 = 7^4, {}_{0/3}^0!_8 = 24^2, {}_{0/3}^1!_8 = 25^2 \quad (41)$$

$$\frac{m!_s}{0!_t} = (m + st)^{t-1} \quad (42)$$

Числа мастера третьего рода, у которых второй и третий (слэш) параметры мастера не равны друг другу и не равны нулю, используются в степенных рядах тригонометрических и гиперболических арксинусов и арккосинусов, функций resroot и recsilog, и в степенных рядах



некоторых композиций радикалов. Частным случаем функции рексиклог является гиперболический арксинус. Последовательность чисел, которую использует основной степенной ряд первой ветви его корней, состоит из чисел $\frac{0!1}{2!t}$

$$\frac{0!1}{2!2} = (2 - 2) = 0 \quad (43)$$

$$\frac{0!1}{2!3} = (3 - 2)(3 - 4) = -1 \cdot 1 = -(1!!)^2 \quad (45)$$

$$\frac{0!1}{2!4} = (4 - 2)(4 - 4)(4 - 6) = 0 \quad (46)$$

$$\frac{0!1}{2!5} = (5 - 2)(5 - 4)(5 - 6)(5 - 8) = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = (3!!)^2 \quad (47)$$

$$\frac{0!1}{2!7} = (7 - 2)(7 - 4)(7 - 6)(7 - 8)(7 - 10)(7 - 12) = -1^2 3^2 5^2 = -(5!!)^2 \quad (48)$$

Это последовательность со знаком чередующихся нулей и квадратов двойных факториалов.

Есть ещё числа мастера нулевого рода, когда оба слэш параметра мастера равны нулю $\frac{1!0}{0!t}$. Они используются рядами экспоненты, синусов и косинусов.

Обычный факториал от целого неотрицательного числа связан с производной от степенной функции следующим тождеством:

$$(x^t)^{(t)} = t! = \frac{1!1}{1!t} \quad (49)$$

Из мастера могут быть получены не только отдельные члены последовательностей, но и бесконечные степенные ряды многих функций. Для этого вместо восклицательного знака (!) в режим мастера нужно поставить двоеточие (:), а вместо номера члена последовательности (t) в независимый аргумент мастера нужно подавать независимый аргумент функции (x). Любой член, любого ряда мастера – это произведение «независимой» дроби $\frac{x^t}{t!}$ и числа мастера $\frac{m!s}{r!t}$

$$w_t(m; s; r; x) = \frac{x^t}{t!} \frac{m!s}{r!t} = \frac{x^t}{t!} \prod_{j=1}^{j<t} (m + st - rj) \quad (50)$$

Как мы уже рассматривали ранее, множители мастера факториалов могут появляться только когда $t > 1$. $\frac{m!s}{r!0} = 1$, $\frac{m!s}{r!1} = 1$. Значит

$$w_0 = 1$$

$$w_1 = x$$

Если первый параметр мастера (балласт разницы) равен 0, от суммы всех членов ряда нужно отнять 1. Балласт m в рядах мастера будет иметь только два значения, 0 или 1. Поэтому можно это условие в сумме членов написать так $w_0 = m$.

$$\frac{m!s}{r!x} = \text{master}:(m; s; r; x) = m + \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{x^t}{t!} \cdot \frac{m!s}{r!t} \right) \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{m!s}{r!x} = m + x + \frac{x^2}{2} (m + 2s - r) + \frac{x^3}{3!} (m + 3s - r)(m + 3s - 2r) \\ + \frac{x^4}{4!} (m + 4s - r)(m + 4s - 2r)(m + 4s - 3r) + \dots \end{aligned} \quad (52)$$

Выше было показано, как получать биномиальные коэффициенты с помощью целочисленных параметров мастера. Их можно получать и с помощью дробных параметров. Обнулим параметр «s» и попробуем подавать разные значения в параметр «r». Начнём с таких параметров $\frac{1,0}{1/2}$.

$$\frac{1,0}{1/2 \cdot x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{x^3}{3!} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{2}{2}\right) + \frac{x^4}{4!} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{2}{2}\right) \left(1 - \frac{3}{2}\right) + \dots \quad (53)$$

Третий и следующие члены (нумерация от 0) имеют множитель $\left(1 - \frac{2}{2}\right) = 0$, значит, все члены степенного ряда, начиная с номера 3, равны нулю. Другими словами, этот ряд имеет 3 члена, которые являются биномиальным разложением.

$$\frac{1,0}{1/2 \cdot x} = 1 + x + \frac{x^2}{4} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \quad (54)$$

Подадим в третий параметр значение 1/3



$${}_{1/3 \cdot x}^{1,0} = 1 + x + \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{x^3}{3!} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{x^4}{4!} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{3}{3}\right) + \dots \quad (55)$$

Здесь все члены, начиная с номера 4 равны нулю, так как у всех у них будет множитель $\left(1 - \frac{3}{3}\right) = 0$.

$${}_{1/3 \cdot x}^{1,0} = 1 + x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27} = \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 \quad (56)$$

Можно подставлять любые значения в третий параметр, кроме нуля. При параметрах мастера ${}_{\neq 0 \cdot}^{1,0}$, всегда будет одно и тоже тождество.

$${}_{1/r \cdot x}^{1,0} = (1 + x/r)^r \quad (57)$$

Мы нашли такие параметры, при которых мастер рядов создаёт биномиальное разложение, геометрический ряд и степенной ряд арифметического корня.

$${}_{r \cdot x/r}^{1,0} = (1 + x)^{1/r} = \sqrt[r]{1 + x} \quad (58)$$

В третий параметр (r) мастера мы подаём степень арифметического корня. Это может быть любое число кроме нуля. $r \in C^*, r \neq 0$. Корень нулевой степени не определён. И на ноль делить нельзя. Если всё-таки подать в третий параметр мастера 0, то при тех же значениях остальных параметров, получится степенной ряд уже другой функции – экспоненты.

$${}_{0 \cdot x}^{1,0} = e^x \quad (59)$$

Такое принципиальное изменение рядов происходит при обнулении любого параметра. Их всего три, поэтому получается 8 разных уравнений мастера 2^3 . Если первый параметр (балласт разницы) $m=0$, то из мастера можно получить степенные ряды других функций.

$${}_{1 \cdot x}^{0,0} = \ln(1 + x) \quad (60)$$

$${}_{0 \cdot x}^{0,-1} = \text{Lambert}W(x) \quad (61)$$

$${}_{2 \cdot x}^{0,1} = \text{arcsinh}(x) \quad (62)$$

Степенные ряды синусов, косинусов и арктангенсов используют только чётные или только нечётные члены рядов мастера.

$$\overline{{}_{0 \cdot x}^{1,0}} = \sinh(x), \overline{{}_{0 \cdot x}^{1,0}} = \cos(x), \overline{{}_{1 \cdot x}^{0,0}} = \text{arctanh}(x) \quad (63)$$

Степенные ряды некоторых степенных композиций также используют только члены определённой периодичности рядов мастера.

$$\overline{{}_{2 \cdot x}^{1,1}} = \sqrt[2]{x^2 + 1} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} - \dots \quad (64)$$

$$\overline{{}_{2 \cdot x}^{1,1}} = x \quad (65)$$

$$y = (1 + 2xy^1)^{\frac{1}{2}} = \overline{{}_{2 \cdot x}^{1,1}} = \sqrt{x^2 + 1} + x \quad (66)$$

Степенные ряды композиций радикалов степени 3 и выше имеют более редкую периодичность. Указывать, с какого члена начинается выборка, и с какой периодичностью она производится можно после независимого аргумента.

$${}_{3 \cdot x; 0,3}^{1,1} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt[2]{\frac{1}{4} - x^3}} = 1 - \frac{x^3}{3} - \frac{4x^6}{9} - \frac{77x^9}{81} - \dots \quad (67)$$

$$\overline{{}_{3 \cdot x; 1,3}^{1,1}} = \frac{x}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt[2]{\frac{1}{4} - x^3}}} = x + \frac{x^4}{3} + \frac{5x^7}{9} + \frac{104x^{10}}{81} + \dots \quad (68)$$

$$\overline{{}_{3 \cdot x; 2,3}^{1,1}} = 0 \quad (69)$$

$$y = (1 + 3xy^1)^{\frac{1}{3}} = \overline{{}_{3 \cdot x}^{1,1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt[2]{\frac{1}{4} - x^3}} + \frac{x}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt[2]{\frac{1}{4} - x^3}}} \quad (70)$$

resroot степеней 3;2 содержит в себе степенные ряды трёх разных слагаемых.



$${}_{3;x;0,3}^{1,2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + x^3 + \sqrt{\frac{1}{4} + x^3}} = 1 + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^6}{9} + \frac{130x^9}{81} + \dots \quad (71)$$

$${}_{3;x;1,3}^{1,2} = x \quad (72)$$

$${}_{3;x;2,3}^{1,2} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x^3 + \sqrt{\frac{1}{4} + x^3}}} = x^2 - \frac{2x^5}{3} + \frac{11x^8}{9} - \frac{238x^{11}}{81} + \dots \quad (73)$$

$$y = (1 + 3xy^2)^{\frac{1}{3}} = {}_{3;x}^{1,2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + x^3 + \sqrt{\frac{1}{4} + x^3}} + x + \frac{x^2}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x^3 + \sqrt{\frac{1}{4} + x^3}}} \quad (74)$$

Несколько мастеров могут совершать слияние. Благодаря слиянию мастеров можно получать корни различных многочленов с любым количеством членов и, соответственно, таких уравнений с рекурсией неизвестной, как $y = x \frac{(e^{sy} + e^{-sy})}{2} = \frac{x}{2} \cdot \cosh(sy)$. Операция слияние обозначается символом «@».

$${}_{r;t_1}^{m_1 s_1} @ {}_{r;t_2}^{m_2 s_2} = {}_{r;t_1, t_2}^{m_1 s_1, s_2} \quad (75)$$

$$(\prod_{j=1}^{j < t_1} (m + s_1 t_1 - rj)) @ (\prod_{j=1}^{j < t_2} (m + s_2 t_2 - rj)) = \prod_{j=1}^{j < t_1 + t_2} (m + s_1 t_1 + s_2 t_2 - rj) \quad (76)$$

Здесь количество множителей должно быть меньше суммы номеров членов, поэтому слияние двух первых членов разных последовательностей будет иметь элемент мастера. Так как сумма их номеров больше 1, начального значения индекса произведения j .

$${}_{r;1,1}^{m_1 s_1, s_2} = (m + s_1 + s_2 - r) \quad (77)$$

Слияние рядов мастера приводит к тому, что новый - единый ряд будет использовать несколько независимых аргументов. Мастер рядов с одним независимым аргументом является обобщением гипергеометрической функции.

$${}_{r;x}^{m,s} = master: (m; s; r; x) = m + x + \sum_{t=2}^{\infty} \left(\frac{x^t}{t!} \cdot {}_{r;t}^{m,s} \right) \quad (78)$$

Существует 8 уравнений, приведённых к образу мастера, то есть к такому виду, когда они решаются одним мастером, без преобразований параметров и независимого аргумента.

Таблица 1

${}_{r;y}^{m,s} = {}_{r;x}^{m,s}$				
$y = x$	$y = xe^{sy}$	$y = \frac{\ln(1 + rx)}{r}$	$y = \frac{\ln(1 + rxe^{sy})}{r}$	$m = 0$
$y = e^x$	$y = e^{xy^s}$	$y = (1 + rx)^{\frac{1}{r}}$	$y = (1 + rxy^s)^{\frac{1}{r}}$	$m = 1$
${}_{0;y}^{m,0}$	${}_{0;y}^{m \neq 0}$	${}_{\neq 0;y}^{m,0}$	${}_{\neq 0;y}^{m \neq 0}$	

$$y = {}_{r;x}^{m,s} = m + x + \frac{x^2}{2} (m + 2s - r) + \frac{x^3}{3!} (m + 3s - r)(m + 3s - 2r) + \frac{x^4}{4!} (m + 4s - r)(m + 4s - 2r)(m + 4s - 3r) + \dots \quad (79)$$

Достаточно запомнить всего два уравнения $y = e^{xy^s}$ и $y = (1 + rxy^s)^{\frac{1}{r}}$, остальные всегда можно получить из них. Чтобы получить уравнения, которые находятся слева от них в таблице 1, нужно величине s придать значение 0. Чтобы из этих четырёх уравнений получить уравнения, которые в таблице 1 расположены выше их, нужно заменить величины «у» на «e^y», затем взять натуральный логарифм обеих частей уравнения. Из двух уравнений можно получить любое уравнение, которое решается одним мастером. Таких уравнений всего восемь.



Но функций, которые можно получить из одного мастера, гораздо больше, так как различными преобразованиями эти уравнения можно приводить к другим уравнениям. Например, уравнение ${}_2y_x^1$

$$y = \frac{\ln(1+2xe^{1y})}{2} \quad (80)$$

$$e^y = (1 + 2xe^y)^{\frac{1}{2}} \quad (81)$$

$$e^{2y} = 1 + 2xe^y \quad (82)$$

можно разделить на e^y ,

$$e^y - e^{-y} = 2x \quad (83)$$

$$\sinh(y) = x \quad (84)$$

$$y = \frac{\ln(1+2xe^{1y})}{2} = \operatorname{arcsinh}(x) = {}_{2 \cdot x}^{0 \cdot 1} \quad (85)$$

Слэш параметры мастера не равны нулю и друг другу, балласта нет, значит ареасинус – это гипоним функции рексилон (логарифм с рекурсией). У функции рексилон свои правила выбора корней. Согласно правилу выбора корней функции *recsilog*, первая ветвь корней ареасинуса определяется по формулам

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \operatorname{Ln}(1) + {}_{2 \cdot x}^{0 \cdot 1}, |x| < 1 \quad (86)$$

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \operatorname{Ln}(2x) + {}_{1 \cdot \frac{1}{4}x^2}^{0 \cdot -1}, |x| \geq 1 \quad (87)$$

Вторая ветвь корней определяется по формулам

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \operatorname{Ln}(-1) + {}_{2 \cdot x}^{0 \cdot 1}, |x| < 1 \quad (88)$$

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \operatorname{Ln}(-1/2x) + {}_{1 \cdot -\frac{1}{4}x^2}^{0 \cdot 2}, |x| \geq 1 \quad (89)$$

Выбор корня ветви осуществляется выбором корня комплексного логарифма.

Такие уравнения мастера, в которых неизвестная «у» находится и в левой, и в правой частях уравнения ${}_r y^{m \neq 0 \& \neq r}$, называются уравнениями с рекурсией измеряемой величины. Степенные ряды корней этих уравнений не используют никакой рекурсии, это обычные ряды Тейлора. Но каждый из этих рядов имеет не бесконечный радиус сходимости, и любой корень таких уравнений имеет два разных ряда – основной (ряд Тейлора) и вспомогательный. Всегда можно выбрать такой ряд, который сходится для данного независимого аргумента функции. Для разных корней одного уравнения могут быть разные вспомогательные ряды. Вспомогательные ряды некоторых функций, например ареасинуса, называются асимптотическими разложениями. Но не все известные сегодня асимптотические разложения являются вспомогательными рядами. Вспомогательный ряд должен наследовать от основного ряда способность слияния, это обеспечивается правилами выбора корня уравнения. Эти правила у каждого уравнения свои, но все они подчиняются общей системе.

Параметры мастера

Номер члена ряда и номер множителя (элемента мастера) этого члена образуют разницу номеров, но в этой разнице они участвуют с коэффициентами.

$${}_r!_t^s = \prod_{j=1}^{t-1} (m + st - rj) \quad (90)$$

Третий параметр мастера – коэффициент вычитаемого, в таблице 1 обозначается буквой «г». Если $g = 0$, ряд ${}_0 \cdot x^s$ сходится, когда $|esx| < 1$. Если $g \neq 0$, ряд ${}_r \cdot x^s$ сходится, когда $|r - s|^{r-s} |s|^{s-1} |x|^{r-1} < 1$.

В формулах с мастером необязательно обозначать радиус сходимости в качестве условия тождества, так как в определении третьего параметра мастера это уже обозначено.

Если параметры называть только их номером в списке, понимать характер ряда будет затруднительно. Каждый параметр мастера имеет такое имя, которое позволяет лучше понимать некоторые свойства последовательностей чисел мастера. Третий параметр мастера называется радиусом прогрессии множителей. Если у прогрессии множителей нет радиуса,



то есть третий параметр равен нулю, то у множителей нет прогрессии внутри одного произведения и всё произведение является просто степенью некоторого числа.

Если радиус прогрессии – это отрицательное вещественное число, у множителей будет прогрессия, но в противоположную сторону. Если радиус прогрессии – комплексное число, направление прогрессии может быть любым от минус пи до пи.

Этот же параметр «г» влияет и на формулу радиуса сходимости ряда. Их всего две. $|esx| < 1$ и $|r - s|^{r-s} |s|^{s|s|} |x|^{r|s|} < 1$

Первый параметр мастера – балласт разницы, в таблице 1 обозначается буквой «m» (масса балласта). У мастера рядов балласт может иметь всего 2 значения, 0 или 1. Между двумя типами рядов (с балластом и без) существует экспоненциальное параметрическое тождество

$$\frac{1 \cdot s}{r \cdot x} = e^{\frac{0 \cdot s}{r \cdot x}} \quad (91)$$

У лёгкого (без балласта, m=0) ряда есть пропорциональное параметрическое тождество

$$c \cdot \frac{0 \cdot s}{r \cdot x} = r \cdot \frac{0 \cdot s}{c \cdot x} \quad (92)$$

Тяжёлые (с балластом, m=1) ряды имеют степенное параметрическое тождество

$$\left(\frac{1 \cdot s}{r \cdot x}\right)^c = r \cdot \frac{1 \cdot s}{c \cdot x} \quad (93)$$

Второй параметр мастера - коэффициент уменьшаемого, в таблице 1 обозначается буквой «s» и называется синхронизация прогрессии членов. Если s=0, то множители членов ряда синхронизированы, и следующий член наследует все множители предыдущего члена.

Независимый аргумент мастера в таблице 1 обозначается буквой «x». Если уравнение содержит несколько независимых аргументов мастера $\frac{1}{r} y_{x_1, x_2, \dots}^{s_1, s_2, \dots}$, то используется «многоаргументный» степенной ряд мастера.

$$y = (1 + rx_1 y^{s_1} + rx_2 y^{s_2} + \dots)^{\frac{1}{r}} = \frac{1 \cdot s_1, s_2, \dots}{r \cdot x_1, x_2, \dots} \quad (94)$$

Чтобы упростить понимание «многоаргументного» ряда вводится такое определение операции, как «слияние» или «почтовое умножение». Эта операция обозначается знаком «@».

Слияние выполняется раньше всех других операций и одновременно над всеми рядами, между которыми стоит этот знак.

$$\frac{m \cdot s_1}{r \cdot x_1} @ \frac{m \cdot s_2}{r \cdot x_2} @ \dots = \frac{m \cdot s_1, s_2, \dots}{r \cdot x_1, x_2, \dots} \quad (95)$$

При слиянии рядов

$$\left(1 + \sum_{t_1=1}^{\infty} \frac{x_1^{t_1}}{t_1!} \frac{m_1 s_1}{r \cdot t_1}\right) @ \left(1 + \sum_{t_2=1}^{\infty} \frac{x_2^{t_2}}{t_2!} \frac{m_1 s_2}{r \cdot t_2}\right) @ \left(1 + \sum_{t_3=1}^{\infty} \frac{x_3^{t_3}}{t_3!} \frac{m_1 s_3}{r \cdot t_3}\right) \quad (96)$$

происходит слияние каждого члена одного ряда с каждым членом каждого другого ряда.

$$\left(\frac{x_1^{t_1}}{t_1!} \frac{m_1 s_1}{r \cdot t_1}\right) @ \left(\frac{x_2^{t_2}}{t_2!} \frac{m_1 s_2}{r \cdot t_2}\right) @ \left(\frac{x_3^{t_3}}{t_3!} \frac{m_1 s_3}{r \cdot t_3}\right) = \frac{x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3}}{t_1! t_2! t_3!} \frac{m_1 s_1, s_2, s_3}{r \cdot t_1, t_2, t_3} \quad (97)$$

Независимые дроби при слиянии просто умножаются. Все мастера одного слияния превращаются в один монолит, который нельзя получить из исходных мастеров обычным умножением.

$$\frac{m_1 s_1, s_2, s_3}{r \cdot t_1, t_2, t_3} = \prod_{j=1}^{t_1+t_2+t_3-1} (m + s_1 t_1 + s_2 t_2 + s_3 t_3 - rj) \quad (98)$$

Слияние лёгких рядов при m=0, производится по тем же правилам. В это время нулевой член степенного ряда – единица у них присутствует $w_0 = 1$. Когда слияние будет завершено, от монолита нужно будет отнять единицу.

$$y = (1 + x_1/2 + x_2/2)^2 = \frac{1 \cdot 0}{1/2 \cdot x_1, x_2} = \left(1 + \frac{x_1^1}{1!} \frac{1/2 \cdot 0}{1/2 \cdot 1} + \frac{x_2^1}{2!} \frac{1/2 \cdot 0}{1/2 \cdot 2}\right) @ \left(1 + \frac{x_2^1}{1!} \frac{1/2 \cdot 0}{1/2 \cdot 1} + \frac{x_2^2}{2!} \frac{1/2 \cdot 0}{1/2 \cdot 2}\right) = 1 + \frac{x_1^1}{1!} \frac{1/2 \cdot 0}{1/2 \cdot 1} + \frac{x_1^2}{2!} \frac{1/2 \cdot 0}{1/2 \cdot 2} + \frac{x_2^1}{1!} \frac{1/2 \cdot 0}{1/2 \cdot 1} + \frac{x_2^1 x_1^1}{1! 1!} \frac{1/2 \cdot 0, 0}{1/2 \cdot 1, 1} + \frac{x_2^2}{2!} \frac{1/2 \cdot 0}{1/2 \cdot 2} \quad (99)$$

Когда все параметры в верхнем правом углу равны нулю, нижние правые выражения, разделённые запятой, у факториала мастера можно просто сложить $\frac{1 \cdot 0, 0}{1/2 \cdot 1, 1} = \frac{1 \cdot 0}{1/2 \cdot 2}$. Вспомните



как мы производили биномиальное разложение, все факториалы мастера ${}_{1/n}^{1,0}t$, $n \in N^*$ при $t > n$ будут равны нулю. Поэтому такой ряд можно рассматривать как не бесконечный.

$$y = (1 + x_1/2 + x_2/2)^2 = {}_{1/2 \cdot x_1 x_2}^{1,0} = 1 + \frac{x_1^1}{1!} + \frac{x_1^2}{2!} \frac{1}{2} + \frac{x_2^1}{1!} + \frac{x_2^1 x_1^1}{1! 1!} \frac{1}{2} + \frac{x_2^2}{2!} \frac{1}{2} \quad (100)$$

Из мастера могут быть получены многие другие специальные и элементарные функции при определённых значениях параметров. Иногда требуется преобразование независимого аргумента, в частности, чтобы получить результат за пределами области сходимости.

Например, функция экспонента $\exp(x)$ имеет ряд $(1;0;0;x)$, то есть ничего, кроме балласта, ${}_{0 \cdot x}^{1,0}$. Возьмём из таблицы 1 уравнение ${}_{0 \cdot x}^{1,0}y_x$

$$y = e^x \quad (101)$$

Оно находится в нижней строке таблицы 1, значит, главный параметр мастера $m=1$. В этом уравнении нет величин «s» и «г», значит, в слэш параметры нужно подавать нули ${}_{0 \cdot}^{1,0}$

$$\begin{aligned} y = \exp(x) &= {}_{0 \cdot x}^{1,0} = 1 + x + \frac{x^2}{2}(-0 + 1 + 2 \cdot 0) + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2}(1) + \frac{x^3}{3!}(1)(1) + \frac{x^4}{4!}(1)(1)(1) + \dots \end{aligned} \quad (102)$$

У мастера ${}_{0 \cdot x}^{m \cdot s}$ ряд сходится, когда $|esx| < 1$, в данном случае $s=0$, значит, левая часть неравенства будет равна нулю при любом x . Другими словами, радиус сходимости функции экспоненты бесконечен.

Согласно степенному параметрическому тождеству рядов мастера

$$({}_{0 \cdot x}^{1,0})^c = {}_{0 \cdot cx}^{1,0} \quad (103)$$

$$(\exp(x))^c = \exp(cx) \quad (104)$$

Степенные ряды арифметических корней, биномиального разложения и геометрических рядов получаются из мастера при параметрах $\neq {}_{0 \cdot}^{1,0}$

$$\sqrt[r]{1+x} = {}_{r \cdot x/r}^{1,0}, 0 < 1+x < 1 \quad (105)$$

$$(1+x)^r = {}_{1/r \cdot rx}^{1,0}, |x| < 1 \quad (106)$$

$$\frac{1}{(1-x)^r} = {}_{-1/r \cdot rx}^{1,0}, |x| < 1 \quad (107)$$

Если $r \neq 0$, то ряд ${}_{r \cdot x}^{m \cdot s}$ сходится, когда $|r-s||s|^{|s|}|x|^{|r|} < 1$. В случае с арифметическим корнем $s=0$, а независимый аргумент мы делим на r , ${}_{r \cdot x/r}^{1,0}$. Поэтому ряд сходится, когда $|r-0||r-0||\frac{x}{r}|^{|r|} < 1$, $|x|^{|r|} < 1$. У этих функций получить результат за пределами сходимости можно легко. Если значение под корнем более 1, его надо взять в степень минус один, получить корень этого вспомогательного числа, и результат потом также вернуть в степени минус один от этого корня. У натурального логарифма такое же правило преобразования независимого аргумента для сходимости, только результат его вспомогательного логарифма нужно возвращать в той же степени, но с противоположным знаком.

У мастера предусмотрен вспомогательный степенной ряд для логарифма и арифметического корня. Вместо уравнения $y^r = 1 + rx$ можно использовать уравнение $y^r = 1 + rxy^s$, $s=r$. Разделив обе части на y^r , получим $y^{-r} = 1 - rx$. Значит функции gesilog и gesroot не определены, когда $r=s$, так как в этих случаях получаются ряды натурального логарифма и арифметического корня соответственно.

Сам по себе степенной ряд мастера даёт однозначный результат. Но корень целой степени «г» от любого ненулевого числа имеет г корней. Кроме того, корень чётной степени от отрицательного числа не может быть вещественным. Значит, нельзя во всех случаях использовать один только этот степенной ряд. В некоторых случаях нужно использовать



какие-то дополнительные правила. Экспонента, синусы и косинусы имеют по одному корню. Все остальные уравнения таблицы 1 имеют свои правила выбора корней. У корня g -степени следующее правило.

$$y^r = z \quad (108)$$

$$y_n = \sqrt[r]{|z|} \left(\cos \frac{\arg(z)+2\pi n}{r} + i \sin \frac{\arg(z)+2\pi n}{r} \right), n \in Z \quad (109)$$

$$\arg(z) = \arg(a + bi) = \arctan(b/a) \quad (110)$$

Степенной ряд натурального логарифма получается при параметрах $\neq 0:0$.

$$\frac{\ln(1+x)}{r} = \frac{0:0}{r \cdot x/r} \quad (111)$$

Вместо уравнения $e^{ry} = 1 + rx$, также можно использовать уравнение

$$e^{ry} = 1 + rx e^{sy}. y = \ln \frac{1}{(1-x)} = \frac{0:1}{1:x} \quad (112)$$

Выражения $\frac{\ln(x)}{r}$ и $\sqrt[r]{x}$ – это sg партнёры. Они отличаются только наличием балласта «т». Такие напарники связаны экспоненциальным параметрическим тождеством.

$$\frac{1:s}{r:x} = e^{\frac{0:s}{r:x}} \quad (113)$$

$$\sqrt[r]{x} = e^{\frac{\ln(x)}{r}} \quad (114)$$

Правило выбора корня у логарифма такие же, как и у его напарника – арифметического корня.

$$e^{ry} = z \quad (115)$$

$$y_n = \frac{\ln|z| + i(\arg(z) + 2\pi n)}{r}, k \in Z \quad (116)$$

Как видно из таблицы 1, всего существует четыре sg пары. Справа от пары логарифма и арифметического корня расположены уравнения, корни которых определяются с помощью функций recsilog и recroot , которые также являются sg партнёрами между собой. Из мастера получается рекрут при параметрах $\frac{1:s}{r:x}, s \neq 0, r \neq 0, r \neq s$.

$$y = (1 + rx_1 y^{s_1} + rx_2 y^{s_2} + \dots)^{\frac{1}{r}} = \frac{1:s_1, s_2, \dots}{r: x_1, x_2, \dots} = \sqrt[r]{1 \{ \frac{s_1, s_2, \dots}{x_1, x_2, \dots} \}} = \sqrt[r]{1} \cdot \sqrt[r]{\frac{s_1}{x_1}} @ \sqrt[r]{\frac{s_2}{x_2}} \dots \quad (117)$$

Чтобы получить любой корень уравнения, используются соответствующие корни g -степени от единицы.

$$y_n = (1 + rx_1 y_n^{s_1} + rx_2 y_n^{s_2} + \dots)^{\frac{1}{r}} = v_n \cdot \frac{1:s_1, s_2, \dots}{r: x_1 v_n^{s_1}, x_2 v_n^{s_2}, \dots} \quad (118)$$

$$v_n = e^{\frac{2\pi ni}{r}}, n \in Z \quad (119)$$

Любое алгебраическое уравнение можно привести к такому виду, когда степенной ряд рекрута будет сходиться. Для этого, если степенной ряд рекрута расходится, обе части уравнения $y^r = 1 + rx_1 y^{s_1} + rx_2 y^{s_2} + \dots$ нужно разделить на y^r или на y^{s_k} . Затем привести уравнение к образу мастера, то есть к такому виду, когда и свободный член в правой части уравнения, и коэффициент единственного члена левой части уравнения равны 1. Получится вспомогательный степенной ряд, но над ним также можно производить операцию слияние функций.

В предыдущих статьях (см. литература) мы подробно показывали правило выбора корня рекрута. Ранее оно называлось ультралиберальным правилом выбора корня. Это правило изменения параметров мастера и преобразования его независимого аргумента для сходимости степенного ряда рекрута и выбора корня одновременно. Пользуясь этим правилом, уже не нужно гадать, на что лучше делить левую и правую части уравнения.

Кроме того, это правило позволяет не приводить алгебраическое уравнение к образу мастера.



Степенной ряд рекрута, в отличие от степенного ряда арифметического корня, может работать и с отрицательными числами при чётных степенях, и с комплексными коэффициентами и степенями.

Функция Ламберта и её обобщения

Знак мастера уравнений ${}^m y_x^s$ обозначает полное уравнение таблицы 1, обе его части и знак равенства между ними. Если вместо чисел в параметрах стоят буквы или условия, значит, речь идёт о множестве уравнений. Рассмотрим уравнение ${}^0 y_x^{\neq 0}$

$$y = x e^{sy} \quad (120)$$

Один из корней этого уравнения имеет следующее тождество с мастером.

$$y = x e^{sy} = {}^{0,s}_{0,x} \quad (121)$$

$$y = x + \frac{x^2}{2}(2s) + \frac{x^3}{3!}(3s)(3s) + \frac{x^4}{4!}(4s)(4s)(4s) + \dots, |esx| < 1 \quad (122)$$

$$LambertW_0(x) = {}^{0,-1}_{0,x} \quad (123)$$

$${}^{0,s}_{0,x} = \frac{LambertW_0(-sx)}{-s} \quad (124)$$

Ряд сходится, если $|esx| < 1$ или $|sx| < 1/e$. Для всех уравнений ${}^m y_x^s$ таблицы 1 радиус сходимости тоже не бесконечен. Но для каждого из них найдено правило, которое позволяет получить любой корень с помощью мастера, даже за пределами области сходимости, используя вспомогательные степенные ряды. Для уравнений ${}^m y_x^{\neq 0}$ и соответственно для функции Ламберта такое правило и вспомогательные ряды пока не найдены.

Известно асимптотическое разложение функции Ламберта. Но оно не является вспомогательным рядом, потому что его можно применять только к одной функции с одним независимым аргументом. Как выполнять операцию слияние над таким разложением, науке пока неизвестно.

$$LambertW(x) = L_1 - L_2 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^l \left[\begin{smallmatrix} l+j \\ l+1 \end{smallmatrix} \right] L_2^j}{j! L_1^{l+j}} \quad (125)$$

Где $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ - неотрицательное число Стирлинга первого рода

Таблица 2

Первые числа Стирлинга со знаком:

n\k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	-1	1				
3	0	2	-3	1			
4	0	-6	11	-6	1		
5	0	24	-50	35	-10	1	
6	0	-120	274	-225	85	-15	1

$$\text{Для } LambertW_0(x), L_1 = \ln(x), L_2 = \ln \ln(x) \quad (126)$$

$$\text{Для } LambertW_{-1}(x), L_1 = \ln(-x), L_2 = \ln(-\ln(-x)) \quad (127)$$

$$W(x) = L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{L_2(-2+L_2)}{2L_1^2} + \frac{L_2(6-9L_2+2L_2^2)}{6L_1^3} + \frac{L_2(-12+36L_2-22L_2^2+3L_2^3)}{12L_1^4} + \dots \quad (128)$$

Это асимптотическое разложение можно записать через кварк мастера ${}^1_1!$

$$LambertW(x) = L_1 - L_2 - \sum_{t=1}^{\infty} \frac{R \cdot {}^1_1!}{(-L_1)^t}, R = \frac{L_2}{{}^1_1!} \quad (129)$$

В формуле с кварком используется только один бесконечный ряд.



$$W(x) = L_1 - L_2 + \frac{R}{L_1} - \frac{R}{L_1^2}(-R+1) + \frac{R}{L_1^3}(-R+1)(-2R+1) - \frac{R}{L_1^4}(-R+1)(-2R+1)(-3R+1) + \dots \quad (130)$$

Теперь числа Стирлинга первого рода со знаком получаются сами, не нужно их предварительно вычислять. Такой алгоритм и проще, и быстрее.

$$W(x) = L_1 - L_2 + \frac{R}{L_1} - \frac{R(-R+1)}{L_1^2} + \frac{R(2R^2-3R+1)}{L_1^3} - \frac{R(-6R^3+11R^2-6R+1)}{L_1^4} + \dots \quad (131)$$

Кварк мастера $k^!_r$ – это такая форма записи факториала мастера m^s_r , когда величина «t» задаётся неявно, её нужно определить. Если в верхнем левом углу стоит «!», значит, определение ещё не завершено, и вместо слэш параметров (s и r) стоят другие величины. Слева внизу (вместо параметра r) располагается обозначение масти кварков. Кварки разных мастей нельзя объединять в один мастер факториалов. Справа сверху (вместо параметра s) остаётся место для обычного возведения в степень.

По умолчанию, все параметры мастера, которому принадлежат кварки, равны 1. Если нужно использовать кварки мастера с другими параметрами, это указывается следующим образом.

$$k^!_r \in m^s_r \quad (132)$$

Если не указывается, какому обобщению факториалов принадлежат кварки, значит, это кварки обычного факториала. Мы не сможем узнать, от какого числа надо брать факториал, пока не перемножим все кварки одного факториала. Известно только, что если факториал состоит из t кварков, то только тогда $k^!_t = {}^1_1!_t = t!$. Например, $(k^!)^3 = 3!$, только если не будет больше умножаться на k-кварки.

Чтобы узнать, сколько кварков содержит каждый факториал, нужно раскрыть все скобки.

$$R(-6R^3 + 11R^2 - 6R + 1) = -6R^4 + 11R^3 - 6R^2 + 1R \quad (133)$$

Больше это выражение на кварки умножаться не будет, поэтому теперь можно делать замену

$$R^t = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^t = \frac{L_2^t}{t!}. \quad (134)$$

В предыдущем примере, в формуле с обычными факториалами, один бесконечный цикл вложен в другой бесконечный цикл. На вычисление чисел Стирлинга тоже требуется время.

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^l \left[\frac{l+j}{l+1} \right]_{L_2}^{L_2^j}}{j! L_1^{l+j}} \quad (135)$$

По формуле с кварками факториалов алгоритм работает намного быстрее.

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{L_2 / {}^1_1!_t L_2}{{}^1_1!(-L_1)^t} \quad (136)$$

$$k^!_r \cdot k^!_r = k^!_{2r} \quad (137)$$

$$k^!_{2r} \cdot k^!_{3r} = k^!_{2+3r} = k^!_{5r} \quad (138)$$

$$\left(k^!_r\right)^n = k^!_{nr} \quad (139)$$

$$\left(k^!_{rt}\right)^n = k^!_{nt} \quad (140)$$

Если выражение, окутанное одним кварковым туманом, надо умножить на выражение, окутанное другим кварковым туманом, эти разные туманы нужно обозначить огорождением туманов.

$$\left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{L_2 / {}^1_1!_t L_2}{{}^1_1!(-L_1)^t}\right)^! \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{L_2 / {}^1_1!_t L_2}{{}^1_1!(-L_1)^t}\right)^! = \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{L_2 / {}^1_1!_t L_2}{{}^1_1!(-L_1)^t}\right)^{!2} \quad (141)$$



$$\left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{L_2 / \frac{1!^0}{1!} t L_2}{\frac{1!^0}{1!} (-L_1)^t}\right)^{!2} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{L_2 / \frac{1!^0}{1!} t L_2}{\frac{1!^0}{1!} (-L_1)^t}\right)^{!3} = \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{L_2 / \frac{1!^0}{1!} t L_2}{\frac{1!^0}{1!} (-L_1)^t}\right)^{!5} \quad (142)$$

В степени над туманом должно быть обозначение последовательности операций. Восклицательный знак перед степенью обозначает, что сперва нужно получить факториалы из кварков, а только потом возводить в степень.

Если выражение с кварками спрятать в переменную

$$LambertW(x) = L_1 - L_2 - \sum_{t=1}^{\infty} \frac{R \cdot \frac{1!^0}{1!} t}{(-L_1)^t}, R = \frac{L_2}{\frac{1!^0}{1!}} \quad (143)$$

то достаточно запомнить всего одно правило. Если R ещё будет умножаться на R, то пока ещё нельзя делать замену $R = \frac{L_2}{\frac{1!^0}{1!}}$

Ну и в этом случае нельзя забывать ограждать разные туманности, когда понадобятся их умножать друг на друга. Если, конечно, понадобятся.

$$\left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{R \cdot \frac{1!^0}{1!} t}{(-L_1)^t}\right)^{!} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{R \cdot \frac{1!^0}{1!} t}{(-L_1)^t}\right)^{!} = \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{R \cdot \frac{1!^0}{1!} t}{(-L_1)^t}\right)^{!2} \quad (144)$$

Рассмотрим такое же уравнение, но с балластом $\frac{1}{0}y^{\neq 0}$

$$y = e^{xy^s} = \frac{1}{0}x^s \quad (145)$$

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} (1 + 2s) + \frac{x^3}{3!} (1 + 3s)^2 + \frac{x^4}{4!} (1 + 4s)^3 + \dots, |esx| < 1 \quad (146)$$

Мастера $\frac{1}{0}x^s$ и $\frac{0}{0}x^s$ являются sg -напарниками. Они отличаются только наличием балласта. У них такие же параметрические тождества

$$\frac{0}{0}x^s = \frac{\frac{0}{0}sx}{s} \quad (147)$$

$$\frac{1}{0}x^s = \left(\frac{1}{0}sx\right)^{\frac{1}{s}} \quad (148)$$

$$\frac{1}{0}x^s = e^{\frac{0}{0}x^s} \quad (149)$$

$$x\left(\frac{1}{0}x\right)^s = \frac{0}{0}x^s \quad (150)$$

$$\frac{1}{0}x = \frac{0}{0}1 \quad (151)$$

Тождества есть и между дробями разных корней разных sg -напарников.

$$\frac{Master:1(0;s;0;x)}{Master:0(0;s;0;x)} = \left(\frac{Master:1(1;s;0;x)}{Master:0(1;s;0;x)}\right)^s \quad (152)$$

Один из корней многочленных уравнений $\frac{m}{0}x$ имеет простейшее тождество.

$$y = v e^{x_1 y^{s_1} + x_2 y^{s_2} + \dots} = v \cdot \frac{1}{0}x_1^{s_1, s_2, \dots} v^{s_2, \dots} \quad (153)$$

$$y = e^z \quad (154)$$

$$e^z = v e^{x_1 e^{zs_1} + x_2 e^{zs_2} + \dots} = v \cdot \frac{1}{0}x_1^{s_1, s_2, \dots} v^{s_2, \dots} \quad (155)$$

$$z = \ln v + x_1 e^{s_1 z} + x_2 e^{s_2 z} + \dots = \ln v + \frac{0}{0}x_1^{s_1, s_2, \dots} v^{s_2, \dots} \quad (156)$$

Например,

$$y = x \cdot \cos(sy) = \frac{x \cdot e^{syi} + x \cdot e^{-syi}}{2} = \frac{0}{0}x^{si, -si}_{x/2, x/2} \quad (157)$$



График 1.

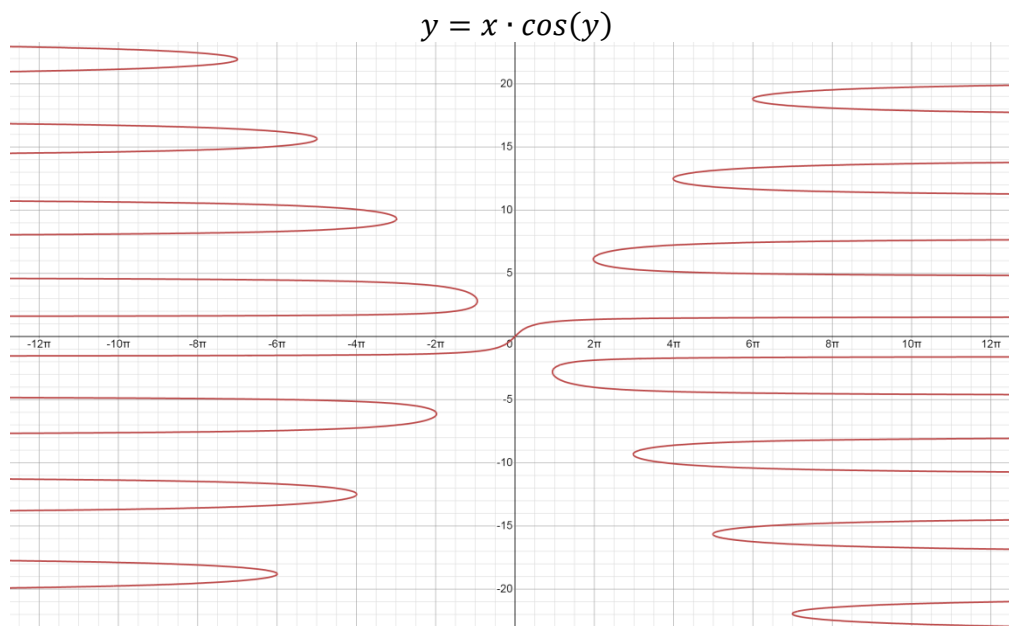
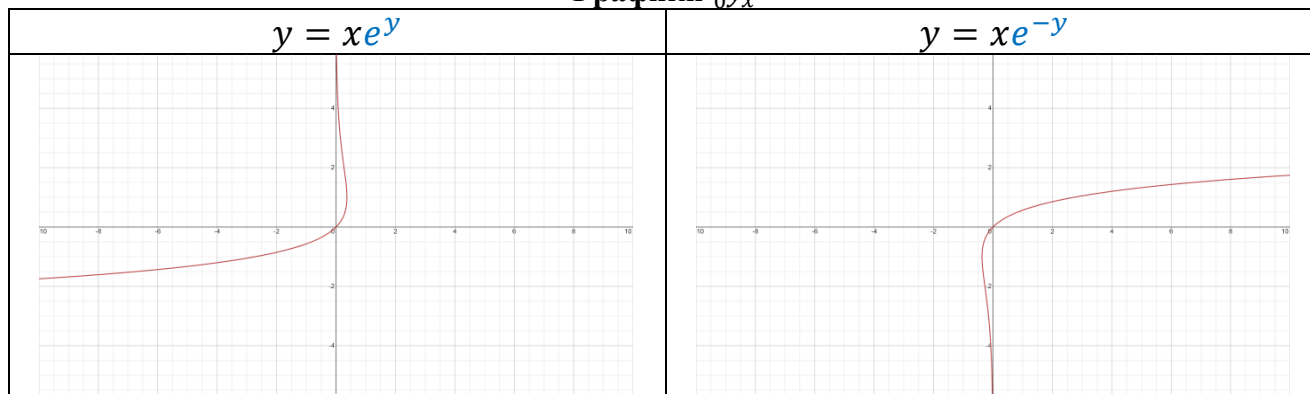


Таблица 3.

Графики ${}^0_{yx}$



Составные функции

Уравнения таблицы 1 решаются функциями, степенные ряды которых можно получить из одного мастера. Но кроме этих функций в математике используются и другие функции, степенные ряды которых можно получать из различных композиций мастеров.

Независимый аргумент можно располагать в скобках справа от него.

$${}^{1,0}_{1/n}n \cdot \left(\frac{1,0}{0,ix} - 1 \right) = {}^{1,0}_{1/n} \left(n \cdot \left(\frac{1,0}{0,ix} - 1 \right) \right) \quad (158)$$

Рассмотрим такие функции как $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\tan x = \sin x \cdot \sec x$ (159)

$${}^{1,0}_{1/n}n \cdot \left(\frac{1,0}{0,ix} - 1 \right) \quad (160)$$

$$\cos^n x = {}^{1,0}_{1/n} \left(n \cdot \left(\frac{1,0}{0,ix} - 1 \right) \right) \quad (161)$$

$$n \cdot \left(\frac{1,0}{0,ix} - 1 \right) = \left(-\frac{nx^2}{2!} + \frac{nx^4}{4!} - \frac{nx^6}{6!} + \frac{nx^8}{8!} - \frac{nx^{10}}{10!} + \dots \right) \quad (162)$$



$$(\cos x)^n = 1 + \left(-\frac{nx^2}{2!} + \frac{nx^4}{4!} - \frac{nx^6}{6!} + \frac{nx^8}{8!} - \frac{nx^{10}}{10!} + \dots \right) + \frac{1/n^{1/2}}{2!} \left(-\frac{nx^2}{2!} + \frac{nx^4}{4!} - \frac{nx^6}{6!} + \frac{nx^8}{8!} - \frac{nx^{10}}{10!} + \dots \right)^2 + \frac{1/n^{1/3}}{3!} \left(-\frac{nx^2}{2!} + \frac{nx^4}{4!} - \frac{nx^6}{6!} + \frac{nx^8}{8!} - \frac{nx^{10}}{10!} + \dots \right)^3 + \dots \quad (163)$$

$$(\cos x)^n = 1 - n \frac{x^2}{2!} + (n + 3n^2 \frac{1/n^{1/2}}{4!}) \frac{x^4}{4!} - (n + 15n^2 \frac{1/n^{1/2}}{6!} + 15n^3 \frac{1/n^{1/3}}{6!}) \frac{x^6}{6!} + (n + 63n^2 \frac{1/n^{1/2}}{8!} + 210n^3 \frac{1/n^{1/3}}{8!} + 105n^4 \frac{1/n^{1/4}}{8!}) \frac{x^8}{8!} - (n + 255n^2 \frac{1/n^{1/2}}{10!} + 2205n^3 \frac{1/n^{1/3}}{10!} + 3150n^4 \frac{1/n^{1/4}}{10!} + 945n^5 \frac{1/n^{1/5}}{10!}) \frac{x^{10}}{10!} + \dots \quad (164)$$

$$\begin{aligned} \tan x &= \left(1x - 1 \frac{x^3}{3!} + 1 \frac{x^5}{5!} - 1 \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \left(1 + 1 \frac{x^2}{2!} + 5 \frac{x^4}{4!} + 61 \frac{x^6}{6!} + \dots \right) \\ &= 1x + (1 \cdot 1 \cdot 3 - 1) \frac{R^3}{3!} + (1 \cdot 5 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 10 + 1) \frac{R^5}{5!} \\ &\quad + (1 \cdot 61 \cdot 7 - 1 \cdot 5 \cdot 35 + 1 \cdot 1 \cdot 21 - 1) \frac{R^7}{7!} + \dots \end{aligned} \quad (165)$$

При обычном умножении разных функций слияния мастеров не происходит. Здесь мастера просто складываются и умножаются. Численные значения таких композиций мастеров можно выразить числами Бернулли и Эйлера.

Определение мастера из функции

Если мы знаем формулу функции, выраженной в композициях мастера, значит, можем предсказать некоторые её свойства и тождества, полагаясь на свойства и тождества тех функций, из которых она состоит. Значение составной функции мы также можем получить, используя соответствующую последовательность операций или функций, из которых она состоит.

Итак, мы можем получить степенной ряд из любой композиции мастеров. А как наоборот, из степенного ряда функции получить композицию мастеров? Когда мы ещё не знаем наверняка, мы только хотим узнать, можно ли некоторый ряд выразить какой-нибудь композицией мастеров. Если степенной ряд состоит из одного мастера, это сделать несложно. Нужно взять два уравнения

$$\begin{aligned} f(x) &= m + x + \frac{x^2}{2!} \cdot a + \frac{x^3}{3!} \cdot b + \frac{x^4}{4!} \cdot c + \dots \\ \frac{m_{r \cdot x}^s}{r!} &= m + x + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{m_{r \cdot 2}^s}{r!} + \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{m_{r \cdot 3}^s}{r!} + \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{m_{r \cdot 4}^s}{r!} + \dots \end{aligned} \quad (166)$$

И создать систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{m_{r \cdot 2}^s}{r!} = a \\ \frac{m_{r \cdot 3}^s}{r!} = b, \frac{m_{r \cdot t}^s}{r!} = \prod_{j=1}^{t-1} (m + st - rj) \\ \frac{m_{r \cdot 4}^s}{r!} = c \end{cases} \quad (167)$$

С составными функциями сложнее. Нужно предварительно узнать саму структуру композиции мастеров.

Расшифровка названий

В таблице 1 расположены уравнения с рекурсией неизвестных $m_{ry}^{x \neq 0}$. Рекурсия над экспонентой, рекурсия в логарифме, рекурсия под корнем. Эти уравнения решаются рядами Тейлора без каких-либо рекурсий, как и обычные экспонента, логарифм и арифметический корень. Конечно, правила выбора корней у каждого свои, но в целом все они подчиняются общей системе.



Поэтому функцию, которая решает алгебраические уравнения, мы назвали ре-к-рут (re-cth-root) или рекурсивный корень степени s . Его рекурсия, наоборот, возводится в степень s . Можно использовать такое выражение – рекрут степеней s и s .

Ранее математики, изучавшие эти уравнения, называли подобные функции ультрарадикал. Мы не оспариваем их выбор, просто предлагаем такой вариант названия этой функции.

Заключение

Использование возможностей мастера – дело интересное, но новое и ещё до конца не изученное. Сейчас оно само нуждается во внимании математиков и программистов. Прогрессия членов степенного ряда функций характеризуется мастером предельно просто. Из мастера получать обобщения факториалов, степенные ряды, и основные, и вспомогательные, тоже очень просто. Алгоритм мастера факториалов очень простой.

Из всех несоставных функций только у рекрута все параметры не равны нулю. Остальные несоставные функции получаются при обнулении каких-нибудь параметров.

При обнулении синхронизации получаются натуральный логарифм, арифметический корень и экспонента.

Список литературы:

1. LXIX Международная научно-практическая конференция (Россия, г. Новосибирск, 22 ноября 2023 г.) <https://sibac.info/conf/technology/60/307058>
2. Universum 2024 1(118) DOI - 10.32743/UniTech.2024.118.1.16645 <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/16645>
3. LXXIII Научные конференции СибАк март <https://sibac.info/conf/technology/64/321228>
4. Конкурс «Научный прорыв 2024». <https://naukaip.ru/wp-content/uploads/2024/03/K-611.pdf>
5. «Флагман науки», март 2024. https://flagmannauki.ru/files/314-Berezin_Sergey_Viktorovich_1477.pdf
6. «Флагман науки», апрель 2024. https://flagmannauki.ru/files/415-Berezin_Sergey_Viktorovich_1611.pdf
7. Проблемы научно-практической деятельности. Поиск и выбор перспективных решений: сборник статей международной научной конференции (Вологда, май 2024). <https://disk.yandex.ru/d/UTwHLpYezLHGxQ>
8. «Флагман науки», июнь 2024. https://flagmannauki.ru/files/617-Berezin_Sergey_Viktorovich_2144_2.pdf
9. «Флагман науки», январь 2025 https://flagmannauki.ru/files/124-Berezin_Sergey_Viktorovich_2955.pdf

