DOI 10.37539/2949-1991.2026.38.3.009
УДК 512.64+519.65+531.133.1

Щипицын Анатолий Георгиевич,
доктор технических наук, профессор, эксперт,
Российская Академия Естествознания

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ОРИЕНТАЦИИ ТЕЛА ПРИ ЕГО СФЕРИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

Аннотация. Рассмотрена задача определения относительной погрешности матрицы ориентации тела при его сферическом движении, обусловленной погрешностями углов поворотов этого тела. Обоснована возможность использования малых углов поворотов с заданной допустимой погрешностью.

Ключевые слова: Критерий точности ориентации, матрицы отдельных поворотов, матрица ориентации тела, норма матрицы, относительная погрешность ориентации.

Введение и постановка задачи

Судя по аннотации статьи, задача может показаться тривиальной. Однако, когда возникает необходимость получить аналитическое решение системы дифференциальных уравнений сферического движения тела, прибегают к упрощению этой системы путём рассмотрения движения тела в малых окрестностях реальных значений его углов поворотов. При этом назначают величины малых углов интуитивно произвольно, предполагая в дальнейшем экспериментально проверить точность полученных решений уравнений движения тела. Но целесообразно иметь информацию о точности решений для случаев, когда провести эксперимент не представляется возможным, и требуется теоретически обосновать «малость» углов, при которых относительная погрешность ориентации тела не превосходит заданную допустимую величину. Например, в учебнике [1, стр. 37-39] автор показывает, что только для малых углов поворотов тела при его сферическом движении возможно ставить в соответствие этим углам векторы и далее находить результирующий поворот путём суммирования векторов. Но не введён критерий количественной «малости» углов, при которой указанная процедура допустима с заданной точностью.

Сформулированную в аннотации статьи задачу можно развернуть так: определение допустимой «малости» углов поворотов тела при его сферическом движении в смысле заданного критерия точности ориентации этого тела.

Математическое описание

Для решения поставленной задачи рассмотрим реализацию сферического движения тела, установленного на площадке карданова подвеса [2, стр. 59-61]. Повороты осуществляются относительно неподвижного основания, с которым связана декартова система координат $ox_1^0x_2^0x_3^0$, где o – начало координат для всех введённых декартовых систем координат $ox_1^кx_2^кx_3^к$, где индекс «к» указывает на связь системы координат с элементом карданова подвеса: при к=1 – с наружной рамкой, при к=2 – с внутренней рамкой, при к=3 – с площадкой, на которой установлено разворачиваемое тело. Для приведения тела в произвольную ориентацию относительно основания выполняются три последовательных поворота. Первый поворот выполняется вокруг оси ox_1^1наружной рамки (совпадающей осью ox_1^0основания) на угол φ_1. Второй поворот выполняется вокруг оси ox_2^2 внутренней рамки (совпадающей с осью ox_2^1 наружной рамки) на угол φ_2. Третий поворот выполняется вокруг оси ox_3^3площадки (совпадающей с осью ox_3^2 внутренней рамки) на угол φ_3. Каждый угол поворота $\varphi_к$ выполняется вокруг оси $ox_к^к$ ($ox_к^{к-1}$) в положительном направлении, то есть против хода часовой стрелки, если смотреть с конца оси $ox_к^к$ ($ox_к^{к-1}$), к=$\overline{1,3}$. В результате установленное на площадке тело займёт ориентацию относительно основания, для определения которой введём исходные матрицы направляющих косинусов, ненулевые компоненты которых таковы:

$$a_{11}^{01} = 1,\ a_{22}^{01} = \cos\varphi_1,\ a_{23}^{01} = -\sin\varphi_1,\ a_{a32}^{01} = \sin\varphi_1,\ a_{33}^{01} = \cos\varphi_1; \tag{1}$$

$$a_{11}^{12} = \cos\varphi_2,\ a_{13}^{12} = \sin\varphi_2,\ a_{22}^{12} = 1,\ a_{31}^{12} = -\sin\varphi_2,\ a_{33}^{12} = \cos\varphi_2; \tag{2}$$

$$a_{11}^{23} = \cos\varphi_3,\ a_{12}^{23} = -\sin\varphi_3,\ a_{21}^{23} = \sin\varphi_3,\ a_{22}^{23} = \cos\varphi_3,\ a_{33}^{23} = 1, \tag{3}$$

где каждая из компонент (1)- (3) представляет собой скалярное произведение ортов: $a_{i\,j}^{k\text{-}1,k} = \mathbf{x}_i^{к-1}\mathbf{x}_j^к$, к,i,j=$\overline{1,3}$.

Далее процедура решения задачи заключается в следующем:

1) определение результирующей матрицы ориентации тела с компонентами a_{ij}^{03}, i,j=$\overline{1,3}$ на основе исходных матриц с компонентами (1)- (3), зависящими от углов $\varphi_к$, к=$\overline{1,3}$;

2) определение результирующей матрицы ориентации тела с компонентами A_{ij}^{03}, i,j=$\overline{1,3}$ на основе исходных матриц с компонентами вида (1)- (3), но в которых углы $\varphi_к$ заменены соответственно на (1+D)$\varphi_к$, где D – малая безразмерная величина, подлежащая определению из условия удовлетворения заданному критерию точности результирующей ориентации тела;

3) определение норм матриц [3, стр. 390-391]: с компонентами a_{ij}^{03} и с компонентами A_{ij}^{03}, i,j=$\overline{1,3}$;

4) определение «модуля разности норм матриц», полученных в предыдущем пункте;

5) определение величины текущего критерия точности, как отношения «модуля разности норм матриц», полученного в предыдущем пункте, к норме матрицы с компонентами a_{ij}^{03}, i,j=$\overline{1,3}$;

6) организация итерационной процедуры с варьированием величины D с целью удовлетворения текущего (изменяемого) критерия точности заданному критерию точности ориентации тела;

7) фиксация найденной в предыдущем пункте величины D и вычисление соответствующих малых значений углов $\Delta\varphi_к$=D$\varphi_к$, к=$\overline{1,3}$.

Символьная конкретизация описанной выше процедуры представляет собой следующую последовательность действий:

0. Задать исходную информацию:

0.1.D^* – критерий точности ориентации тела: допустимая относительная погрешность ориентации тела с поворотами его на малые углы;

0.2. $\varphi_к$, к=$\overline{1,3}$ – углы поворота тела, в окрестностях которых формируются малые углы $\Delta\varphi_к$, к=$\overline{1,3}$;

03.D – варьируемый безразмерный параметр, задающий малые значения углов согласно формулам:

$$\Delta\varphi_к = D\varphi_к,\ к=\overline{1,3}; \tag{4}$$

при этом задан практически реальный интервал изменения параметра D:

$$D_L \le D \le D_B, \tag{5}$$

где D_L, D_B – соответственно левая и правая границы изменения параметра D, а также задан коэффициент K_D изменения величины D на итерации: либо в сторону его уменьшения от D_B до D_L при K_D<1, либо в сторону его увеличения от D_L до D_B при K_D>1;

0.4.p≥1 – безразмерный параметр – показатель степени у нормы матрицы.

1.Вычислить компоненты исходных матриц по формулам (1)- (3).

2.Вычислить компоненты A_{ij}^{01}, A_{ij}^{12}, A_{ij}^{23}, $i,j=\overline{1,3}$ матриц, полученных соответственно из компонент матриц a_{ij}^{01}, a_{ij}^{12}, a_{ij}^{23}, $i,j=\overline{1,3}$ путём подстановки в формулы (1)- (3) вместо углов $\varphi_к$, $к=\overline{1,3}$ соответственно углов:

$$Ф_к = (1+D)\varphi_к,\ к=\overline{1,3}. \quad (6)$$

3.Вычислить компоненты промежуточных матриц:

$$a_{ij}^{02} = \Sigma^3{}_{k=1}\,(a_{ik}^{01} a_{kj}^{12}),\ i,j=\overline{1,3}; \quad (7)$$

$$A_{ij}^{02} = \Sigma^3{}_{k=1}\,(A_{ik}^{01} A_{kj}^{12}),\ i,j=\overline{1,3}. \quad (8)$$

4.Вычислить компоненты результирующих матриц:

$$a_{ij}^{03} = \Sigma^3{}_{k=1}\,(a_{ik}^{02} a_{kj}^{23}),\ i,j=\overline{1,3}; \quad (9)$$

$$A_{ij}^{03} = \Sigma^3{}_{k=1}\,(A_{ik}^{02} A_{kj}^{23}),\ i,j=\overline{1,3}. \quad (10)$$

5.Вычислить нормы рузультирующх матриц:

$$n = [\Sigma^3{}_{i=1}\Sigma^3{}_{j=1}\,(a_{ij}^{03})^p]^{1/p}, \quad (11)$$

$$N = [\Sigma^3{}_{i=1}\Sigma^3{}_{j=1}\,(A_{ij}^{03})^p]^{1/p}. \quad (12)$$

6.Вычислить модуль разности норм (11), (12):

$$\Delta n = |N-n|. \quad (13)$$

7.Вычислить величину текущего критерия точности ориентации тела:

$$D_n = \Delta n/n. \quad (14)$$

8.Организовать цикл с варьированием параметра D в интервале (5) с целью определения величины этого параметра как аргумента выполнения условия:

$$D_0 = \arg\{D_{n\leq}D^*\}. \quad (15)$$

9.Организовать цикл с варьированием параметра «р» с целью анализа влияния этого параметра на величину (14) и соответственно – влияния на величину (15).

Об алгоритме, программе и обработке результатов вычислений

С использованием математического описания составлен алгоритм, разработана программа в пакете PascalABC NET [4], на основе которой проведено численное моделирование и получены результаты для следующих исходных числовых данных:

$$D^* = 10^{-7}. \quad (16)$$

Параметр D варьируется в интервале:

$$10^{-1}<D<10^{-6} \quad (17)$$

с коэффициентом уменьшения K_D=0,1.

Параметр «р» варьируется в интервале:

$$1<p<5 \quad (18)$$

с шагом Δp=1.

Углы поворотов заданы одинаковыми для каждого поворота:

$$\varphi_к=\varphi,\ к=\overline{1,3}, \quad (19)$$

а угол φ задан пятью значениями в угловых градусах:

$$0;\ 0{,}45;\ 4{,}5;\ 45;\ 90. \quad (20)$$

В табл.1 представлены результаты вычислений, где в левом столбце указаны значения параметра «р» согласно (18), в верхней строке указаны значения параметра φ согласно (20), а во внутренних клетках сверху вниз указаны вычисленные по программе величины D_n, n, D_0, расположенные на пересечениях значений р из левого столбца и значений φ из верхней строки, причём значения для D_n, n округлены до дух цифр после запятой, а нули для значений D_n – это «компьютерные нули», то есть числа меньшие, чем 10^{-16}.

Численное моделирование по разработанной программе показало, в частности, что:

1) использование нормы матрицы ориентации тела при р=2 (так называемой сферической нормы) для рассматриваемой задачи не даёт достоверного решения этой задачи,

так как в математическом описании этой нормы присутствуют операции, в которые входят тригонометрические тождества типа $(\sin X)^2+(\cos X)^2=1$, которое не меняет своего значения, равного единице, как при X=x, так и при X=x+Δx и при вычитании нормы при исходных углах из нормы при приращённых углах результаты оказываются равными нулям, что и отображено в табл.1 в строке при p=2, где число 10^{-16} – это «компьютерный нуль»;

2) приближения при малых величинах углов типа $\sin\Delta x \approx \Delta x$, $\cos\Delta x \approx 1$ следует применять с учётом реальных относительных погрешностей:

$$D_s = |\Delta x - \sin\Delta x|/|\sin x|, \quad (21)$$

$$D_c = |1 - \cos\Delta x|/\cos x|, \quad (22)$$

величины которых разные, а именно $D_s<D_c$, а значит, для того, чтобы удовлетворить заданной допустимой результирующей погрешности D^* в системе с математическим описанием, в котором присутствуют функции sinx, cosx, для которых при малых углах используются указанные выше приближения, следует ориентироваться на приближение функции, которая имеет погрешность больше, чем другая: в данном случае – это cosx.

В таблице 2: верхняя строка – значения параметра D, в остальных клетках таблицы сверху вниз приведены вычисленные значения D_s, D_c для угла 45^0, при котором значения синуса и косинуса одинаковы, а значит, одинаковые знаменатели в формулах (21), (22) а также введены обозначения: A=1,14; B=4,36. Из табл.2 видно, что вычисленные значения $D_s<D_c$ и эта разница становится больше с уменьшением параметра D, что и требовалось показать.

Таблица 1

φ → p ↓	0	0,45	4,5	45	90
1	0 3,00 10^{-2}	$1,53\text{x}10^{-7}$ 2,05 10^{-5}	$1,27\text{x}10^{-7}$ 3,46 10^{-6}	$2,16\text{x}10^{-7}$ 4,70 10^{-6}	$1,14\text{x}10^{-7}$ 3,00 10^{-6}
2	0 1,73 10^{-2}	$5,13\text{x}10^{-16}$ 1,73 10^{-2}	0 1,73 10^{-2}	$1,28\text{x}10^{-16}$ 1,73 10^{-2}	$1,28\text{x}10^{-16}$ 1,73 10^{-2}
3	0 1,44 10^{-2}	$1,23\text{x}10^{-7}$ 1,44 10^{-3}	$1,28\text{x}10^{-7}$ 1,43 10^{-5}	$1,32\text{x}10^{-7}$ 1,28 10^{-6}	$4,11\text{x}10^{-8}$ 1,44 10^{-4}
4	0 1,32 10^{-2}	$1,24\text{x}10^{-7}$ 1,32 10^{-3}	$1,28\text{x}10^{-7}$ 1,31 10^{-5}	$2,19\text{x}10^{-7}$ 1,12 10^{-6}	$4,11\text{x}10^{-8}$ 1,32 10^{-4}
5	0 1,25 10^{-2}	$1,24\text{x}10^{-7}$ 1,25 10^{-3}	$1,28\text{x}10^{-7}$ 1,24 10^{-5}	$2,77\text{x}10^{-7}$ 1,04 10^{-6}	$4,11\text{x}10^{-8}$ 1,25 10^{-4}

Таблица 2

D→	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
D_s → D_c →	$\text{Ax}10^{-4}$ $\text{Bx}10^{-3}$	$\text{Ax}10^{-7}$ $\text{Bx}10^{-5}$	$\text{Ax}10^{-10}$ $\text{Bx}10^{-7}$	$\text{Ax}10^{-13}$ $\text{Bx}10^{-9}$	$\text{Ax}10^{-16}$ $\text{Bx}10^{-11}$

Заключение

1.Рассмотрен подход к анализу точности ориентации тела при его сферическом движении для малых углах поворотов. Подход основан на использовании двух норм матрицы ориентации тела. Первая норма определена для реальных (больших) углов, вторая норма определена для сумм реальных и малых углов. И в качестве текущего критерия точности использовано отношение модуля разности первой и второй норм к первой норме. Далее путём итерационного процесса с варьированием малых углов осуществляется сравнение на каждой итерации текущего критерия с заданным до их совпадения, при реализации которого фиксируются значения малых углов ориентации тела.

2. Составлен алгоритм и разработана программа, позволяющая анализировать влияние исходной информации о величинах реальных углов ориентации тела и показателя степени нормы матрицы ориентации на результат в виде величин малых углов, удовлетворяющих заданному критерию точности (табл.1).

3. Численное моделирование по разработанной программе показало, что при использовании сферической нормы матрицы (показатель степени которой равен двум) решения задачи не существует. А также, в частности, показано, что относительная погрешность косинуса малого угла больше относительной погрешности синуса того же угла (табл.2), а, следовательно, для того чтобы удовлетворить заданной точности задачи, необходимо использовать относительную погрешность косинуса.

Список литературы:

1.Васильев И.В. Курс физики. Том 1 / М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1970. – 517 с.

2.Лурье А.И. Аналитическая механика / М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1961. – 831 с.

3.Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике / Под ред. А.И. Арамановича – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 832 с.

4.Огнев А.В. PascalABC NET: Введение в современное программирование / Ростов-наДону. – Интернет издание, 2019. – 572 с.