УДК 621.391.14

Щипицын Анатолий Георгиевич,
доктор технических наук, профессор и зам. Директора
по научной работе на общественных началах
Южно-Уральский государственный университет ((НИУ),
ООО «Турботех

К ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА ЭФФЕКТА ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Аннотация: Рассмотрена задача, постановка которой базируется на двух критериальных условиях: 1) измеряемая информация о процессе должна быть точнее априорной информации; 2) фильтрованная информация, то есть результат реализации процедуры фильтрации, должна быть точнее измеряемой, так как, если было бы иначе, то зачем применять аппарат фильтрации, для обеспечения которого требуется дополнительный алгоритмом обработки.

Ключевые слова: линейная оптимальная фильтрация, одномерный вариант, априорная, измеряемая, фильтрованная информация, эффект повышения точности.

Введение

Математический аппарат теории линейной оптимальной фильтрации с1960-го года [1] успешно используется в технических науках. А также этот аппарат непрерывно совершенствуется как в выполнении математических описаний, так и в разработке программных обеспечений [2, 3]. Но если для математиков приоритетными задачами являются получение новых, более эффективных математических описаний с доказательством соответствующих теорем, то для инженеров в первую очередь необходима информация о потенциальных технических эффектах, которые могут быть достигнуты при использовании математической теории для решения конкретных технических задач. Конечный результат аппарата теории линейной оптимальной фильтрации, который может заинтересовать инженера, – это, например, встроеннное в бортовой компьютер системы программное обеспечение, улучшающее функционирование этой системы в смысле заданного критерия. В частности, для инерциальной навигационной системы такое улучшение заключается в повышении её точности, а следовательно, в увеличении времени её автономной работы. Другими словами, для инженера-проектировщика актуальной задачей является получение информации о потенциальном эффекте в количественном выражении, который может обеспечить программное обеспечение, разработанное на основе аппарата линейной оптимальной фильтрации. Цель данной работы – акцентировать внимание инженера на методике оценки количественного эффекта от использования процедуры линейной оптимальной фильтрации для принятия решения о целесообразности разработки соответствующего программного обеспечения.

1. Постановка задачи

Используем следующее математическое описание аппарата линейной оптимальной фильтрации в матричной форме, следуя фундаментальной публикации [3]:

- дифференциальное уравнение относительно априорной переменной процесса (равнение состояния процесса)

$$dY/dt = aY + u + v,\ Y(t_0)=Y_0, \tag{1.1}$$

где Y – случайная априорная переменная; a, u – детерминированные функции времени, v – центрированный белый шум с нормальным законом распределения интенсивности V, Y_0 – значение переменной Y в начальный момент времени $t=t_0$ из интервала $[t_0; t_E]$ времени наблюдения за процессом;

- зависимость измеряемой переменной

$$Z = cy + n, \tag{1.2}$$

где c – детерминированная функция времени, y=M [Y] – математическое ожидание переменной Y, n – центрированный белый шум с нормальным законом распределения интенсивности N;

- дифференциальное уравнение относительно фильтрованной переменной (оценки априорной переменной Y после реализации процедуры фильтрации)

$$dX/dt = aX + p\,(Z – cX) + u,\ X\,(t_0)=y_0, \tag{1.3}$$

где y_0 – значение переменной y при t= t_0, p – детерминированная функция времени, определяемая зависимостью

$$p = Rc^TN^{-1}, \tag{1.4}$$

где R – детерминированная переменная, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$dR/dt = aR + Ra^T- RqR +V,\ R\,(t_0) =У_0, \tag{1.5}$$

где $У_0$ – значение корреляционного момента У = M [Y^0Y^{0T}] при t= t_0, q – детерминированная функция времени, определяемая зависимостью

$$q = c^TN^{-1}c \tag{1.6}$$

и в выражении корреляционного момента У использовано обозначение Y^0 для центрированной составляющей случайной переменной Y, символом «T» в верхней части матриц обозначена операция транспонирования. В формулах (1.4), (1.6) числом «-1» в верней части матрицы N обозначена матрица, обратная N. В математическом описании (1.1) – (1.6) использованы матрицы, размеры которых указаны в приведённой ниже таблице, где символом K обозначено количество априорных (оцениваемых) переменных, символом L – количество измеряемых переменных:

Таблица 1

Матрица	Размер	Матрица	Размер
Y, Y_0	Kx1	X	Kx1
a, a^T	KxK	p	KxL
u	Kx1	R, $У_0$	KxK
c	LxK	q	KxK
c^T	KxL	V	KxK
Z	Lx1	N	LxL
n	Lx1	N^{-1}	LxL

Далее рассмотрим частный случай: одномерный вариант процедуры линейной оптимальной фильтрации, характеризуемый условиями:

$$K=1,\ L=1,\ a=0,\ c=1, \tag{1.7}$$

при которых математическое описание (1.1) – (1.6) принимает вид:

$$dY/dt = u + v,\ t_0\le t\le t_E,\ Y\,(t_0)=Y_0, \tag{1.8}$$

$$Z = y +n, \tag{1.9}$$

$$dR/dt = V – R^2/N,\ R\ (t_0)= У_0, \tag{1.10}$$

$$p = R/N, \tag{1.11}$$

$$dX/dt = p\ (Z\text{-}X) + u,\ X\ (t_0)= y_0. \tag{1.12}$$

В дальнейшем математическое описание (1.8) – (1.12) будет рассмотрено при следующих критериальных условиях: 1) измеряемая переменная Z должна быть лучше (точнее) априорной переменной Y; 2) фильтрованная переменная X (оценка априорной переменной) должна быть лучше (точнее) измеряемой переменной Z. Задача заключается в определении интенсивностей V, N априорного и измерительного шумов, при которых реализуются указанные критериальные условия, выполнение которых доставляет эффект процедуры фильтрации.

2. Математическое описание решения задачи

Поставленную задачу можно выразить критериальной зависимостью

$$\{V, N\} = \arg\{F_{YZ}>F_{YZ}^0;\ F_{ZX}> F_{ZX}^0\}, \tag{2.1}$$

смысл которой заключается в том, что интенсивности V, N являются аргументами критериальных условий, записанных в фигурных скобках, где $F_{YZ}^0 >1$ – заданная величина превышения погрешности априорной переменной Y над погрешностью измеряемой переменной Z, $F_{ZX}^0>1$ – заданная величина превышения погрешности измеряемой переменной Z над погрешностью фильтрованной переменной X. Функции F_{YZ}, F_{ZX}, которые назовём функциями сравнения и которые будут введены ниже, зависят только от интенсивностей V, N. Другими словами, первое неравенство в фигурных скобках (2.1) выражает первое критериальное условие, второе неравенство выражает второе критериальное условие. Одновременное выполнение обоих неравенств доставляет эффект процедуры оптимальной фильтрации, определяемой функцией сравнения F_{YX}: превышение погрешности априорной переменной Y над погрешностью фильтрованной переменной X.

Для конкретизации зависимости (2.1) проделаем следующие преобразования. Применив к уравнению (1.8) и к зависимости (1.9) операцию математического ожидания, получим:

$$dy/dt = u,\ y\ (t_0)= y_0,\ t_0\le t\le t_E; \tag{2.2}$$

$$z = y, \tag{2.3}$$

где учтено, что V, N – центрированные белые шумы. Применив операцию центрирования к уравнениям (1.8), (1.12) и к зависимости (1.9), получим:

$$dY^0/dt = v,\ Y^0\ (t_0)= Y^0_0, \tag{2.4}$$

$$Z^0 = n, \tag{2.5}$$

$$dX^0/dt = p\ (Z^0\text{-}X^0),\ X^0\ (t_0)= Y^0_0. \tag{2.6}$$

Сформируем указанные выше функции сравнения:

$$F_{YZ} = [1/\ (t_E\text{-}\ t_0)]\int_{t0}^{tE} D_{YZ}\ (t)dt, \tag{2.7}$$

$$F_{ZX} == [1/\ (t_E\text{-}\ t_0)]\int_{t0}^{tE} D_{ZX}\ (t)dt, \tag{2.8}$$

$$F_{YX} = [1/\ (t_E\text{-}\ t_0)]\int_{t0}^{tE} D_{YX}\ (t)dt. \tag{2.9}$$

Подынтегральные функции в (2.7) – (2.9) есть:

$$D_{YZ}= D_Y^S/D_Z^S,\ D_{ZX}= D_Z^S/D_X^S,\ D_{YX}= D_Y^S/D_Z^S, \qquad (2.10)$$

где введены обозначения:

$$D_Y^S= S_Y/y',\ D_Z^S= S_Z/y,\ D_X^S= S_X/y, \qquad (2.11)$$

в которых, в свою очередь, введены обозначения:

$$S_{Y=} (Vt)^{1/2},\ S_Z= (Nt)^{1/2},\ S_X=R^{1/2} \qquad (2.12)$$

и использовано обозначение производной $y'= dy/dt$, определяемое формулой (2.2), а функция y определяется формулой

$$y=\int_{t0}^{t} u(t)dt. \qquad (2.13)$$

В выражениях (2.11) функции S_Y, S_Z – это средние квадратические отклонения (СКО) соответственно априорного и измерительного шумов, а функция S_X – это СКО фильтрованной переменной X, где функция R есть решение уравнения (1.10). Формулы для S_Y, S_Z, входящие в (2.12) – это известные зависимости СКО центрированных белых шумов от их интенсивностей [3], а формула для S_X из (2.12) есть СКО фильтрованной переменной (ошибки оценки). Формулами (2.11) определяются относительные погрешности соответственно априорной, измерительной и фильтрованной информации, на основе которых определяются подынтегральные функции (2.10), после чего осуществляется их усреднение на интервале времени $[t_0; t_E]$ согласно (2.7), (2.8), в результате определяются функции сравнения F_{YZ}, F_{ZX}, зависящие от интенсивностей V, N и входящие в критериальную зависимость (2.1).

Для реализации процедуры, выраженной критериальной зависимостью (2.1), следует организовать циклический процесс отбора интенсивностей V, N, удовлетворяющих условиям, записанных в фигурных скобках (2.1). С этой целью необходимо назначить начальные значения V_0, N_0 интенсивностей в соответствии с математическим описанием (1.7) – (1.12), реализовать вычисления функций сравнения, использовав формулы (2.7) – (2.13), осуществить проверку критериальных условий согласно (2.1), реализовать фиксацию величин интенсивностей, удовлетворяющих критериальным условиям, назначить реальные коэффициенты изменений V, N на каждом цикле, а также реальное количество циклов.

С целью определения начального значения V_0 используем решение уравнения (2.4) относительно дисперсии У переменной Y [4, с.678] при $t=t_E$

$$\text{У}_E = \text{У}_0+V_0\ (t_E-t_0), \qquad (2.14)$$

откуда

$$V_0 = (\text{У}_E-\text{У}_0)/\ (t_E-t_0), \qquad (2.15)$$

где У_0 – заданное значение дисперсии У при $t=t_0$. Для определения начального значения N_0 используем уравнение (1.10), приняв вместо $R'=dR/dt$ модуль её среднего значения на интервале времени $[t_0; t_E]$.

$$R_C'=|R_E-R_0|/\ (t_E-t_0). \qquad (2.16)$$

Учитывая, что $R_0= \text{У}_0$ и что функция R=R (t) – решение уравнения (1.10) – является монотонно убывающей от значения У_0 до значения R_E, причём это убывание оценим отношением $\text{У}_0/R_E$, значение которого можно оценить величиной

$$F_{YX}^0= F_{YZ}^0F_{ZX}^0, \qquad (2.17)$$

где F_{YZ}^0, F_{ZX}^0- заданные критериальные величины, а значит величина R_E определится формулой

$$R_E = У_0 / (F_{YX}^0)^2. \qquad (2.18)$$

В уравнение (1.10): вместо dR/dt подставив R_C□, вместо R подставив R_E, вместо V подставив V_0, вместо N подставив N_0, получим уравнение

$$R_C^{\square} = V_0 - (R_E)^2/N_0. \qquad (2.19)$$

Решив это уравнение относительно N_0, получим

$$N_0 = (R_E)^2/ (V_0 - R_C^{\square}), \qquad (2.20)$$

где V_0, R_E, R_C□ определяются соответственно формулами (2.15), (2.18), (2.16).

После определения величин интенсивностей V, N, удовлетворяющих критериальным условиям (2.1), то есть после применения указанной выше циклической процедуры, целесообразно подтвердить эффекты, характеризуемые функциями сравнения (2.7), (2.8), (2.9) численным моделированием процедуры фильтрации использованием уравнений (2.4), (2.6) и зависимости (2.5) и приближениями центрированных шумов v, n формулами [5].

$$v = x_v S_v, \; n = x_n S_n, \qquad (2.21)$$

где x_v, x_n – заданные аргументы линеаризованной функции Лапласа нормального распределения центрированной случайной величины на допустимо малом интервале изменения её аргумента; S_v, S_n – СКО шумов v, n, определяемых формулами:

$$S_v = (Vt)^{1/2}, \; S_n = (Nt)^{1/2}. \qquad (2.22)$$

Подставляя (2.2) в (2.21) и затем полученные зависимости подставляя в уравнение (2.4) с учётом (2.22) и в зависимость (2.5), получаем:

$$dY^0/dt = =x_v (Vt)^{1/2}, \; Y^0 (t_0) = Y^0{}_0, \qquad (2.23)$$

$$Z^0 = x_n (Nt)^{1/2}. \qquad (2.24)$$

В результате интегрирования системы (2.23), (2.24), (1.10), (2.6) с присоединением зависимости (1.11) получаем решения:

$$Y^0 = Y^0 (t), \; Z^0 = Z^0 (t), \; X^0 = X^0 (t), \; t_0 \le t \le t_E, \qquad (2.25)$$

то есть центрированные составляющие переменных Y, Z, X в виде функций времени, после чего находим их усреднённые СКО на интервале времени $[t_0; t_E]$:

$$g_Y = [1/ (t_E - t_0)]\int_{t0}^{tE} [Y^0 (t)/x_y]\, dt, \qquad (2.26)$$

$$g_Z = [1/ (t_E - t_0)]\int_{t0}^{tE} [Z^0 (t)/x_z]\, dt, \qquad (2.27)$$

$$g_X = [1/ (t_E - t_0)]\int_{t0}^{tE} [X^0 (t)/x_x]\, dt, \qquad (2.28)$$

где x_y, x_z, x_x – заданные аргументы линеаризованной функции Лапласа нормального распределения центрированной случайной величины на допустимо малом интервале изменения её аргумента. Определив величины, находим соответствующие функции сравнения:

$$f_{YZ} = g_Y/g_Z, \; f_{ZX} = g_Z/g_X, \; f_{YX} = g_Y/g_X, \qquad (2.29)$$

которые сравниваем соответственно с функциями сравнения (2.7), (2.8), (2.9) при одних и тех же найденных интенсивностях V, N в описанной выше циклической процедуре их отбора согласно критериальной зависимости (2.1).

3. Об алгоритме

На основе выполненного математического описания составлен алгоритм решения поставленной задачи. Алгоритм состоит из двух частей: детерминированной с использованием математического описания (2.1) – (2.20) и вероятностной с использованием математического описания (2.21) – (2.29). На вход алгоритма подаётся следующая исходная информация: 0) критериальные параметры F_{YZ}^0, F_{ZX}^0; 1) параметры априорной информации t_0, t_E, y_0, u=u{t), параметр D_A относительной погрешности начального условия $У_0$, при котором $У_0= (D_A y_0)^2$; 2) функция-имитация измерений согласно (2.3), (2.13); 3) вероятностные характеристики центрированных случайных переменных x_v, x_n, x_y, x_z, x_x; 4) параметры k_v, k_n, k_0 варьирования интенсивностей V, N для их отбора согласно критериальным условиям (2.1); 5) параметр D_t относительной дискретности по времени для численного решения дифференциальных уравнений, при котором абсолютный шаг решения $\Delta t=D_t$ (t_E-t_0). На выходе детерминированной части алгоритма фиксируются значения интенсивностей V, N, удовлетворяющих критериальным условиям (2.1), и соответствующие значения функций сравнения F_{YZ}, F_{ZX}, F_{YX}. На выходе вероятностной части алгоритма фиксируются значения функций сравнения f_{YZ}, f_{ZX}, f_{YX} при зафиксированных на выходе детерминированной части значениях интенсивностей V, N.

4. О программе

На основе составленного алгоритма разработана программа, позволяющая варьировать исходную информацию, как параметрическую, так и функциональную, то есть задавать априорную функцию u=u (t) и определять соответствующую функцию-имитацию измерений.

В частности, был рассмотрен вариант возможного повышения точности об ускорении объекта, движущегося вдоль горизонтальной прямой относительно не вращающейся Земли. Критериальные функции сравнения заданы неравенствами: $F_{YZ}^0>1,4$; $F_{ZX}^0>1,2$. Априорная информация о движении объекта задана функцией, являющейся производной по времени от функции ускорения объекта с погрешностью, характеризуемой центрированным белым шумом постоянной интенсивности с нормальным законом распределения. На объекте установлен вдоль указанной выше прямой акселерометр-измеритель ускорения объекта, имеющий погрешность, характеризуемую центрированным белым шумом постоянной интенсивности с нормальным законом распределения. Программа находит значения интенсивностей априорного и измерительного шумов, при которых имеет место заданная величина эффекта повышения точности акселерометра при подключении к его выходу обработку информации согласно разработанной программе, реализующей процедуру оптимальной фильтрации согласно поставленной задаче. Например, если объект движется в режиме разгона при изменении его ускорения от нуля до 50 м/с^2 в течение 1000с с заданной относительной погрешностью начального условия $D_Y=10^{-3}$ и вероятностными характеристиками случайных переменных на уровне «три сигма» с относительным шагом решения по времени $D_t=10^{-7}$ программа находит и фиксирует следующие значения реальных функций сравнения: $F_{YZ}=3,7$; $F_{ZX}=1,20$ с результирующим эффектом, определяемым функцией сравнения $F_{YX}=4,56$, при которых относительные СКО шумов имеют значения: $D_v=0,61$; $D_n=0,18$ и интенсивности шумов имеют значения: $V=3,75x10^{-6}$м^2/с^5; $N=4,17x10^{-2}$м^2/с^3. При этом функции сравнения (2.29), вычисленные во второй, вероятностной части алгоритма, отличаются от соответствующих функций сравнения (27) – (2.9), вычисленных в первой, детерминированной части алгоритма, не более, чем на 10%.

Заключение

1. Изложен подход решения задачи анализа эффекта линейной оптимальной фильтрации для одномерного процесса, основанный на двух критериальных условиях: измеряемая информация о процессе должна быть лучше априорной, а фильтрованная информация должна быть лучше измеряемой.

2. Выполнено математическое описание, составлен алгоритм и разработана программа решения поставленной задачи, позволяющие при заданных величинах критериальных условий и информации о процессе, определять информацию об эффекте, доставляемом процедурой фильтрации с фиксацией соответствующих интенсивностей априорного и измерительного шумов.

3. Приведён пример моделирования по разработанной программе: указаны вводимая исходная числовая информация и положительные результаты вычислений.

4. Полученные результаты могут быть использованы при разработке измерительного устройства для анализа потенциальной возможности повышения его точности аппаратом линейной оптимальной фильтрации и при наличии желаемого эффекта применить разработанную программу к обработке выходной информации этого устройства. В частности, полученные результаты могут быть использованы для повышения точности акселерометра инерциальной навигационной системы.

5. Использованный подход к решению поставленной задачи может быть обобщён на многомерный вариант математического описания линейной оптимальной фильтрации. Но следует заметить, что в данной работе при нахождении решений уравнений относительно центрированных составляющих случайных переменных использованы приближения белых шумов на основе линеаризованной функции Лапласа нормального закона распределения в окрестности малого интервала изменения её аргумента. Это ограничение может быть снято, например, использованием в численных решениях модели генератора белого шума заданной интенсивности [6].

Список литературы:

1. Калман Р.Е., Бьюси Р.С. Новые разработки в теории линейной фильтрации и предсказания // Теоретические основы инженерных расчётов. -1961. – №1 – СерД – с.95 – 108.
2. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачёва. – М.:Логос,2006. – 640 с.
3. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч.2. Введение в теорию фильтрации / Изд. 3 -е, исправленное и дополненное. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. – 428 с.
4. Щипицын А.Г. Задача оценивания состояния динамического процесса // Международный журнал экспериментального образования. – 2015 – №12-5. – С. 677-682.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – Изд. 13-е. – М.: Наука, 1980. – 544 с.
6. Васильев А. Н. MATLAB. САМОУЧИТЕЛЬ. ПРАКТИЧЕСКИЙ ПОДХОД. 2-Е ИЗДАНИЕ. – СПб.: Наука и Техника, 2015. – 448 с.: ил.