DOI 10.37539/2949-1991.2024.5.16.024
УДК 536.2

Тимченко Татьяна Владимировна,
старший преподаватель, РТУ МИРЭА,
Институт тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова,
Москва, 119571, Россия

Сафонов Тимофей Сергеевич, студент
РТУ МИРЭА,
Институт тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова
Москва, 119571, Россия

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОРПУСАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МИКРОСХЕМ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Аннотация: При создании современных электронных устройств, важно следить за тепловыделением электронных компонентов, для чего используются расчеты на основе уравнения теплопроводности. В данной работе было рассмотрено аналитическое решение стационарного уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат для заданных граничных условий и последующее сравнение найденного решения с численным решением поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, численное моделирование, электроника, аналитическое решение

Введение

С развитием электронной промышленности на протяжении последнего столетия возрастает потребность в тщательном расчете тепловыделения электронных компонентов. Неконтролируемое тепловыделение приводит к энергетическим потерям и снижению срока службы устройства. Поэтому возникает необходимость в моделировании процесса тепловыделения, а именно в изучении влияния параметров материала и размеров корпуса устройства для оптимизации поверхностной температуры.

При изучении любых тепловых процессов в твердых телах используется уравнение теплопроводности, являющееся дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных и описывающее распределение температур в некой заданной области пространства.

Основной целью данной работы является аналитическое решение уравнения теплопроводности для задачи о тепловыделении и сравнение результатов полученного решения с численным решением в COMSOL путем его визуализации в Python.

Постановка математической задачи

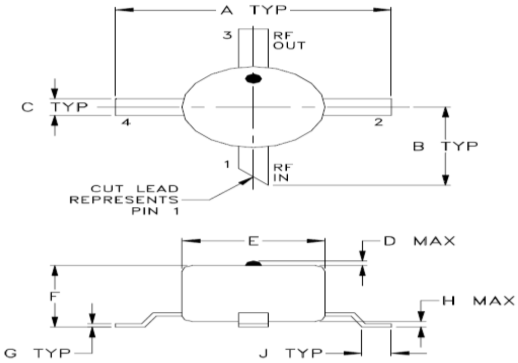


Рис. 1. Корпус усилителя

В качестве моделируемого устройства был выбран усилитель MAV-11SM (Рис. 1), который для упрощения моделирования был представлен в виде цилиндра высотой На = 4 мм и диаметром Ra = 2,8 мм с теплопроводностью k. Количество теплоты, создаваемое в результате работы этого устройства, было вычислено по данным из технической документации и составило qv = 1,56 · 107 Вт/м3. Примем, что нижнее основание цилиндра теплоизолировано, а верхнее основание и боковая поверхность находятся при стандартной температуре Та = 298К (20°С). Будем рассматривать стационарное состояние системы.

Решение уравнения теплопроводности

Учитывая геометрию рассматриваемого тела, разумно записать уравнение теплопроводности в полярных (цилиндрических) координатах [1]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(kr\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}(kr\frac{\partial T}{\partial \varphi})+\frac{\partial}{\partial z}(kr\frac{\partial T}{\partial z})+q_v=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{1}$$

Считая, что нагрев не зависит от угла поворота, а также предполагая однородность материала корпуса (из этого следует независимость k от координат), запишем дифференциальное уравнение с граничными условиями:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q_v}{k}=0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &T(R_a;z)=T_a\\ &T(r;H_a)=T_a\\ &T_z(r;0)=0\\ &T_r(0;z_a)=0 \end{aligned} \tag{3}$$

где za – некая точка на оси z.

Решение данного уравнения будем искать в виде:

$$T(r,z)=u(r,z)+\varphi(r). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2) и разделяя функции [2], получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{\partial\varphi}{dr} - \frac{q_v}{k}. \tag{5}$$

Приравняв правую часть к нулю и решив полученное уравнение, получим:

$$\varphi(r) = -\frac{q_v r^2}{4k} + \frac{q_v {R_a}^2}{4k} + T_a. \tag{6}$$

Приравнивая левую часть к нулю, представим $u(r,z)$ в виде:

$$u(r,z) = R(r)\cdot Z(z). \tag{7}$$

Подставляя (7) в левую часть (5) и разделяя функции [3], получим:

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda, \tag{8}$$

где λ – константа разделения.

Решая левую и правую части уравнения (8) по отдельности, а затем комбинируя найденные решения, получим:

$$u(r,z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j\left(e^{\frac{\alpha_j z}{R_a}} + e^{-\frac{\alpha_j z}{R_a}}\right) J_0\left(\frac{\alpha_j r}{R_a}\right), \tag{9}$$

где J0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, αj – корни уравнения

$$J_0(\alpha_j) = 0.$$

Коэффициент Aj найдем по известным формулам из [4]:

$$A_j = -\frac{q_v {R_a}^2 J_2(\alpha_j)}{k\cdot\left(e^{\frac{\alpha_j H_a}{R_a}} + e^{-\frac{\alpha_j H_a}{R_a}}\right)\cdot {J_1}^2(\alpha_j)\cdot {\alpha_j}^2}. \tag{10}$$

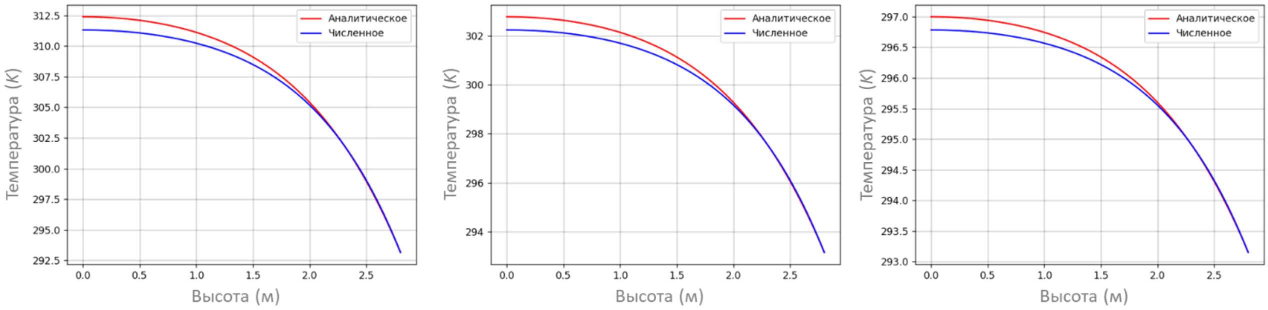
Итак, полученное решение имеет вид:

$$T(r,z) = T_a - \frac{q_v r^2}{4k} + \frac{q_v {R_a}^2}{4k} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j\left(e^{\frac{\alpha_j z}{R_a}} + e^{-\frac{\alpha_j z}{R_a}}\right) J_0\left(\frac{\alpha_j r}{R_a}\right). \tag{11}$$

Сравнение численного и аналитического решений

Для проверки правильности решения поставленной задачи было произведено численное моделирование с поставленными исходными данными в среде COMSOL Multiphysics, а также построение графиков аналитического решения при помощи Python для дальнейшего анализа.

На Рис. 2 можно наблюдать хорошую сходимость результатов обоих решений при разных значениях коэффициента теплопроводности.



коэффициент теплопроводности $k = 0{,}6$

коэффициент теплопроводности $k = 1{,}2$

коэффициент теплопроводности $k = 3{,}0$

Рис. 2. Зависимость температуры от высоты компонента $T(0;z)$
при различных коэффициентах теплопроводности

Выводы

Было получено аналитическое решение стационарного уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат для заданных граничных условий. Данное решение было визуализировано при помощи Python для проведения сравнительного анализа полученного аналитического решения с численным решением задачи о тепловыделении, сделанным в COMSOL Multiphysics. По результатам построения обоих методов графически показана идентичность найденного аналитического решения и численного расчета при задании различных коэффициентов теплопроводности.

Список литературы:

1. https://ocw.mit.edu/courses/3-185-transport-phenomena-in-materials-engineering-fall-2003/ (дата обращения: 25.05.23)
2. https://personal.math.ubc.ca/~israel/m316/nonhomog.pdf (дата обращения: 25.05.23)
3. https://math.berkeley.edu/~arash/54/notes/n4_5.pdf (дата обращения: 25.05.23)
4. https://www2.math.upenn.edu/~rimmer/math241/ch12sc6frbess.pdf (дата обращения: 25.05.23)