DOI 10.37539/2949-1991.2026.41.6.040
УДК 519.245

Терёшина Влада Валерьевна, к.э.н., доцент,
Российский технологический университет – МИРЭА

Вяткин Артём Андреевич, к.э.н.,
Российский технологический университет – МИРЭА

Терёшин Кирилл Александрович, студент,
Российский технологический университет – МИРЭА

АЛГОРИТМЫ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО В ФИНАНСОВОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Аннотация. Статья посвящена классическому методу статистических испытаний Монте-Карло. Описаны его теоретические основы, алгоритмическая схема и способы повышения точности (квази-Монте-Карло, детерминированные последовательности).

Ключевые слова: Метод Монте-Карло, статистические испытания, оценка рисков, ценообразование опционов, последовательности Соболя.

Для многих сложных систем, где присутствуют случайные факторы или аналитическое решение невозможно, наиболее эффективными оказываются методы статистических испытаний [1, с. 3]. Центральное место среди них занимает метод Монте-Карло (метод статистических испытаний). Универсальность и относительная простота реализации сделали его стандартным инструментом в финансах, физике, инженерии, биологии и многих других областях.

Название метода происходит от известного игорного дома в Монако, где широко используются рулетка и другие азартные игры, основанные на случайности. Первые работы по методу относятся к 1940-м годам, когда учёные С. Улам, Дж. фон Нейман, Н. Метрополис и др. использовали его при работе над Манхэттенским проектом для моделирования процессов переноса нейтронов [2, с. 15].

Цель данной статьи – изложить теоретические основы метода Монте-Карло, описать алгоритмическую схему его реализации, показать практические примеры из финансовой математики и обсудить способы повышения эффективности.

Основой метода Монте-Карло является закон больших чисел. Пусть x_1, x_2, x_n – независимые одинаково распределённые случайные величины с математическим ожиданием μ=E $[X]$. Тогда:

$$\frac{1}{N}\sum_{i-1}^{N} x_i \xrightarrow[N\to\infty]{P} \mu \tag{1}$$

где $\xrightarrow{P}$ обозначает сходимость по вероятности.

Это означает, что среднее арифметическое большого числа случайных реализаций сходится к истинному математическому ожиданию. Следовательно, если мы хотим вычислить неизвестное значение μ (например, интеграл, вероятность, ожидаемую выплату по опциону), мы можем оценить его как среднее по N случайным сценариям.

В соответствии с центральной предельной теоремой ошибка оценки при использовании метода Монте-Карло ведёт себя как:

$$\varepsilon N \sim \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{2}$$

где $\sigma^2 = Var\,(X)$ – дисперсия моделируемой величины. Таким образом, скорость сходимости составляет $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. Для увеличения точности в 10 раз необходимо увеличить число сценариев в 100 раз. Это свойство часто называют «медленной сходимостью» метода Монте-Карло [2, с. 78]. Общая схема метода Монте-Карло включает следующие шаги (рис. 1):

1. Построение вероятностной модели — определение входных случайных величин и их распределений.

↓

2. Генерация случайных сценариев — многократное получение реализации случайных величин в соответствии с заданными распределениями.

↓

3. Вычисление выходных характеристик — для каждого сценария рассчитывается интересующая величина (выплата по опциону, убыток портфеля, решение уравнения и т.д.).

↓

4. Статистический анализ — вычисление средних, дисперсий, квантилей, построение доверительных интервалов.

Рисунок 1. Алгоритмическая схема применения метода Монте-Карло

Ключевой элемент метода генерации случайных чисел – генератор псевдослучайных чисел. Наиболее распространены [3, с. 45]:

– Линейный конгруэнтный метод: $X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$

– Вихрь Мерсенна (Mersenne Twister) – период $2^{19937}-1$

– Генераторы на основе энтропии системы.

Для генерации величин с произвольным распределением используется метод обратной функции:

$$X = F^{-1}(U),\ U \sim \mathrm{Uniform}\,(0,1) \qquad (3)$$

где F – функция распределения целевой величины.

Методы повышения эффективности заключаются в следующем. Поскольку метод Монте-Карло является вычислительно затратным, разработаны техники уменьшения дисперсии, позволяющие повысить точность без увеличения числа сценариев [2, с. 145]:

1. Противоположные переменные (Antithetic variates). Вместо U генерируется 1-U. При моделировании выплат опционов это уменьшает дисперсию примерно в 2 раза.

2. Стратифицированная выборка. Область значений входной переменной разбивается на страты (интервалы). Из каждой страты берётся фиксированное число точек. Это особенно эффективно, когда функция имеет особенности.

3. Контрольные переменные (Control variates). Используется известное аналитическое значение родственной величины для корректировки оценки. В ценообразовании опционов часто используют базовый актив в качестве контрольной переменной.

4. Квази-Монте-Карло. Вместо случайных последовательностей используются детерминированные равномерные последовательности (последовательности Соболя,

Холтона, Фора). Они обеспечивают скорость сходимости $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ для интегралов небольшой размерности [3, с. 112].

Рисунок 2. Преимущества и недостатки метода

Метод Монте-Карло является мощным и универсальным численным инструментом, позволяющим получать надёжные вероятностные оценки там, где аналитические решения отсутствуют или чрезмерно сложны. Его применение в финансовой математике для оценки рисков (VaR) и ценообразования деривативов стало стандартом индустрии. Основной недостаток – медленная сходимость – может быть смягчён использованием методов уменьшения дисперсии, квази-Монте-Карло и параллельных вычислений. Дальнейшее развитие метода связано с гибридными подходами (комбинация Монте-Карло с машинным обучением) и применением в области анализа больших данных.

Список литературы:

1. Горлач Б. А. Методы Монте-Карло: теория и практика: учебное пособие. – Москва: Интеллект, 2020. – 304 с.
2. Дорофеюк Ю. А [и др.] Современные методы анализа данных: Bootstrap, машинное обучение и анализ временных рядов: коллективная монография / под ред. Ю. А. Дорофеюка. – Москва: Изд-во МФТИ, 2021. – 256 с.
3. Кузнецов С. П. Динамический хаос и стохастичность: учебное пособие. – Москва: Физматлит, 2019. – 356 с.
4. Труды Математического института им. В. А. Стеклова. – 2023. – Т. 321: Современные проблемы математического моделирования. – Москва: МИАН, 2023. – 312 с.
5. Тихонов Н. А., Шишкин Г. И. Вычислительные методы и математическое моделирование: учебное пособие. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 448 с.