DOI 10.37539/2949-1991.2024.18.7.007

Бородин Виктор Иванович,
Кандидат технических наук,
ведущий специалист
ООО «Газпром Межрегионгаз»
г. Санкт-Петербург

О МОДЕЛЬНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СИНТЕЗА СТРУКТУР ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПОДСИСТЕМ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Аннотация: Современные тенденции развития в области компьютеризации управления порождают проблемы синтеза оптимальных структур их вычислительных многопроцессорных подсистем. Для решения этих проблем необходим как минимум достаточно адекватный и удобный формальный язык. В качестве такого языка предлагается теория моделей (алгебраических систем).

Ключевые слова: многопроцессорная система, теория моделей, вычислительные системы, искусственный интеллект.

Современные тенденции развития в области компьютеризации управления порождают определенные проблемы синтеза оптимальных структур их вычислительных подсистем (ВС), обусловленные тем, что во многих случаях они являются многопроцессорными системами или вычислительными сетями. Для решения этих проблем необходим как минимум достаточно адекватный и удобный формальный язык. Ниже в качестве такого использована теория моделей (алгебраических систем) [1, 2, 3]. Причина этого выбора будет мотивирована по ходу изложения.

Будем считать, что ВС системы управления содержит множество вычислителей

$$C = \{C_i \mid 1 \le i \le m\},$$

с помощью которых в интересах управления решается множество задач

$$X = \{X_j \mid 1 \le j \le n\}.$$

В соответствии с ориентацией на теорию моделей будем предполагать, что на множествах X и C заданы определенные отношения

$$\Phi = \{\Phi_k \subseteq X^l \mid 1 \le k \le p,\ 1 \le l \le s\},$$

$$\Psi = \{\Psi_q \subseteq C^r \mid 1 \le q \le u, 1 \le r \le v\},$$

необходимой арности, что приводит к моделям

$$M = < X, \Phi >,\ \ N = < C, \Psi >.$$

Под внутренней структурой ВС условимся понимать объект вида $S=<M,N,f>$ или $S=<X,\Phi,C,\Psi,f>$, где $f \subseteq X \times C$ – соответствие (в частности, отображение) из X в C (из M в N). При таком определении внутренней структуры ВС сохраняется достаточная абстракция данного понятия. Оно наполняется конкретным содержанием всякий раз, когда задаются конкретные отношения $\Phi i \subseteq \Phi$ и $\Psi j \subseteq \Psi$, равно как и соответствие f вместе с предметными областями их интерпретации [4]. Поэтому объект S представляет собой схему внутренних структур, в которой выражается каждая конкретная из них. Это означает, что для любой ВС можно определить ряд её внутренних структур, задавая нужные отношения $\Phi i \in \Phi$, $\Psi j \in \Psi$ при фиксированных X, C и f. Тем самым появляется возможность обеспечивать нужную полноту исследований внутреннего строения ВС. Более того, в распоряжении разработчиков ВС оказывается обширный арсенал знаний, накопленных в теории моделей и относящихся к фундаментальным результатам современной математики и математической логики [6]. Поэтому можно считать, что данный подход к синтезу структур ВС согласуется с путями развития искусственного интеллекта.

Будем считать, что с достаточной степенью общности любая задача $Xi \in X$ может быть представлена объектом вида

$$X_j =< D(X_j), R(X_j), A(X_j)) > \tag{1}$$

или

$$X_j =< D^H(X_j, D^З(X_j), A(X_j)) > \tag{1'}$$

в предположении, что

$$D(X_j) = D^H(X_j) \cup D^З(X_j),\ D^H(X_j) \,|\, D^З(X_j) = \varnothing,$$

где *D (Xj)* – множество величин, представляющих исходные данные задачи *Xj*; *R (Xj)* – множество величин, представляющих результаты решения задачи *Xj*; *A (Xj)* – алгоритм (в частности, программа) решения задачи *Xj*; *Dн (Xj)* – множество величин, представляющих те исходные данные задачи *Xj*, которые не являются решения других задач (независимые исходные данные); *D*З (*Xj*) – множество величин, представляющих те исходные данные задачи *Xj*, которые являются результатами решения других задач (зависимые исходные данные).

Положим

$$\left.\begin{aligned} D &= \bigcup_{j=1}^{n} D(X_j)\ , \\ D^н &= \bigcup_{j=1}^{n} D^H(X_j), \\ D^{\acute{K}} &= \bigcup_{j=1}^{n} D^{,}(X_j), \\ R &= \bigcup_{j=1}^{n} R(X_j)\ . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Аналогичным образом конкретизируем понятие вычислителя и положим

$$C_i =< St(C_i), \Pr(C_i), In(C_i, Ot(C_i)) >, \tag{3}$$

где *St (Ci)* – множество величин, представляющих память вычислителя *Ci*; *Pr (Ci)* – объект, представляющий операциональное устройство (процессор) вычислителя *Ci*; *In (Ci)* – множество величин представляющих информационные входы вычислителя *Ci*; *Ot (Ci)* – множество величин, представляющих информационные выходы вычислителя *Ci*, а также обозначим

$$\left.\begin{aligned} St &= \bigcup_{i=1}^{m} St(C_i), \\ Pr &= \bigcup_{i=1}^{m} Pr(C_i), \\ In &= \bigcup_{i=1}^{m} In(C_i), \\ Ot &= \bigcup_{i=1}^{m} Ot(C_i). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Представления (1) и (1′) задач и представление (3) вычислителей в виде составных объектов сохраняют достаточную общность этих понятий и одновременно обогащают понятие внутренней структуры ВС. Появляется возможность рассматривать как задачи, так и вычислители с различных точек зрения, рассматривая те или иные составляющие их определений, а также соответствий между ними. Формально это проявляется в том, что помимо множеств *X* и *C* можно рассматривать множества (2) и (4), равно как и различного рода соответствия между ними. В то же время сохраняется единая схема представления всех внутренних структур ВС.

Таким образом, применение теории моделей в качестве языка представления внутренних структур ВС систем управления потенциально обеспечивает необходимую полноту описания ВС, а также единую методическую базу их исследования.

Введем в рассмотрение отношение информационной зависимости задач $\Phi 1 \subseteq X2$, положив [2].

$$\Phi_1 = \{(X_i, X_j) \in X^2 \left(R(X_i) \cap D(X_j) \neq \varnothing \right\}.$$

Условие (Xi, Xj) $\in$ Φ1 означает, что некоторые результаты *R* (*Xi*) задачи *X*i одновременно являются исходными данными задачи *Xj* и поэтому задачу *Xj* нельзя решить, не решив предварительно задачу *Xi*. Поэтому модель *M*=<*X*, Φ1> не только задает множество задач ВС, но и определяет их взаимную информационную зависимость.

Рассмотрим также отношение информационного сопряжения вычислителей, положив [2].

$$\Psi_1 = \{(C_k, C_l) \in C^2 \left(Ot(C_k) \cap In(C) \neq \varnothing \right\}.$$

Условимся считать, если $(Ck,Cl) \in \Psi 1$, то вычислитель *Ck* информационно сопряжен с вычислителем *C*l и в процессе работы ВС может происходить передача данных из *Ck* в *Cl*. Поэтому модель *N*=<*C*,Ψ*1*> не только задает множество вычислителей ВС, но и определяет структуру их информационного сопряжения друг с другом.

Для описания размещения задач по вычислителям ВС воспользуемся понятием гогоморфизма моделей [1, 2, 7]. Пусть $f: M \to N$ есть гогоморфизм *M* в *N*, так что отображение

$$f: X \to C \qquad (5)$$

задает размещение задач множества *X* в множестве вычислителей *C*, а импликация

$$(Xi, Xj) \in \Phi 1 \Rightarrow (f(Xi), f(Xj)) \in \Psi 1 \qquad (6)$$

есть условие согласования отношений Φ*1* и Ψ1 (согласованного размещения *X* в *C*).

Данное представление размещения *f* будем трактовать следующим образом. Если задача *Xi* помещается в вычислитель *Ck*, то полагаем *f (Xi) = Ck*. Если задачи *Xi* и *Xj* информационно зависимы (*Xi, Xj*) $\in$Φ1, то соответствующие им вычислители *Ck = f (Xi)* и *Cl = f (Xj)* должны быть информационно сопряжены (*Ck, Cl*) $\in$ Ψ1. Тем самым будет обеспечена возможность передачи данных $R(X_i) \cap D(X_i)$ от задачи *Xi* к задаче *Xj* по информационному сопряжению $Qt(C_k) \cap In(C_l)$ вычислителя *Ck* с вычислителем *Cl*. Если задачи *Xi* и *Xj* помещаются в один и тот же вычислитель *Ck=f (Xi)=f (Xj)*, то из условия (6) получаем $(Ck,Ck) \in \Psi 1$, что равносильно $Qt(C_k) \cap In(C_l) = \varnothing$. Следовательно, необходимо либо допускать возможность информационного сопряжения любого вычислителя с самим собой, либо изменить определение Ψ*1*, положив, например,

$$\Psi_l = \{(C_k, C_l) \in C^2 \mid Ot(C_k) \cap In(C_l) \neq \varnothing \text{ или } f(X_i) = f(X_j)\}.$$

Примем первую точку зрения и будем трактовать случаи *Ck=f (Xi)=f (Xj)* как способность вычислителя запоминать в своей памяти *St (Ck)* результаты решения *R (Xi)* одной задачи *Xi* и использовать часть из них в качестве исходных данных другой задачи *Xj*.

Таким образом, схема *S* внутренней структуры ВС получает конкретное содержание *S=<X,Ф1,C,Ψ1,f>*, отражающее соответствующие аспекты внутреннего строения ВС (информационную зависимость задач, информационное сопряжение вычислителей, а также согласованное размещение задач по вычислителям). Это дает возможность сформулировать ряд задач структурного проектирования ВС систем управления.

Пусть $Y \subseteq X$. В соответствии с [2] введем обозначения

$$\beta(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\},$$

$$X_i\Phi 1 = \{X_j \in X \mid (X_i, X_j) \in \Phi 1\},$$

$$\Phi 1 X_j = \{X_i \in X \mid (X_i, X_j) \in \Phi 1\},$$

$$Y\Phi_l = \{X_j \in X \mid \exists (X_i \in Y)[(X_i, X_j) \in \Phi_l]\} = \bigcup_{X_i \in Y} X_i \Phi_l,$$

$$\Phi_l Y = \{X_i \in X \mid \exists (X_j \in Y)[(X_i, X_j) \in \Phi_l]\} = \bigcup_{X_j \in Y} \Phi_l X_j,$$

$$\Delta X = \{(X_i, X_i) \in X2 \mid 1 \le i \le n\},$$

$$\Phi_l^+ = \Phi_1 \bigcup \Phi_l^2 \bigcup \ldots \bigcup \Phi_l^r, 1 \le r,$$

$$\Phi_l^* = \Phi_l^+ \bigcup \Delta_X.$$

Будем считать, что работа ВС состоит в выполнении заданий, поступающих от системы управления, а каждое задание есть предписание на решение набора задач $Y \in \beta(X)$. Выполнение задания сводится к решению всех задач $X_j \in Y$ с помощью вычислителей *Cl=f (Xj)*. Так как задачи связаны отношением информационной зависимости Ф*l*, то решение любой из них $X_j \in Y$ может потребовать предварительного решения некоторых других задач, именно $X_i \in \Phi_l^+ Y$.

Поэтому выполнение задания $Y \in \beta(X)$ сводится к решению всех задач $X_i \in Y \bigcup \Phi_l^+ Y = \Phi_l^* Y$.

Предположим, что условиями на проектирование (синтез) структуры *C* предусмотрен режим распараллеливания вычислительного процесса на уровне задач. Это означает, что каждое задание $Y \in \beta(X)$ должно выполняться в режиме параллельной работы вычислителей *Ck=f (Xj)*, одновременно решающих задачи $X_j \in \Phi_l^* Y$ таким образом, что в любой момент времени каждый вычислитель решает не более одной задачи. В силу информационной зависимости задач не все из $X_j \in \Phi_l^* Y$ могут в общем случае решаться одновременно. Это обстоятельство налагает определенные ограничения на возможности распараллеливания вычислительного процесса. Далее, для выполнения каждого задания $Y \in \beta(X)$ необходимо, чтобы размещение (5) обеспечивало такое распараллеливание всех задач $X_j \in \Phi_l^* Y$ по вычислителям *Cl=f (Xj)*, которое удовлетворяло бы условию согласования (6) В связи с изложенным представляются важными следующие задачи синтеза оптимальных структур ВС систем управления.

Задача *SP*1 (о разложении множества задач)

Для любой ВС, содержащей модель *M=<X, Ф1>*, найти такое разложение множества *X* на его подмножествах $X(i) \subseteq X$, в совокупности покрывающих *X*, что все задачи каждого *X (i)* можно решать одновременно.

Задача *SP*2 (о максимальном подмножестве задач)

Для любой ВС, содержащей модель *M=<X,*Ф1>, найти такое максимальное (по числу элементов) подмножество $X(i)_{max} \subseteq X$, все задачи которого можно решать одновременно.

Задача *SP*3 (о минимальном множестве вычислителей)

Для любой ВС, содержащей модель M=<X,Ф1>, найти минимальное (по числу элементов) множество вычислителей $Cmin$, достаточное для одновременного решения максимально возможного числа задач каждого задания $Y \in \beta$ (X).

Задача *SP*4 (о частично минимальном размещении)

Для любой ВС, содержащей модель M=<X,Ф1> и минимальное множество вычислителей $Cmin$, достаточное для одновременного решения максимально возможного числа задач $Xj \in Ф1Y$ каждого задания $Y \subseteq \beta$ (X), найти согласованное по условию (6) размещение задач $X_j \in \Phi_l^* Y$ по вычислителям f (Xj)=$Cl \in Cmin$, то есть построить гогоморфизм f:<X,Фl>→<$Cmin$,Ψl> модели M в модель N.

Задача *SP*5 (о минимальном размещении)

Для любой ВС, содержащей модель M=<X,Ф1> и минимальное множество вычислителей $Cmin$, достаточное для одновременного решения максимально возможного числа задач $X_j \in \Phi_l^* Y$ каждого задания $Y \in \beta$ (X), найти такое согласованное по условию (6) размещение (5) задач $X_j \in \Phi_l^* Y$ по вычислителям Cl=f $(Xj) \in Cmin$, при котором различные вычислители из $Cmin$ сопряжены минимальным числом связей (Ck,Cl)∈Ψ1 при k≠l, то есть построить гогоморфизм f: <X,Ψ1> → <$Cmin$, (Ψ1 \ ΔC)min> модели M в модель N.

Задача *SP*6 (о размещении с ограничением)

Для любой ВС, содержащей модель M=<X,Ψl> и заданное множество вычислителей Cзад, найти такое согласованное по условию (6) размещение задач по вычислителям (5), при котором может одновременно решаться максимально допустимое число задач $X_j \in \Phi_l Y$ каждого задания $Y \in \beta$ (X) с помощью вычислителей Cl=f $(Xj) \in C$зад, то есть построить гомоморфизм f: <X,Фl>→<Cзад,Ψl> модели M в модель N.

Задача *SP*7 (о минимальном размещении с ограничением)

Для любой ВС, содержащей модель M=<X, Фl> и заданное множество вычислителей Cзад, найти такое согласованное по условию (6)размещение задач на вычислителях (5),при котором может одновременно решаться максимально допустимое число задач $X_j \in \Phi_l^* Y$ каждого задания $Y \in \beta$ (X), с помощью вычислителей Cl=f $(Xj) \in C$зад, а сами вычислители Ck, $Cl \in C$зад сопряжены минимальным числом связей (Ck,Cl)∈Ψ1 при k≠l, то есть построить гогоморфизм f:<X,Ф1>→ <Cзад, (Ψ1\ΔC)min> модели M в модель N.

Теория моделей располагает достаточно простыми средствами для решения перечисленных задач.

Рассмотрим систему подмножеств множества X

$$\left.\begin{aligned} X^{(0)} &= \{X_k \in X \mid \Phi X_k = \varnothing\} \\ X^{(i)} &= \{X_k \in X \mid i = \max_{X_k \in X\Phi^r} (| r = \{1..l\} |)\}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Непосредственно из определений (7) следует, что совокупность подмножеств $X^{(i)} \subseteq X, 0 \le i \le l$ представляет собой разбиение [1, 4, 6, 7] множества X на попарно непересекающиеся классы, так что

$$X = \bigcup_{i=0}^{l} X^{(i)}, \quad (8)$$

для которых справедливо $X^{(i)} \neq X^{(j)}, i \neq j$. Легко видеть, что классы (ярусы) состоят из информационно независимых задач. Назовём ярус *X* (0), базисом множества *X* (модели *M*), вкладывая в это название тот смысл, что все задачи базиса информационно не зависят не только друг от друга, но и от задач других ярусов (8). В отличие от этого задачи любого яруса *X ()i*, *i* > 1 информационно зависят хотя бы от одной задачи класса *X (j)*, где *i* > *j*. Упорядочим ярусы, считая *X (i)* < *X (j)* тогда и только тогда, когда *i*<*j*.

Рассмотрим произвольное задание $Y \in \beta(X)$.Его выполнение сводится к решению всех задач подмножества $\Phi_l^* Y \subseteq X$. В силу разбиения (7) найдутся такие

$$Y^{(i)} \subseteq X^{(i)}, \text{ что } \Phi_l^* Y = \bigcup_{Y^{(i)} \neq \varnothing} Y^{(i)}.$$

Поэтому число задач *my*, которые можно решать одновременно в процессе выполнения задания $Y \in \beta(X)$, определяется равенством

$$m_Y = \max(|Y^{(i)}|),$$

где $|Y(i)|$ – число элементов множества *Y (i)*.

Полагая *Y* = *X*, получим из равенства

$$m_X = max(|X^{(i)}|)$$

решение задачи *SP*2, то есть найдем такое $X\ (i)max \subseteq X$, что $|X(i)| = mx$.

Снова рассмотрим гогоморфизм (5) и с учетом разложения (8) представим его в виде

$$f = \bigcup_{i=0}^{i} f_i, \tag{9}$$

где *fi*: $X\ (i) \to C$.

Дополнительно к условию (6) потребуем, чтобы для каждого яруса *X (i)*, $0 \leq i \leq 1$ выполнялось условие

$$(Xi \neq Xj) \Rightarrow (f\ (Xi) \neq f\ (Xj)) \tag{10}$$

для всех *Xj*, $Xk \in X\ (i)$. Тогда, очевидно, равенство $|X\ (i)max| = |Cmin|$ дает решение задачи *SP*3.

Известно [1, 4], что ядерная эквивалентность $q = f f^{-1}$ однозначно определяет такое разбиение множества *X* на совокупность *X/q* попарно непересекающихся классов $Xjq \in X/q$, что

$$X = \bigcup_{X_j q \in X/q} X_j q = \{ X_k \in X \,|\, (X_j , X_k).$$

$$X_j q = \bigcup_{Y^{(i)} \subseteq X^{(i)}} Y^{(i)}, |Y^{(i)}| \leq l \tag{11}$$

для всех $Xjq \in X/q$.

Выберем *C*=*Cmin*. Тогда, очевидно, отображение (9) будет сюръективным. Применяя к нему основную теорему о разложении отображений [1], получим

$$f = \varepsilon^\circ f',$$

где ε = *nat q* – естественное отображение ε: $X \to X/q$, *f′* – взаимно однозначное соответствие $f: X/q \to Cmin$, так что для каждой задачи $Xj \in X$ имеем

$$f\ (Xj) = \varepsilon\ (Xj) \circ f\ (Xjq) = Ck \in Cmin. \tag{12}$$

Это означает, что каждой задаче размещение (12) сопоставляет единственный класс ε *(Xj)*=*Xjq*, а каждому классу *Xjq* – единственный вычислитель $f'(Xjq) = Ck \in Cmin$. Каждое такое размещение в силу соотношений (9)- (12) удовлетворяет условиям задачи *SP*4 и поэтому является ее решением. Обозначим через *Kf* класс таких размещений. Предложим следующий простой способ построения *f*∈*Kf*.

Способ А. Возьмём *C*1∈*Cmin* и сопоставим ему в точности по одной задаче $X_1^{(i)}$ из каждого класса *X (i)*, 0 ≤*i*≤ *l*. Получим класс $\varepsilon(X_1^{(i)}) = X_1^{(i)}q$ и его размещение $f'(X_1^{(i)}q)=C1$. Затем возьмем *C*2∈*Cmin*\{*C1*} и сопоставим ему в точности по одной задаче $X_2^{(i)}$ из каждого непустого класса $\{X^{(i)} \backslash \{X^{(i)} \backslash X_1^{(i)}\}$,0≤*i*≤*l*. Получим класс $\varepsilon(X_2^{(i)}) = X_2^{(i)}q$ и размещение $f'(X_2^{(i)}) = C_2$. Продолжая этот процесс до тех пор, пока не будут выбраны все *Ck*∈*Cmin*, получим искомое размещение *f*∈*Kf*.

Используя известные [3] взаимные зависимости между множествами и определяющими их предикатами, можно показать, что импликация (6) равносильна соотношению

$$\Psi_l = \{(C_k, C_l) \in C^2 \left(\exists((X_i, X_j) \in \Phi_l)[C_k = f(X_k), C_l = f(X_j)]\right\} \cup \Psi_Д. \tag{13}$$

Подмножество ΨД задает те свойства отношения ψ*l*, которые не касаются условия согласования (6). Поэтому положим ψД=∅. В этом случае зависимость (13) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классом *Kf* допустимых размещений и классом *K*Ψ*l* и порождаемых им сопряжений Ψ*l*∈*K*Ψ*l*.

Рассмотрим задачу *SP*5. Пусть $(X_i, X_j) \in \Phi_1 \cap q$. Тогда (*Xi*,*Xj*)∈Φ1 и (*Xi*,*Xj*)∈*q*. Отсюда для искомого *f*∈*Kf* согласно (12) получаем *f (Xi)=f (Xj)=Ck*∈*Cmin*, что преобразует условие (6) к виду (*Xi*,*Xj*)∈Φ*1*⇒(*Ck*,*Cl*)∈Ψ*1*. Следовательно, если пересечение $\Phi_1 \bigcap q$ максимально (по числу элементов) или, что равносильно, разность $\Phi_1 \backslash \Phi_1 \cap q$ минимальна, то отношение (13) содержит минимум недиагональных пар. Отсюда заключаем, что всякое размещение *f*∈*Kf*, удовлетворяющее условию минимальности

$$(\Psi_l \backslash \Delta_C)min| = \min_{f \in K_f}(|\Phi_l \backslash \Phi_l \cap q|), \tag{14}$$

дает решение задачи *SP*5 (порождает множество (Ψ1\ Δ*C*)*min*).

Из определений (7) и (8) классов *X (i)*, 0≤*i*≤l легко видеть, что имеет место разложение

$$X = X^{(0)}\Phi_1^* = \bigcup_{X_j \in X^{(0)}} X_j \Phi_1^*, \tag{15}$$

в общем случае представляющее собой покрытие множества *X*. Оно в свою очередь порождает покрытие

$$\Phi_l = \bigcup_{X \in X^{(0)}} \Phi_{lj}, \quad \Phi_{lj} = \Phi_l \bigcap (X_j \Phi_l^*)^2 . \tag{16}$$

Рассмотрим случай, когда разложение (15), а следовательно, и (16) является разбиением соответствующего множества на попарно непересекающиеся классы и каждый класс *Xj*Φ∗*1* представим в виде разложения

$$X_j \Phi_l^* = \bigcup_{Y_j^{(i)} \subseteq X^{(i)}} Y_j^{(i)}. \tag{17}$$

Если при этом выполняется условие

$$|Y(i)| \le 1, \tag{18}$$

для всех $Y_j^{(i)}$ X (i), то каждый класс $X_j\Phi_l^*$ удовлетворяет условиям (11) для классов $Xjq \in X/q$. Значит можно выбрать такое размещение $f \in Kf$, при котором в качестве классов Xjq выступают классы $X_j\Phi_l^*$. В этом случае получаем $q = f^o f^{-f} = \Phi_l^*$, а условие минимальности (14) дает

$$|(\Psi_l \setminus \Delta_C)_{min}| = \min_{f \in K_f}(|\Phi_l \setminus \Phi_l \cap \Phi_l^*|) = 0. \tag{19}$$

Таким образом, если разложение (15) является разбиением множества X на попарно непересекающиеся классы $X_j\Phi_l^*$, каждый из которых удовлетворяет условию (18), то существует такое размещение $f \in Kf$, что порождаемое им отношение (13) не содержит недиагональных элементов и является наименьшим в смысле (19).

Можно предложить следующий простой способ проверки существования такого наименьшего размещения $f \in Kf$ и одновременного его построения.

Способ Б. Для заданной модели M=<X, Ф1> строятся отношение Φ_l^* и разложение (15). Если последнее не является разбиением множества X, то искомое размещение не существует. В противном случае каждый класс $X_j\Phi_l^*$ представляется в виде разложения (17). Если хотя бы одно подмножество $Y_j^{(i)} \subseteq X^{(i)}$ этого разложения не удовлетворяет условию (18), то искомого разложения не существует. Иначе каждому классу $X_j\Phi_l^*$ назначается ровно один еще не занятый вычислитель. Это дает искомое наименьшее размещение.

Рассмотрим случай, когда разложение (15) является разбиением X, но для некоторых (возможно всех) его классов их разложения (17) не удовлетворяют условию (18). Для каждого такого класса найдём $m_j = \max\limits_{Y_j^{(i)} \in X^{(i)}}(|Y_j^{(i)}|)$.

Можно показать [7], что существует такое разбиение $X_j\Phi_l^* = \bigcup_{k=1}^{m_j} W_{jk}$ на попарно непересекающиеся классы Wik, которые дают максимальное покрытие класса $\Phi 1j$ разбиения (16), то есть

$$|\Phi_{lj} \cap (\bigcup_{k=1}^{m_j} W_{jk})^2| = \max_{v_r \in X_j\Phi_l^*}\left(|\Phi_{lj} \cap (\bigcup V_r)^2|\right),$$

Если каждому Wjk взаимно однозначно сопоставить один единственный вычислитель, то учитывая, что

$$\sum_{X_j\Phi_l^* \subseteq X} m_j = \max_{X^{(i)} \subseteq X}(|X^{(i)}|) = |C_{min}|,$$

получим минимальное размещение $f \in Kf$.

Случай, когда разложение (15) является покрытием множества X, но не его разбиением, сводится к рассмотренному. Для этого определим на X (0) отношение толерантности [8].

$$\Phi_3 = \{(X_i, X_j) \in (X^{(0)})^2 \mid X_i\Phi_l^* \cap X\Phi_l^* \neq \varnothing\},$$

транзитивное замыкание которого Φ_3^*, будет, естественно, эквивалентностью на *X* (0). Рассматривая разбиение $X = \bigcup_{X_j \in X^{(0)}} X_j \Phi_3^*$ в качестве разбиения (15), сводим данный случай к предыдущему.

Рассмотрим задачу *SP*6. Легко показать, что ее решения можно получить из решений задачи *SP*4. Действительно, если $Cз \subset Cmin$, то решение задачи *SP*4 будет одновременно решением данной задачи. Пусть $CЗ \subset Cmin$. Возьмем произвольное решение, полученное способом А. Ясно, что совокупность классов, *Xlq*, $1 \le l \le m\text{-}1$ данного решения образует невозрастающую последовательность $|Xiq| \ge |Xi+1q|$, $1 \le i \le m\text{-}1$, $m = |Cmin|$. Задачи каждого класса могут решаться только последовательно друг за другом одним и тем же вычислителем. Необходимо таким образом сократить число вычислителей, чтобы при выполнении любого задания $Y \in \beta(X)$ максимально возможное число его задач решалось одновременно. Поступим следующим образом. Объединим часть классов в один класс так, чтобы общее число их стало равным $|Cз|$. Слияние классов будем производить так, чтобы каждый вновь получаемый класс содержал возможно меньшее число задач. Решение этой задачи не представляет трудностей.

Рассмотрим задачу *SP*7. Покажем, что её решения можно получить, используя решения задачи *SP*5. Если $Cз \supseteq Cmin$, то каждое решение задачи *SP*5 будет также решением задачи *SP*7. Пусть $Cз \subset Cmin$, а разложение

$$X = \bigcup_{s=l}^{m_S} V_s, m = |C_{min}|, \tag{20}$$

и отображение $f\,(Xj) = \varepsilon\,(Xj) f'\,(Vs) = Cs, \varepsilon\,(Xj) = Vs$, как и отображение $\Psi 1$, вычисленное с помощью (13), представляют собой решение задачи *SP*5. Требуется так сократить число вычислителей (классов *Vs*) до величины $|Cs|$, чтобы одновременно выполнялись условия:

а) отношение Ψ1 должно содержать минимальное число недиагональных элементов,

б) при выполнении любого задания $Y \in \beta(X)$ одновременно должно решаться максимальное число задач из множества $\Phi_l^* Y$.

Можно предложить различные формальные постановки этой оптимизационной задачи. Для упрощения дела условимся понимать под решением задачи *SP*7 решение, полученное следующим способом.

Способ С. Если отношение $\Psi 1$ не содержит недиагональных пар, то задача *SP*7 отождествляется с задачей *SP*6 и её решение получается соответствующим образом. В противном случае выбирается такая недиагональная пара $(Cr, Cs) \in \Psi 1$, для которой величина $|f{-}1\ (Cr)| +\ + |f{-}1\ (Cs)|$ оказывается минимальной. Классы $Vr = f{-}1\ (Vr)$ и $Vs = f{-}1\ (Vs)$ удаляются из разложения (20) и взамен включается класс $V_r \cup V_s$. Процесс продолжается до тех пор, пока количество классов разложения (20) не станет равным $|Cз|$.

Представляет интерес исследование внутренних структур ВС, связанных с распределением данных (2) между задачами, а с учётом размещений $f \in Kf$ и между вычислителями. Для этого надо рассмотреть должные соответствия из множеств *D*, *D*н, *D*з в множество *X*, а затем исследовать свойства определяемых ими отношений на этих множествах, точнее, соответствующих моделях. По всей видимости в результате можно будет сформулировать ряд задач проектирования баз данных реляционного типа для сложных ВС (мультипроцессорных систем, вычислительных сетей и т. д.), а также выявить связи этих задач с рассмотренными выше.

В равной мере заслуживают внимания внутренние структуры, связанные с временной и емкостной сложностью алгоритмов $A\ (Xj)$ решения задач $Xj \in X$, производительностью процессоров $Pr\ (Ci)$ и памятью $St\ (Ci)$ вычислителей $Ci \in C$, связь этих структур с указанными выше. Привлекательным представляется то обстоятельство, что при постановке и решении всех этих проблем используется единая методология и единый формальный язык – теория моделей вместе с накопленными в ней знаниями фундаментального порядка. Это методологическое и аппаратное единство можно рассматривать как практическое использование принципов системного подхода, а применение знаний, аккумулированных в теории моделей – как направление, лежащее на путях искусственного интеллекта.

Список литературы:

1. Кон П. Универсальная алгебра / П. Кон. М.: Мир, 1968. 359 с.
2. Пинус А.Г. Алгебраические функции и внутренние момомогфизмы универсальных алгебр / А.Г. Пинус // Сибирский математический журнал, т. 61, №3. Новосибирск, 2020, с.669-673.
3. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры / А. Робинсон. М.: Наука, 2002. 486 с.
4. Котелевский И.А. Применение теории моделей для управления процессами решения задач в ИАСУ с учетом их информационных связей / И.А. Котелевский, О.А. Кузнеченков, Н.А. Попкова // Межвузовский сборник научных трудов «Экономика и организация интегрированных АС2». 1988, с. 187-192.
5. Куратовский К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский. М.: Мир, 1970. 830 с.
6. Кановей В.Г., Любецкий В.А. Современная теория множеств: борелевские и проективные множества. М.: МЦНМО, 2010, 320 с.
7. Шнейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок / Ю.А. Шнейдер. М.: Наука, 1971. 257 с.