

Машунин Юрий Константинович,

Доктор экономических наук, к.т.н., профессор,
Дальневосточный федеральный университет

ORCID id: 0000-0001-7071-8729

Mashunin Yuri Konstantinovich,
Doctor of Economics, Ph.D., Professor,
Far Eastern Federal University
ORCID id: 0000-0001-7071-8729

**ПРИНЯТИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ – ПАРАМЕТРОВ
МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНЖЕНЕРНЫХ СИСТЕМ НА БАЗЕ
МНОГОМЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНТЕЛЛЕКТА КОНСТРУКТОРА
MAKING OPTIMAL DECISIONS – PARAMETERS OF MULTIFUNCTIONAL
ENGINEERING SYSTEMS BASED ON MULTIDIMENSIONAL
MATHEMATICS AND DESIGNER'S INTELLIGENCE**

Abstract. Цель работы представить теорию, методы многомерной математики и интеллект конструктора в системе принятия оптимальных решений, в задачах возникающих при исследовании, проектировании и выборе параметров многофункциональных инженерных систем. В рамках теории векторной оптимизации представлены принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия <https://rdcu.be/bhZ8i>. (Работа "Vector optimization with equivalent and priority criteria" Springer Nature распространяется бесплатно).

В многофункциональных математических моделях инженерных систем целенаправленность сформирована в виде улучшения множества характеристик, (критериев), таким образом, математические модели представлены задачами векторной оптимизации.

В работе решение проблемы многофункциональности инженерных систем в выборе оптимальных параметров представлено в две стадии. На первой стадии работы показано решение выбора оптимальных параметров инженерной системы в условиях определенности и неопределенности при равнозначных критериях. На второй стадии работы, использованы интеллектуальные знания конструктора системы, который задает численные значения наиболее важного (приоритетного) критерия. Оптимальные значения параметров для приоритетного критерия вычисляется математически. Сформирована геометрическая интерпретация результатов решения N -мерной системы в двухмерную систему параметров при проектировании характеристик в относительных и физических единицах.

Abstract. The purpose of the work is to present the theory, methods of multidimensional mathematics and the intelligence of the designer in the system of optimal decision-making, in the problems arising in the research, design and selection of parameters of multifunctional engineering systems. Within the framework of the theory of vector optimization, the principles of optimality of solving vector problems with equivalent criteria and with a given priority of the criterion are presented <https://rdcu.be/bhZ8i> (The work "Vector optimization with equivalent and priority criteria" by Springer Nature is distributed free of charge.). In multifunctional mathematical models of engineering



systems, purposefulness is formed in the form of improving a set of characteristics (criteria), thus, mathematical models are represented by vector optimization problems. In the work, the solution of the problem of multifunctionality of engineering systems in the selection of optimal parameters is presented in two stages. At the first stage of the work, the solution for choosing the optimal parameters of the engineering system under conditions of certainty and uncertainty with equivalent criteria is presented. At the second stage of work, the intellectual knowledge of the system designer was used, who sets the numerical values of the most important (priority) criterion. The optimal parameter values for the priority criterion are calculated mathematically. A geometric interpretation of the results of the solution of the N-dimensional system into a two-dimensional system of parameters in the design of characteristics in relative and physical units is formed.

Ключевые слова: Многомерная математика, Методы принятия оптимальных решений, Моделирование инженерной системы, Интеллект конструктора, Принятие оптимальных решений, Геометрическая интерпретация многомерных систем.

Keywords: Multidimensional Mathematics, Methods of Optimal Decision Making, Modeling of an Engineering System, Designer's Intelligence, Optimal Decision Making, Geometric Interpretation of Multidimensional Systems.

Introduction

К инженерным системам относятся технические, технологические системы и материалы. Исследование развития инженерных систем показало, что эти системы зависят от некоторого множества функциональных характеристик, которые в совокупности характеризуют многомерность исследуемой инженерной системы. Исследование и анализ функционирования инженерных систем показало, что улучшение по одной из характеристик системы приводит к ухудшению других характеристик.

Для улучшения функционирования инженерной системы необходимо учитывать:

во-первых, что в исследуемой инженерной системе одно подмножество характеристик (критериев) было направлено на увеличение числового значения (максимизацию), а второе подмножество характеристик (критериев) системы было направлено на уменьшение числового значения (минимизацию); во-вторых, необходимо, чтобы все характеристики инженерной системы улучшались в совокупности. В настоящее время известно решение однокритериальной оптимизации, которую можно трактовать как одномерную оптимизацию.

Исследования многокритериальных задач началось более ста лет тому назад в работе Pareto V. [1]. В последние три десятилетия методам решения многокритериальных (векторных) задач посвящено большое количество монографий и отдельных статей. Это связано с широким использованием этих методов в решении практических задач. Анализ методов и алгоритмов решения многокритериальных задач в соответствии со своей классификацией представлен в ряде работ [6, 10, 22, 39, 45]: методы решения многокритериальных задач, основанные на свертывании критериев с весовыми коэффициентами [3, 5, 25, 27]. Исследование многокритериальной оптимизации проводилось как на теоретическом уровне зарубежными [3, 25-30] и русскими авторами [4-23], так и на решении практических задач сначала в области экономики [31-45], а за тем в области инженерных систем [6-21, 46-49].

Множество критериев в многокритериальной задаче оптимизации можно представить в виде вектора, с которым можно проводить математические операции, отсюда появились векторные задачи оптимизации или векторные задачи математического программирования.

Решение проблемы векторной оптимизации обусловлено рядом трудностей, причем концептуального характера, и главная из них понять: «что значит решить задачу векторной оптимизации». Для решения проблемы с множеством критериев математически необходимо



создание, во-первых, аксиоматики и принципов оптимальности, показывающих любому пользователю, в чем одно решение лучше другого решения, и, что такое оптимальное решение многокритериальной (т.е. со многими характеристиками) оптимизационной задачи. А на следующем этапе на базе аксиоматики и принципов оптимальности разработки конструктивных методов решения многокритериальных задач.

Цель работы представить теорию, методы многомерной математики и интеллект конструктора в системе принятия оптимальных решений, в задачах возникающих при исследовании, проектировании и выборе параметров в многопараметрической и многофункциональной инженерной системы. Выбор оптимальных параметров реализуется при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия (характеристики). Представить геометрическую интерпретацию результатов решения N -мерной системы параметров в двухмерную систему параметров.

Первоначально в работе представлена теория и методы многомерной математики. В рамках теории векторной оптимизации сформулированы аксиомы и представлены принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия [6–22]. В прикладной части представлены конструктивные методы принятия оптимальных решений, методы решения векторных задач для моделирования инженерных систем. Методы позволяют принимать решение, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при заданном приоритете критерия того или иного критерия. В области инженерных систем, к которым относятся технические системы [11–14, 18, 19], технологические процессы [15, 21], материалы [17].

На базе многомерной математики разработана методология моделирования и проектирования инженерных систем, которая реализована в две стадии.

Первая стадия работы направлена на решение выбора оптимальных параметров инженерной системы в условиях определенности и неопределенности при равнозначных критериях и включает. 1. Построение математической модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности и разработки конструктивных методов решения векторной задачи. 2. Построение численной модели выбора оптимальных параметров сложной инженерной системы. 3. Разработана численная реализация многопараметрической и многофункциональной модели инженерной системы при равнозначных критериях.

Вторая стадия работы направлена на решение выбора оптимальных параметров инженерной системы в условиях неопределенности, при этом использованы интеллектуальные знания конструктора системы. 4. Конструктор технической системы задает численные значения наиболее важного (приоритетного) критерия. 5. Оптимальные значения параметров для приоритетного критерия вычисляется математически. 6. Сформирована геометрическая интерпретация результатов решения N -мерной системы параметров в двухмерную систему параметров при проектировании характеристик в относительных и физических единицах.

Математическая и численная реализация методологии моделирования и проектирования многопараметрических и многофункциональных инженерных систем на базе многомерной математики с использованием интеллектуала конструктора представлена на двух видах инженерных систем. Во второй главе в качестве объекта исследования нами рассматривается технологическая система. В третьей главе в качестве объекта исследования нами рассматривается техническая система.

1. Многомерная математика. Теория, Методы.



В этой главе мы представим четыре раздела, характеризующих теорию и методы многомерной математики: Векторная задача математического программирования;

Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с равнозначными критериями;

Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия;

Прикладная многомерная математика: Векторная задача нелинейного программирования – модель развития инженерных систем.

1.1. Векторная задача математического программирования.

1.1.1. Введение в многомерную математику.

В качестве представителя многомерной математики мы сформулируем задачу математического программирования, представленную множеством функций, которые определяют многомерность исследуемого объекта. Каждая функция этого множества функций имеют различную целевую направленность: максимизации или минимизации, которые в совокупности изменяются на определенном (не пустом и замкнутом) множестве переменных (параметров). Не нарушая общности множество функций можно представить в виде вектора функций. В итоге получаем векторную задачу математического программирования (ВЗМП). На базе векторной задачи оптимизации представим теоретические проблемы необходимые для ее решения, которые включают аксиоматику (теоретические основы), принцип оптимальности и конструктивные методы решения векторных задач с равнозначными критериями и заданным приоритетом критерия, [6, 15, 29, 31, 33].

1.1.2. Векторная задача математического программирования

Векторная задача математического программирования (ВЗМП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев.

ВЗМП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗМП.

Однородные ВЗМП максимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

Однородные ВЗМП минимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

Неоднородные ВЗМП – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач.

В соответствии с этими определениями представим выпуклую векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями [6, 20, 22].

$$Opt F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (1.1)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (1.2)$$

$$f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, G(X) \leq B, \quad (1.3)$$

$$X^{min} \leq X \leq X^{max}, \quad (1.4)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, т.е. это вектор из N -мерного евклидова R^N , $X^{min} \leq X \leq X^{max}$ – параметрические ограничения;



$F(X)$ – вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, (K – мощность множества K), $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}$. Множество K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации; $K = K_1 \cup K_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает *max* и *min*;

$F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизируется, K_1 – число критериев, а $K_1 = \overline{1, K_1}$ – множество критериев максимизации (задача (1.1), (1.3), (1.4) представляют собой ВЗМП с однородными критериями максимизации). В дальнейшем будем предполагать, что $f_k(X), k = \overline{1, K_1}$ – непрерывные вогнутые функции (иногда будем их называть критериями максимизации);

$F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 = \overline{K_1 + 1, K} = \overline{1, K_2}$ – множество критериев минимизации, K_2 – число, (задача (1.2) – (1.4) это ВЗМП с однородными критериями минимизации). Предполагаем, что $f_k(X), k = \overline{1, K_2}$ – непрерывные выпуклые функции:

$$K_1 \cup K_2 = K, K_1 \subset K, K_2 \subset K. \quad (1.5)$$

$f_k^{\min}, f_k^{\max}$ – минимальная и максимальная величина k -го критерия в ограничениях,

$G(X) \leq B, X \geq 0$ – стандартные ограничения, $g_i(X) \leq b_i, i = 1, \dots, M$, где b_i – набор вещественных чисел, а функции $g_i(X)$ предполагаются непрерывными и выпуклыми.

$$\text{Обозначим: } S = \{X \in \mathbb{R}^n | G(X) \leq 0, X^{\min} \leq X \leq X^{\max}\} \neq \emptyset \quad (1.6)$$

это допустимое множество точек (или более кратко – допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (1.3)–(1.4) и тривиальными ограничениями $X \geq 0$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт.

Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$ может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2(X)$ введен в ВЗМП (1.1)–(1.4) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев K_1, K_2 с принципиально различными направлениями оптимизации. Предполагаем, что точки оптимума, полученные по каждому критерию, не совпадают хотя бы для двух критериев. Если все точки оптимума совпадают между собой для всех критериев, то считаем решение тривиально.

1.1.3. Аксиомы и Аксиоматические методы

Аксиома – это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих утверждений (исходных положений) строится та или иная теория.

Аксиоматический метод – это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые Аксиомами теории. В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [1, 2].

В математике Аксиоматический метод зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала». Дальнейшее развитие аксиоматического метода получил в работах Д. Гильберта в виде так называемого метода формализма системы. Общая схема построения произвольной формальной системы («S») включает:

1. Язык системы («S»), в том числе алфавит – это перечень элементарных символов; правила образования (синтаксис), по которым строится формулы «S».



2. Аксиомы системы «S», которые представляют некоторое множество формул.

3. Правила вывода системы «S» [2].

В приложении к решению задачи векторной оптимизации (многомерной математики) аксиоматика подразделяется на два раздела:

1. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями;

2. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критериев.

Только при построении первоначальной аксиоматики возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения векторных задач математического программирования.

1.2. Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с равнозначными критериями

1.2.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями

В соответствии с вышеизложенной трактовкой Язык системы многомерной математики включает: во-первых, нормализацию критериев, во-вторых, относительную оценку критериев (функций), и, в-третьих, минимальный относительный уровень.

Определение 1. (Нормализация критерия).

Нормализация критериев (математическая операция: сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X) \forall k \in K$, в одномерное пространство R^1 (сама функция $f_k(X) \forall k \in K$ представляет собой функцию преобразования из N -мерного евклидова пространства R^N в R^1). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования: $f_k(X) = a_k f'_k(X) + c_k \forall k \in K$, или

$$f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k \forall k \in K, \quad (1.7)$$

где $f'_k(X), k = \overline{1, K}$ – старое (до нормализации) значение критерия; $f_k(X), k = \overline{1, K}$ – нормализованное значение, a_k, c_k – постоянные.

Нормализация критериев $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k \forall k \in K$ представляет простое (линейное) инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимизационной задаче нормализация критериев $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k \forall k \in K$ не влияет на результат решения. Действительно, если решается выпуклая оптимизационная задача:

$$\max_{X \in S} f(X), \text{ то в точке оптимума } X^* \in S: \frac{df(X^*)}{dX} = 0. \quad (1.8)$$

В общем случае (в том числе с нормализацией критерия (1)) решается задача:

$$\max_{X \in S} (a_k f'_k(X) + c_k), \quad (1.9)$$

$$\text{то в точке оптимума } X^* \in S: \frac{d(a_k f(X^*) + c_k)}{dX} = a_k \frac{d(f(X^*))}{dX} + \frac{d(c_k)}{dX} = 0. \quad (1.10)$$

Результат идентичен, т.е. точка оптимума $X^*, k = \overline{1, K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

Определение 2. (Относительная оценка функции (критерия)).

В векторной задаче (1.1)-(1.4) выполним нормализацию (1.7) вида:



$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in K \quad (1.11)$$

это относительная оценка k -го критерия в точке $X \in S$, где f_k^* наилучшая величина k -го критерия, полученная при решении ВЗМП (1.1)-(1.4) отдельно по k -му критерию;

f_k^0 – наихудшая величина k -го критерия (анти оптимум) в точке X_k^0 (верхний индекс 0 – ноль) на допустимом множестве S ;

в задаче на $\max$ (1.1), (1.3), (1.4) величина f_k^0 является наименьшим значением k -го критерия: $f_k^0 = \min_{X \in S} f_k(X) \forall k \in K_1$,

а в задаче на $\min$ (1.2), (1.3), (1.4) величина f_k^0 является наибольшим значением k -го критерия: $f_k^0 = \max_{X \in S} f_k(X) \forall k \in K_2$.

Относительная оценка $\lambda_k(X) \forall k \in K$, во-первых, измеряется в относительных единицах; во-вторых, относительная оценка $\lambda_k(X) \forall k \in K$: на допустимом множестве меняется с нуля в точке X_k^0 : $\forall k \in K \lim_{X \rightarrow X_k^0} \lambda_k(X) = 0$, к единице в точке оптимума X_k^* :

$$\forall k \in K \lim_{X \rightarrow X_k^*} \lambda_k(X) = 1: \forall k \in K 0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, X \in S, \quad (1.12)$$

В результате такой нормализации все критерии ВЗМП (1.1)-(1.4) соизмеримы в относительных единицах, что позволяет, сравнивать их друг с другом их при совместной оптимизации.

Определение 3. Операция сравнения относительных оценок критерия между собой.

Так как, любая функция (критерий) представлен в относительных оценках функций $\lambda_k(X) \forall k \in K$, которые лежат пределах (1.12), то возможно сравнение относительных оценок по числовой величине. Для сравнения используется операция «вычитания». Если сравнивается две функции (критерия), измеренные в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X) \forall k \in K$, то возможны три ситуации:

первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$;

вторая, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$;

третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$.

Первая и третья ситуация исследуется в разделе 1.3.

В этом разделе исследуется вторая ситуация.

1.2.2. Аксиоматика векторной оптимизации с равнозначными критериями

Аксиома 1. (О равнозначности критериев в допустимой точке векторной задачи математического программирования)

В векторной задаче два критерия с индексами $k \in K, q \in K$ будем считать равнозначными в точке $X \in S$, если относительные оценки по k -му и q -му критерию равны между собой в этой точке, т. е. $\lambda_k(X) = \lambda_q(X), k, q \in K$.

Пояснение. Если в точке $X \in S$ функции (критерии) будут равны:

$\lambda_l(X) = 0,45 \ l \in K$ и $\lambda_q(X) = 0,45, q \in K$ (т.е. 45% от своей оптимальной величины, которая в относительных единицах равна 1), то такие критерии не «равны» друг другу, а равнозначны по своему числовому значению. И каждый из них несет свой функциональный смысл, который может быть получен, используя нормализацию критериев (1.11).



Определение 4. (Определение минимального уровня среди всех относительных оценок критериев). Относительный уровень λ в векторной задаче представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$$\forall X \in S \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \quad (1.13)$$

нижний уровень для выполнения условия (1.13) в точке $X \in S$ определяется формулой

$$\forall X \in S \lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X). \quad (1.14)$$

Соотношения (1.13) и (1.14) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (1.14) определения $\min$ к ограничениям (1.13) и наоборот. Уровень λ позволяет объединить все критерии в векторной задаче одной числовой характеристикой λ и производить над ней определенные операции, тем самым, выполняя эти операции над всеми критериями, измеренными в относительных единицах. Уровень λ функционально зависит от переменной $X \in S$, изменяя X , можем изменять нижний уровень - λ .

1.2.3. Принцип оптимальности векторной оптимизации с равнозначными критериями

Определение 5. (Принцип оптимальности 1 с равнозначными критериями).

Векторная задача математического программирования при равнозначных критериях решена, если найдена точка $X^o \in S$ и максимальный уровень λ^o (верхний индекс o - оптимум) среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X) \quad (1.15)$$

Используя взаимосвязь выражений (1.13) и (1.14), преобразуем максиминную задачу (1.15) в экстремальную задачу:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \lambda \quad (1.16)$$

$$\text{при ограничениях } \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}. \quad (1.17)$$

Полученную задачу (1.16)-(1.17) назовем λ -задачей. λ -задача (1.16)-(1.17) имеет $(N+1)$ размерность, как следствие результат решения λ -задачи (1.16)-(1.17) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, $(N+1)$ -я компонента которого суть величина λ^o , т. е. $X^o = \{x_1^o, x_2^o, \dots, x_N^o, x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, $(N+1)$ компонента вектора X^o выделена в λ^o .

Полученная пара $\{\lambda^o, X^o\} = X^o$ характеризует оптимальное решение λ -задачи (1.16)-(1.17) и соответственно векторной задачи математического программирования (1.1)-(1.4) с равнозначными критериями, решенную на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Назовем в оптимальном решении $X^o = \{\lambda^o, X^o\}$, X^o - оптимальной точкой, а λ^o - максимальным уровнем.

Важным результатом алгоритма решения векторной задачи с равнозначными критериями (1.1)-(1.4) является следующая теорема.

Теорема 1. (Теорема о двух наиболее противоречивых критериях в векторной задаче математического программирования с равнозначными критериями).

В выпуклой векторной задаче математического программирования (1.1)-(1.4) при эквивалентных критериях, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $X^o = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия - обозначим их индексами $q \in K, p \in K$ (которые являются самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1, K}$), и для которых выполняется равенство:



$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in K, X \in S, \quad (1.18)$$

и другие критерии определяются неравенством:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in K, q \neq p \neq k. \quad (1.19)$$

Впервые доказательство теоремы 1 представлено в [6, стр.22], в дальнейшем повторено в работе [10, стр.234]. Вместе с тем, что точка X^o является оптимальным решением ВЗМП.

1.2.4. Математический алгоритм решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями

Для решения векторной задачи математического программирования (1.1)-(1.4) разработан метод, основанный на нормализации критериев (1.11), аксиоматике и принципе максимина (гарантированного результата) (1.15). Конструктивный метод решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями включает два блока: 1-й блок «Системный анализ» – разделен на три шага; 2-й блок «Принятие оптимального решения», включающий два шага: построения λ -задачи и ее решения.

Блок 1. Системный анализ.

Шаг 1. Решается задача (1.1)-(1.4) по каждому критерию отдельно, т.е. для $\forall k \in K_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in K_2$ решается на минимум.

В результате получим:

X_k^* – точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$;

$f_k^* = f_k(X_k^*)$ – величина k -го критерия в этой точке, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): f_k^0 , $k = \overline{1, K}$. Для чего решается задача (1.1)-(1.4) для каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум:

$$f_k^0 = \min f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, K_1}$$

для каждого критерия $k = \overline{1, K_2}$ на максимум:

$$f_k^0 = \max f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, K_2}. \quad (1.20)$$

В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величина k -го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1, K}$.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*)$, относительных оценок $\lambda(X^*)$: $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in K$.

$$F(X^*) = \{f_k(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*), \dots, f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*), \dots, f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \quad (1.21)$$

$$\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*), \dots, \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \quad (1.22)$$

В целом по задаче относительная оценка (1.22) $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ лежит в пределах: $0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, k = \overline{1, K}$.

Блок 2. Принятие оптимального решения в ВЗМП. Включает два шага – 4, 5.



Шаг 4. Построение λ -задачи. Создание λ -задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с эквивалентными критериями, которые на втором этапе преобразуются в стандартную задачу математического программирования, названной λ -задачей. Для построения максиминная задача используем определение 2:

$$\forall X \in S \quad \lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X).$$

Нижний уровень λ максимизируем по $X \in S$. В результате сформулируем максиминную задачу оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X). \quad (1.23)$$

На втором этапе задача (23) преобразуется в стандартную задачу математического программирования, названную λ -задача:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \lambda, \quad \lambda^o = \max_{X \in S} \lambda, \quad (1.24)$$

$$\lambda - \lambda_k(X) \leq 0, k = \overline{1, K}, \quad \rightarrow \quad \lambda - \frac{f_k(X) - f_k^o}{f_k^* - f_k^o} \leq 0, k = \overline{1, K}, \quad (1.25)$$

$$G(X) \leq B, X \geq 0, \quad G(X) \leq B, X \geq 0, \quad (1.26)$$

где вектор неизвестных X имеет размерность $N + 1$: $X = \{\lambda, x_1, \dots, x_N\}$.

Шаг 5. Решение λ -задачи. λ -задача (1.24)-(1.26) – стандартная задача выпуклого программирования и для ее решения используются стандартные методы, в результате решения λ -задачи получим:

$$X^o = \{\lambda^o, X^o\} - \text{точку оптимума}; \quad (1.27)$$

$$f_k(X^o), k = \overline{1, K} - \text{величины критериев в этой точке}; \quad (1.28)$$

$$\lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X^o) - f_k^o}{f_k^* - f_k^o}, k = \overline{1, K} - \text{величины относительных оценок}; \quad (1.29)$$

λ^o – максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$, гарантированным результатом в относительных единицах. λ^o гарантирует, что в точке X^o относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ больше или равны λ^o :

$$\lambda_k(X^o) \geq \lambda^o, k = \overline{1, K} \text{ or } \lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, X^o \in S, \quad (1.30)$$

и в соответствии с теоремой 1 точка оптимума $X^o = \{\lambda^o, x_1, \dots, x_N\}$ является оптимальной по Парето.

1.3. Аксиоматика и принцип оптимальности векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия

В определении 3 указано, что если сравнивать две функции (критерия), измеренных в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X) \forall k \in K$, то возможны три ситуации. Вторая ситуация, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$ исследована в разделе 1.2 (равнозначные критерии). Ситуации: первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$, и третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$, исследуются в этом разделе. Такие ситуации определяются, как задачи с приоритетом критерия.

Для построения методов решения проблемы векторной оптимизации с приоритетом критерия мы введем следующие определения: О приоритете одного критерия над другим; О числовом выражении приоритета критерия над другим; О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим; О нижнем уровне среди всех относительных оценок



с приоритетом критерия; О подмножестве точек, приоритетных по критерию; Принцип оптимальности 2 - Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия, [20, 22].

1.3.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с заданным приоритетом критерия

Язык системы аксиоматики решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия включает определения: 1) Приоритет одного критерия над другим; 2) Числовое значение приоритета критерия; 3) Нижний уровень критерия среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

Определение 6. (О приоритете одного критерия над другим).

Критерий $q \in K$ в векторной задаче (1.1)-(1.4) в точке $X \in S$ имеет приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}$, если относительная оценка $\lambda_q(X)$ по этому критерию больше или равна относительных оценок $\lambda_k(X)$ других критериев, т. е.:

$$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \quad (1.31)$$

и строгий приоритет, если хотя бы для одного критерия $t \in K$: $\lambda_q(X) > \lambda_k(X), t \neq q$, а для остальных критериев $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, k \neq t \neq q$.

Введением определения приоритета критерия $q \in K$ в ВЗМП (1.1)-(1.4) выполнено переопределение раннего понятия приоритета. Если раньше в него вкладывалось интуитивное понятие о важности этого критерия, то сейчас эта “важность” определяется математически: чем больше относительная оценка q -го критерия над другими, тем он важнее (приоритетнее), и наиболее высокий приоритет в точке оптимума $X^*, \forall q \in K$.

Из определения выражения приоритета критерия $q \in K$ в векторной задаче в уравнениях (1.1)-(1.4) следует, что возможная область, соответствующая множеству точек $S_q \subset S$, которое характеризуется как $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \forall k \neq q, \forall X \in S_q$. Однако, вопрос на сколько критерий $q \in K$ в точке множества S_q имеет больший приоритет относительно другого критерия остается открытым. Для ответа на этот вопрос, мы вводим коэффициент связи между парой относительных оценок q и k , что, в целом, представляет вектор:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) \mid k = \overline{1, K}\}, q \in K \forall X \in S_q.$$

Определение 7. (О числовом выражении приоритета критерия над другим).

В векторной задаче (1.1)-(1.4) с приоритетом критерия q -го над другими критериями $k = \overline{1, K}$, для $\forall X \in S_q$, вектор $P^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X)$, $q \in K$, больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in S_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in K. \quad (1.32)$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем *числовым выражением приоритета q -го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$* .

Определение 7а. (О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другими). В векторной задаче (1.1)-(1.4) с приоритетом критерия $q \in K$ для $\forall X \in S$ вектор $P^q = \{p_k^q, k = \overline{1, K}\}$, считается заданным лицом, принимающим решения, (ЛПР), если задана каждая компонента этого вектора. Заданная ЛПР компонента p_k^q , с точки зрения ЛПР, показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in K$ больше остальных



относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$. Вектор $p_k^q, k = \overline{1, K}$ является заданным числовым выражением приоритета q -го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X), k = \overline{1, K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in S_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in K. \quad (1.33)$$

Векторная задача (1.1)–(1.4), в которой задан приоритет какого-либо из критериев, называют векторной задачей с заданным приоритетом критерия. Проблема задачи вектора приоритетов возникает тогда, когда необходимо определить точку $X^0 \in S$ по заданному вектору приоритетов.

При операции сравнения относительных оценок с приоритетом критерия $q \in K$, аналогично, как и в задаче с эквивалентными критериями, введем дополнительную числовую характеристику λ , которую назовем *уровнем*.

Определение 8. *О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.*

Уровень λ является нижним среди всех относительных оценок с приоритетом критерия $q \in K$, таким, что

$$\lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, q \in K, \forall X \in S_q \subset S; \quad (1.34)$$

нижний уровень для выполнения условия (1.34) определяется

$$\lambda = \min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in K, \forall X \in S_q \subset S. \quad (1.35)$$

Соотношения (1.34) и (1.35) являются взаимосвязанными и служат в дальнейшем переходом от операции определения $\min$ к ограничениям и наоборот. В разделе 1.2.4 мы дали определение точки $X^0 \in S$, оптимальной по Парето, с эквивалентными критериями. Рассматривая данное определение как исходное, мы построим ряд аксиом деления допустимого множества точек S , во-первых, как подмножество точек, оптимальных по Парето S^0 , и, во-вторых, на подмножество точек $S_q \subset S, q \in K$, приоритетным на q -му критерию.

1.3.2. Аксиома векторной оптимизации с приоритетными критериями

Аксиома 2. *(О подмножестве точек, приоритетных по критерию).*

В векторной задаче (1.1)–(1.4) подмножество точек $S_q \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если

$$\forall X \in S_q \quad \forall k \in K \quad \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k.$$

Это определение распространяется и на множество точек S^0 , оптимальных по Парето, что дается следующим определением.

Аксиома 2а. *(О подмножестве точек, приоритетных по критерию, на множестве точек оптимальных по Парето).*

В векторной задаче (1.1)–(1.4) подмножество точек $S_q^0 \subset S^0 \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если $\forall X \in S_q^0 \quad \forall k \in K \quad \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k$.

Дадим некоторые пояснения.

Аксиома 2 и 2а позволила представить в векторной проблеме (1.1)–(1.4) допустимое множество точек S , включая подмножество точек, оптимальных по Парето, $S^0 \subset S$, в подмножества:

одно подмножество точек $S' \subset S$, где критерии эквивалентны, и подмножество точек S' , пересекаясь с подмножеством точек S^0 , выделяет подмножество точек, оптимальных по



Парето, в подмножество с эквивалентными критериями $S^{oo} = S' \cap S^o$, которое, как это показано далее, состоит из одной точки $X^o \in S$, т.е. $X^o = S^{oo} = S' \cap S^o, S' \in S, S^o \subset S$;

«К» подмножеств точек, где у каждого критерия $q = \overline{1, K}$ имеется приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}, q \neq k$. Таким образом, выполнено разделение, во-первых, множества всех допустимых точек S , на подмножества $S_q \subset S, q = \overline{1, K}$, и, во-вторых, разделение подмножества точек, оптимальных по Парето, S^o , на подмножества $S_q^o \subset S_q \subset S, q = \overline{1, K}$. Отсюда верны следующие соотношения:

$$S' U (\cup_{q \in K} S_q^o) \equiv S^o, S_q^o \subset S^o \subset S, q = \overline{1, K}.$$

Мы заметим, что подмножество точек S_q^o , с одной стороны, включено в область (подмножество точек), имеющих приоритет критерия $q \in K$ над другими критериями: $S_q^o \subset S_q \subset S$, и с другой стороны, на подмножество точек, оптимальных по Парето: $S_q^o \subset S^o \subset S$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 5) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in S$ (посредством вектора:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}, \text{ формироваться и выбирать:}$$

подмножество точек по приоритетному критерию S_q , который включен в множество точек $S, \forall q \in K, X \in S_q \subset S$, (такое подмножество точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это вне статьи);

подмножество точек по приоритетному критерию S_q^o , который включен в ряд точек S^o , оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in S_q^o \subset S^o$.

Полная идентификация всех точек в векторной задаче (1.1)-(1.4) выражена в следующей последовательности, как:

Таблица 1

Множество допустимых точек $X \in S \rightarrow$	Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in S^o \subset S \rightarrow$	Подмножество точек, оптимума по Pareto $X \in S_q^o \subset S^o \subset S \rightarrow$	Отдельная точка, $\forall X \in S$ $X \in S_q^o \subset S^o \subset S$
--	--	--	--

Это самый важный результат, который позволит вывести принцип оптимальности и построить методы выбора любой точки из множества точек, оптимальных по Парето.

1.3.3. Принцип оптимальности решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия

Определение 8. (Принцип оптимальности 2. Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия). Векторная задача (1.1)–(1.4) с заданным приоритетом q -го критерия $p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ считается решенной, если найдена точка X^o и максимальный уровень λ^o среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in K. \quad (1.36)$$

Используя взаимосвязь (1.34) и (1.35), преобразуем максиминную задачу (1.36) в задачу:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \lambda, \quad (1.37)$$

$$\text{at restriction } \lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}. \quad (1.38)$$

Задачу (1.37)-(1.38) назовем λ -задачей с приоритетом q -го критерия.



Результатом решения λ -задачи будет точка $X^0 = \{X^0, \lambda^0\}$ – она же является и результатом решения ВЗМП (1.1)-(1.4) с заданным приоритетом критерия, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата.

В оптимальном решении $X^0 = \{X^0, \lambda^0\}$, X^0 – оптимальная точка, а λ^0 – максимальный нижний уровень. Точка X^0 и уровень λ^0 соответствуют ограничениям (1.4), которые можно записать как: $\lambda^0 \leq p_k^q \lambda_k(X^0), k = \overline{1, K}$.

Эти ограничения являются основой оценки правильности результатов решения в практических векторных задачах оптимизации.

Определение 1 и 2 «Принципы оптимальности» дают возможность сформулировать понятие операции «орт».

Определение 9. (Математическая операция «орт»).

В векторной задаче (1.1)-(1.4), которая представлена критериями «max» и «min», математическая операция «орт» состоит в определении точки X^0 и максимального нижнего уровня λ^0 , в котором все критерии измеряются в относительных единицах:

$$\lambda^0 \leq \lambda_k(X^0) = \frac{f_k(X^0) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}, \quad (1.39)$$

т.е. все критерии $\lambda_k(X^0), k = \overline{1, K}$ равны или больше максимального уровня λ^0 , (поэтому λ^0 также называется гарантированным результатом).

Теорема 2. (Теорема о наиболее противоречивых критериях в векторной задаче с заданным приоритетом).

Если в выпуклой векторной задаче математического программирования максимизации (1.1)-(1.4) задан приоритет q -го критерия $p_k^q, k = \overline{1, K}, \forall q \in K$ над другими критериями, в точке оптимума $X^0 \in S$, полученной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, всегда найдется два критерия с индексами $r \in K, t \in K$, для которых выполняется строгое равенство из:

$$\lambda^0 = p_k^r \lambda_r(X^0) = p_k^t \lambda_t(X^0), r, t \in K, \quad (1.40)$$

и другие критерии определяются неравенствами:

$$\lambda^0 \leq p_k^q(X^0), k = \overline{1, K}, \forall q \in K, q \neq r \neq t. \quad (1.41)$$

Критерии с индексами $r \in K, t \in K$, для которых выполняется равенство (1.41), называются наиболее противоречивыми.

Доказательство. Аналогично теореме 2 [20].

Заметим, что в (1.40) и (1.41) индексы критериев $r \in K, t \in K$ могут совпадать с индексом $q \in K$.

Следствие теоремы 1. О равенстве оптимального уровня и относительных оценок в векторной задаче с двумя критериями с приоритетом одного из них.

В выпуклой векторной задаче математического программирования с двумя эквивалентными критериями, решаемой на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке X^0 всегда выполняется равенство: при приоритете первого критерия над второй:

$$\lambda^0 = \lambda_1(X^0) = p_2^1(X^0) \lambda_2(X^0), X^0 \in S, \quad (1.42)$$

где $p_2^1(X^0) = \lambda_1(X^0) / \lambda_2(X^0)$, при приоритете второго критерия над первым:



$\lambda^0 = \lambda_2(X^0) = p_1^2(X^0)\lambda_1(X^0), X^0 \in S$, где $p_1^2(X^0) = \lambda_2(X^0)/\lambda_1(X^0)$.

1.3.4. Метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия

Шаг 1. Мы решаем векторную задачу с равнозначными критериями. Алгоритм решения представлен в разделе 4.4.

В результате решения получаем:

оптимальные точки по каждому критерию отдельно $X_k^*, k = \overline{1, K}$ и размеры критериальных функций в этих точках $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1, K}$, которые представляют граница множества точек, оптимальных по Парето;

точки антиоптимума по каждому критерию $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ и наихудшей неизменной части каждого критерия $f_k^0 = f_k(X_k^0), k = \overline{1, K}$;

$X^0 = \{X^0, \lambda^0\}$ оптимальная точка, как результат решения VPMP с эквивалентными критериями, т.е. результат решения максиминной задачи, λ -задачи, построенной на ее основе;

λ^0 – максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^0)$, или гарантированный результат в относительных единицах, λ^0 гарантирует, что все относительные оценки $\lambda_k(X^0)$ равны или больше λ^0 :

$$\lambda^0 \leq \lambda_k(X^0), k = \overline{1, K}, X^0 \in S \quad (1.43)$$

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов решения векторной задачи с эквивалентными критериями.

Если полученные результаты удовлетворяют лицу, принимающее решение, то конец, иначе выполняются последующие расчеты.

Дополнительно вычислим: в каждой точке $X_k^*, k = \overline{1, K}$ определим величины всех критериев $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1, K}$, которые представляют границу множества Парето, и относительных оценок: $\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\}$, $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in K$:

$$F(X^*) = \begin{bmatrix} f_1(X_1^*) & \dots & f_K(X_1^*) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(X_K^*) & \dots & f_K(X_K^*) \end{bmatrix}, \quad \lambda(X^*) = \begin{bmatrix} \lambda_1(X_1^*) & \dots & \lambda_K(X_1^*) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1(X_K^*) & \dots & \lambda_K(X_K^*) \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

Матрицы критериев $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$ показывают величины каждого критерия $k = \overline{1, K}$ при переходе от точки оптимума $X_k^*, k \in K$ к другой $X_q^*, q \in K$; в точке оптимума при равнозначных критериях X^0 вычислим величины критериев и относительных оценок:

$$f_k(X^0), k = \overline{1, K}; \lambda_k(X^0), k = \overline{1, K}, \quad (1.45)$$

которые удовлетворяют неравенству (1.43). В других точках $X \in S^0$ меньший из критериев в относительных единицах $\lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X)$ всегда меньше λ^0 . Запоминаются данные λ -задачи (1.24)-(1.26). Эта информация и является основой для дальнейшего изучения множества Парето.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из теории (см. теорему 1) известно, что в оптимальной точке X^0 всегда имеется два наиболее противоречивых критерия $q \in K$ и $v \in K$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$\lambda^0 = \lambda_q(X^0) = \lambda_v(X^0), q, v \in K, X \in S$, а для остальных выполняется неравенства:



$$\lambda^0 \leq \lambda_k(X^0), \forall k \in K, q \neq v \neq k.$$

Как правило, из этой пары выбирается критерий, который ЛПП хотел бы улучшить, такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q \in K$.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q \in K$. Для приоритетного критерия $q \in K$ из матрицы (40) определим числовые пределы изменения величины критерия: в натуральных единицах $f_q(X)$ и в относительных единицах $\lambda_q(X)$, которые лежат в следующих пределах:

$$f_k(X^0) \leq f_q(X) \leq f_q(X_q^*), k \in K \quad (1.46)$$

где $f_q(X_q^*)$ выводится из матрицы уравнения $F(X^*)$ (1.44), все критерии показывают размеры, измеренные в физических единицах, $f_k(X^0), k = \overline{1, K}$ из (1.45), и, в относительных единицах:

$$\lambda_k(X^0) \leq \lambda_q(X) \leq \lambda_q(X_q^*), k \in K, \quad (1.47)$$

где $\lambda_q(X_q^*)$ выводится из матрицы $\lambda(X^*)$, все критерии показывают размеры, измеренные в относительных единицах (отметим, что $\lambda_q(X_q^*) = 1$), $\lambda_q(X^0)$ из уравнения (1.44).

Как правило, Выражения (1.46) и (1.47) выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия (Принятие решения).

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов расчетов (1.44) и из неравенства в натуральных единицах (1.46) выбирает числовую величину $f_q, q \in K$:

$$f_q(X^0) \leq f_q \leq f_q(X_q^*), q \in K. \quad (1.48)$$

Для выбранной величины критерия f_q необходимо определить вектор неизвестных X^0 , для этого проводим последующие вычисления.

Шаг 5. Расчет относительной оценки.

Для выбранной величины приоритетного критерия f_q вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0}, \text{ которая при переходе от точки } X^0 \text{ к } X_q^*, \text{ в соответствии с (1.43) лежит в}$$

пределах: $\lambda_q(X^0) \leq \lambda_q \leq \lambda_q(X_q^*) = 1$.

Шаг 6. Вычисление коэффициента линейной аппроксимации.

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (1.48) и соответственно относительной оценки $\lambda_q(X)$, используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности ρ между $\lambda_q(X^0), \lambda_q$:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^0)}{\lambda_q^* - \lambda_q^0}, q \in K.$$

Шаг 7. Вычисление координат приоритетного критерия с величиной f_q .

В соответствии с (1.44) координаты точки приоритетного критерия X_q лежат в следующих пределах: $X^0 \leq X_q \leq X_q^*, q \in K$

Предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1^q, \dots, x_N^q\}$ определим координаты точки приоритетного критерия с величиной f_q с относительной оценкой (1.45):

$$X_q = \{x_1^q = x_1^0 + \rho(x_q^*(1) - x_1^0), \dots, x_N^q = x_N^0 + \rho(x_q^*(N) - x_N^0)\}, \quad (1.49)$$

где $X^0 = \{x_1^0, \dots, x_N^0\}$, $X_q^* = \{x_q^*(1), \dots, x_q^*(N)\}$.

Шаг 8. Вычисление основных показателей точки x^q (1.49).

Для полученной точки x^q (1.49), вычислим:



все критерии в натуральных единицах: $F^q = \{f_k(x^q), k = \overline{1, K}\}$;

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k(x^q) = \frac{f_k(x^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}; \quad (1.50)$$

вектор приоритетов: $P^q = \{p_k^q = \frac{\lambda_k(x^q)}{\lambda_k(x^q)}, k = \overline{1, K}\}$;

максимальную относительную оценку: $\lambda^{oq} = \min(p_k^q \lambda_k(x^q), k = \overline{1, K})$.

Аналогично (1.50) может быть рассчитана любая точка из множества Парето: $X_t^o = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in S^o$.

Анализ результатов. Рассчитанная величина критерия $f_q(X_t^o)$, $q \in K$ обычно не равна заданной Δf_q . Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q|$ определяется ошибкой линейной аппроксимации. Результаты исследования симметрии в ВЗМП с заданным приоритетом аналогичны, как и для ВЗМП с равнозначными критериями, но центр симметрии смещен в сторону приоритетного критерия.

1.4. Теоретический анализ максиминной задачи, Сравнение λ -критерия с весовыми коэффициентами при решении векторной задачи

Теоретический анализ максиминной задачи: по своей структуре максиминная задача (15, 36) внешне не отличается от аналогичной задачи, рассмотренной в ряде работ¹:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \{w_k, \lambda_k(X)\}, \quad X \in S, X \geq 0, \quad (\text{П. 1})$$

где $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}$ – относительная оценка по k -му критерию, f_k^*, f_k^0 – оптимальное и

наихудшее соответственно значения k -го критерия, т.е. исследование осуществляется в относительных единицах $\lambda_k(X)$; w_k – весовые коэффициенты, удовлетворяющие обычным условиям $w_k > 0$, $w_1 + \dots + w_K = 1$ и выражающие предпочтение критериев. Предпочтение определяется тем, что предпочтительному (приоритетному) критерию присваивается больший вес.

Но внутренне задачи (36) и (П. 1) полностью отличаются друг от друга. Покажем это отличие на двух критериальной задачи максимизации:

$$f_1(X) \rightarrow \max, f_2(X) \rightarrow \max, \quad (\text{П. 2})$$

$$g(X) \leq b, X \geq 0, X = \{x_1, x_2\}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad (\text{П. 3})$$

где множество допустимых точек S описанными ограничениями (П. 3) не пусто, $S \neq \emptyset$ и представляет собой компакт. Построим на основе векторной задачи (П. 2), (П. 3) максиминную задачу с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} (\lambda_1(X), \lambda_2(X)), X \in S, X \geq 0,$$

¹ Михайлевич В.С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.

Михайлевич В. С., Волкович В. Л., Коленов Г. В. Алгоритм согласования решений в распределенной системе взаимосвязанных задач с линейными моделями // Кибернетика. 1988. № 3. С. 1–8, 22.



где $\lambda_1(X)$, $\lambda_2(X)$ – относительные оценки по первому и второму критериям, X_1^*, X_2^* точки оптимума, полученные при решении ВЗМП (П. 2), (П. 3) по первому и второму критериям соответственно. Максиминную задачу преобразуем в λ -задачу:

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \lambda, \quad \lambda - \lambda_1(X) \leq 0, \quad \lambda - \lambda_2(X) \leq 0, \quad X \in S, \quad X \geq 0.$$

Представим последние неравенства в виде равенств, добавив переменные x', x'' , и вычтем одно из них из другого: $\lambda_1(X) - x' = \lambda_2(X) - x''$. Дополнительные переменные x' и x'' для двухкритериальной задачи сбалансированы и в оптимальной точке равны нулю (и это равенство подтверждает вышеприведенная теорема на этапе 2), в итоге

$$\lambda_1(X^0) = \lambda_2(X^0) \quad (\text{П. 4})$$

Поэтому алгоритм и называется “при равнозначных критериях”.

Рассмотрим, как изменится равенство (П. 4) при введении вектора приоритета и вектора весовых коэффициентов. Примем, что первый критерий имеет приоритет над вторым в 2 раза, тогда вектор приоритетов будет выглядеть следующим образом:

$P^1 = \{p_1^1 = 1, p_2^1 = 2\}$, а вектор весовых коэффициентов:

$$w = \{w_1 = 2/3, w_2 = 1/3\}, \quad w_1 + w_2 = 1.$$

Тогда равенство (П. 4) с вектором

приоритетов P^1 приобретёт следующий вид:

$$p_1^1 \lambda_1(X^0) = p_2^1 \lambda_2(X^0) \quad \text{или} \quad \lambda_1(X^0) = 2\lambda_2(X^0), \quad (\text{П. 5})$$

а с вектором весовых коэффициентов – с точностью наоборот:

$$w_1 \lambda_1(X^0) = w_2 \lambda_2(X^0) \quad \text{или} \quad 2\lambda_1(X^0)/3 = \lambda_2(X^0)/3 \quad \text{или} \quad 2\lambda_1(X^0) = \lambda_2(X^0). \quad (\text{П. 6})$$

В результате решения ВЗМП (П. 2), (П. 3) с вектором приоритетов (П. 5) относительная оценка по первому критерию $\lambda_1(X^0)$ будет в 2 раза выше относительной оценки по второму критерию $\lambda_2(X^0)$, что и требовалось по условиям задачи.

При решении ВЗМП (П. 2), (П. 3) с вектором весовых коэффициентов (П. 6) относительная оценка по первому критерию $\lambda_1(X^0)$ будет в 2 раза меньше относительной оценки по второму критерию $\lambda_2(X^0)$, что полностью противоречит условиям задачи.

Покажем этот анализ на примере векторной задачи линейного программирования с двумя критериями.

Пример. Рассмотрим однородную векторную задачу линейного программирования – максимизации (ВЗЛП):

$$f_1(X) = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max, \quad f_2(X) = 20x_1 + 80x_2 \rightarrow \max, \quad (\text{П. 7})$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 125, \quad x_1 \leq 28, \quad x_2 \leq 20, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (\text{П. 8})$$

Вид допустимого множества решений, определяемых ограничениями (П. 8), показан на рис. 1.



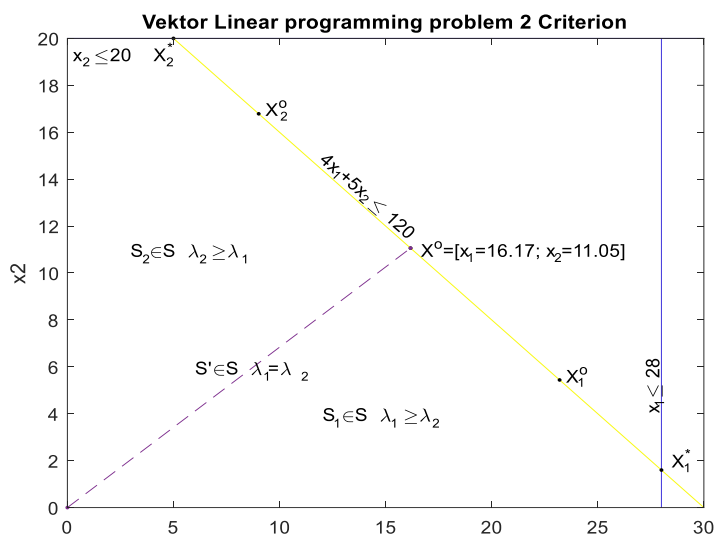


Рисунок П.1. Решение ВЗЛП (П. 7)-(П. 8)

Решение векторной задачи линейного программирования (П. 7), (П. 8) в соответствии с алгоритмом решения ВЗЛП на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата представим в системе Matlab.

Для решения по каждому критерию используется функция linprog, которая решает задачу линейного программирования.

Шаг 1. Решение ВЗЛП (П. 7) -(П. 8) по каждому критерию отдельно. В результате расчета получим точки оптимума, X_k^* и f_k^* , $k = \overline{1,2}$, показанные на рис. П.1:

$$X_1^* = \{x_1 = 28, x_2 = 1.6\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = 141.6;$$

$$X_2^* = \{x_1 = 5, x_2 = 20\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = 2500.$$

Шаг 2. Не выполняется. Для ВЗЛП с нестрогими ограничениями наихудшие значения критериев $f_1^0 = f_2^0 = 0$. Нормализация примет вид $\lambda_k(X) = f_k(X)/f_k^*$, $k = \overline{1,2}$.

Шаг 3. Выполняется анализ критериев, для чего в оптимальных точках X_1^* , X_2^* определяются матрицы целевых функций и относительных оценок

$$F(X^*) = \begin{vmatrix} 141.6 & 752.0 \\ 45.0 & 2500 \end{vmatrix}, \quad \lambda(X^*) = \begin{vmatrix} 1.0 & 0.3008 \\ 0.045 & 1.0 \end{vmatrix}.$$

Шаг 4. Строится λ -задача:

$$\begin{aligned} \lambda^0 &= \max \lambda, \\ \lambda - (5x_1 + 1x_2)/141.6 &\leq 0, \quad \lambda - (20x_1 + 80x_2)/2500 \leq 0, \\ x_1 + 5x_2 &\leq 125, \quad x_1 \leq 28, \quad x_2 \leq 20, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{П. 9})$$

которая решается обращением к функции linprog. Результаты:

оптимальные значения переменных $\lambda^0 = \{\lambda = 0.6547, x_1 = 16.3585, x_2 = 10.9132\}$; оптимальное значение целевой функции: $\lambda^0 = 0.6547$. Получившееся $\{\lambda_1(X^0)\}$, $\{\lambda_2(X^0)\}$, а также точки оптимума X^0 и λ^0 на их пересечении, представлены на рис. 2.

Выполним проверку: $f_1(X^0) = 92.7$, $\lambda_1(X^0) = 0.6547$; $f_2(X^0) = 1636.8$, $\lambda_2(X^0) = 0.6547$, т. е. $\lambda^0 \leq \lambda_k(X^0)$, $k = \overline{1,2}$. Эти результаты показывают, что в точке X^0 оба критерия в



относительных единицах достигли уровня $\lambda^0 = 0.6547$ от своих оптимальных величин. Любое увеличение одного из критериев выше этого уровня приводит к уменьшению другого критерия, т.е. точка X^0 оптимальна по Парето (рис. П.2).

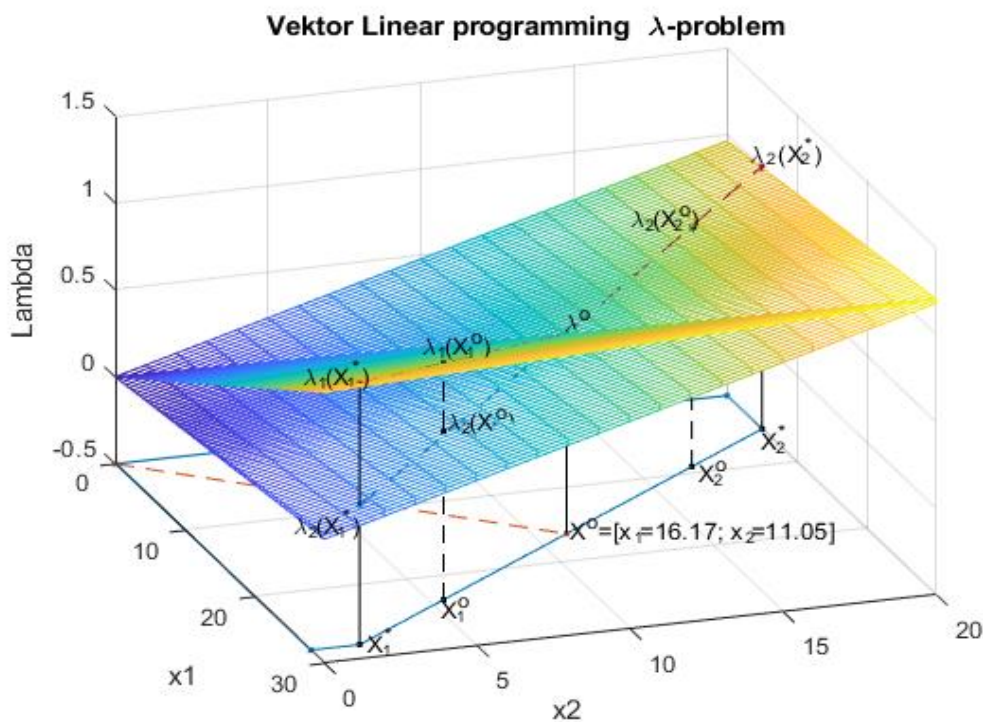


Рисунок П.2. Решение ВЗЛП (П. 7), (П. 8) с приоритетом первого критерия

Решим ВЗЛП (П. 7) и соответственно λ -задачу (П. 9) с заданным вектором приоритетов:

$P^1 = \{p_1^1 = 1, p_2^1 = 2\}$ и вектором весовых коэффициентов:

$w = \{w_1 = 2/3, w_2 = 1/3\}$.

В этом случае λ -задача примет вид:

$\lambda^0 = \max \lambda$,

$$\begin{aligned} \lambda - p_1^1(5x_1 + 1x_2)/f_1^* &\leq 0, \quad \lambda - p_2^1(20x_1 + 80x_2)/f_2^* \leq 0, \\ x_1 + 5x_2 &\leq 125, x_1 \leq 28, x_2 \leq 20, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{П. 9})$$

Для данной задачи при переходе от точки X^0 , полученной при равнозначных критериях λ -задачи (П. 9), к точке оптимума X_1^* , полученной при решении по первому критерию, приоритет первого критерия лежит в пределах:

$$p_1^1(X) \leq p_2^1 \leq p_2^1(X^0). \quad (\text{П. 11})$$

Понятие приоритета критерия вытекает из аксиоматики, которая показывает, что допустимое множество точек S , в том числе множество точек, оптимальных по Парето, S^0 , лежащее между точками X_1^* и X_2^* , подразделяется на три подмножества точек:

подмножества S_1 и S_1^0 являются областью приоритета первого критерия над вторым (характеризуется тем $\lambda_1(X) \geq \lambda_2(X)$, $\forall X \in S_1^0 \subset S_1 \subset S$), в примере S_1^0 лежит между точками X_1^* и X^0 ;



подмножества S_2 и S_2^o являются областью приоритета второго критерия над первым $\lambda_2(X) \geq \lambda_1(X)$, $\forall X \in S_2^o \subset S_2 \subset S$, в примере S_2^o лежит между точками X_2^* и X^o ;

подмножество точек $S' \in S$, где критерии равнозначны $\lambda_1(X) = \lambda_2(X)$, $\forall X \in S' \subset S$.

Подмножеству S' принадлежит точка X^o , в которой λ^o – максимальный уровень, причем $\lambda^o = \lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o)$ в соответствии с теоремой. X^o также принадлежит и множеству точек, оптимальных по Парето, S^o (рис. П.1, П.2).

В задаче (П. 7) неравенства (П. 11) примут вид $p_1^1(X_1^*) = 3.3245 \leq p_2^1 \leq p_2^1(X^o)$, из него выбирается p_2^1 , который вводится в λ -задачу (П. 10).

В результате решения λ -задачи (П. 10) с заданным вектором приоритетов получим:

точку оптимума $X_1^o = \{\lambda_1 = 0.8694, x_1 = 23.5959, x_2 = 5.1233\}$ Рис. П.2:

оптимальное значение целевой функции: $\lambda^o = 0.8694$.

Выполним проверку: $f_1(X^o) = 123.1$, $\lambda_1(X_1^o) = 0.8694$; $f_2(X_1^o) = 1086.7$, $\lambda_2(X_1^o) = 0.4347$, т.е. $\lambda^o \leq \lambda_1(X_1^o) = 2\lambda_2(X_1^o) = 0.8694$.

Эти результаты показывают, что в точке оптимума X_1^o , относительная оценка $\lambda_1(X_1^o)$ в 2 раза больше относительной оценки $\lambda_2(X_1^o)$. Это соответствует условиям задачи: о приоритете первого критерия над вторым, при этом плоскость, определяемая функцией $2\lambda_2(X)$ в области Парето в точке X_1^o , достигла уровня $\lambda^o = 0.8694 = 2\lambda_2(X_1^o)$.

В результате решения λ -задачи (П. 10) с заданным вектором весовых коэффициентов получим: точку оптимума $X_2^o = \{\lambda_1 = 0.2922, x_1 = 9.0615, x_2 = 16.7508\}$ (Рис. П.1, П.2); оптимальное значение целевой функции: $\lambda^o = 0.2922$.

Выполним проверку: $f_1(X_2^o) = 62.1$, $\lambda_1(X_2^o) = 0.4383$; $f_2(X_2^o) = 2191.3$, $\lambda_2(X_2^o) = 0.8765$, т.е. $\lambda^o \leq 2\lambda_1(X_2^o)/3 = \lambda_2(X_2^o)/3 = 0.2922$.

Эти результаты показывают, что в точке оптимума X_2^o , относительная оценка $\lambda_1(X_2^o)$ в 2 раза меньше относительной оценки $\lambda_2(X_2^o)$, что полностью противоречит исходному заданию. Таким образом, метод, основанный на нормализации критериев и принципе гарантированного результата, дает точные ответы на поставленные условия ВЗМП.

Анализ результатов решения. (Дадим два пояснения).

1. Впервые в отечественной и зарубежной практике построены аксиомы 1, 2 и 2а, которые позволили представить в векторной (многокритериальной) проблеме (1)–(4) (и частности в задаче П.7–П.8) допустимое множество точек S , включающее:

Во-первых, подмножество точек, оптимальных по Парето, $S^o \subset S$, которое лежит между точками оптимума $X_k^o, k = \overline{1, K}$. (В нашем примере $X_k^*, k = \overline{1, 2} - X_1^*, X_2^*$).

Во-вторых, одно подмножество точек $S' \subset S$, где критерии эквивалентны: подмножество точек S' , пересекаясь с подмножеством точек S^o , выделяет подмножество точек, оптимальных по Парето, в подмножество с эквивалентными критериями $S^{oo} = S' \cap S^o$, которое, как это показано далее (и в нашем примере X^o), состоит из одной точки $X^o \in S$, т.е.

$$X^o = S^{oo} = S' \cap S^o, S' \in S, S^o \subset S.$$

В-третьих, создано « K » подмножеств точек, где у каждого критерия $q = \overline{1, K}$ имеется приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}, q \neq k$. В итоге, выполнено разделение:

1) множества всех допустимых точек S , на подмножества $S_q \subset S, q = \overline{1, K}$; В нашем примере: область точек, лежащая между $X_1^* - 0 - X^o$ является областью приоритета первого



критерия $S_{q=1} \subset S$; область точек, лежащая между $X_2^* - 0 - X^0$ является областью приоритета второго критерия $S_{q=2} \subset S$;

2) разделение подмножества точек, оптимальных по Парето, $S^0 \subset S$, на подмножества $S_q^0 \subset S_q \subset S, q = \overline{1, K}$. Отсюда верны следующие соотношения:

$$S' \cup (\bigcup_{q \in K} S_q^0) \equiv S^0, S_q^0 \subset S^0 \subset S, q = \overline{1, K}.$$

В нашем примере: область точек, лежащая между $X_1^* - X^0$ является областью приоритета первого критерия $S_{q=1}^0 \subset S^0 \subset S$; область точек, лежащая между $X_2^* - X^0$ является областью приоритета второго критерия $S_{q=2}^0 \subset S^0 \subset S$;

2. Мы заметим, что подмножество точек S_q^0 , с одной стороны, включено в область (подмножество точек), имеющих приоритет критерия $q \in K$ над другими критериями: $S_q^0 \subset S_q \subset S$, и с другой стороны, на подмножество точек, оптимальных по Парето: $S_q^0 \subset S^0 \subset S$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 5) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in S$ (посредством вектора приоритетов:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_k(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}, \text{ формироваться и выбирать: подмножество точек по}$$

приоритетному критерию S_q , который включен в множество точек $S, \forall q \in K X \in S_q \subset S$, (такое подмножество точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это вне статьи);

подмножество точек по приоритетному критерию S_q^0 , который включен в ряд точек S^0 , оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in S_q^0 \subset S^0$.

Таблица 2

Множество допустимых точек $X \in S \rightarrow$	Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in S^0 \subset S \rightarrow$	Подмножество точек, оптимума по Pareto $X \in S_q^0 \subset S^0 \subset S \rightarrow$	Отдельная точка, $\forall X \in S$ $X \in S_q^0 \subset S^0 \subset S$
--	--	--	--

Это самый важный результат, который позволит вывести принцип оптимальности и построить методы выбора любой точки из множества точек, оптимальных по Парето.

1.5. Прикладная многомерная математика: Векторная задача нелинейного программирования – модель развития инженерных систем.

В этом разделе мы рассматриваем отдельную задачу многомерной математики: векторную задачу нелинейного программирования. Математическое и программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования, алгоритмы решения которой при равнозначных критериях представлен в разделе 3 и при заданном приоритете критерия в разделе 4, [20, 22, 43, 45].

1.5.1. Векторная задача нелинейного программирования (ВЗНП)

Векторная задача нелинейного программирования (ВЗНП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев. ВЗНП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗНП. В соответствии с этими определениями представим векторную задачу нелинейного программирования с неоднородными критериями.

$$Opt F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X) = c_{0k} + c_{1k}x_1 + \dots + c_{N+1,k}x_1x_2 + \dots$$



$$+c_{n1,k}x_1^2 + \dots + c_{nnk}x_n^2, k = \overline{1, K_1}, \quad (51)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X) = c_{0k} + c_{1k}x_1 + \dots + c_{N+1,k}x_1x_2 + \dots + c_{n1,k}x_1^2 + \dots + c_{nnk}x_n^2, k = \overline{1, K_2}\}, \quad (52)$$

$$a_{0k} + a_{1i}x_1 + \dots + a_{N+1,i}x_1x_2 + \dots + a_{n1,i}x_1^2 + \dots + a_{nni}x_n^2 \leq b_i, i = \overline{1, M}, \quad (53)$$

$$\sum_{j=1}^N c_j^k x_j(t) \geq b_k(t), k \in K, \quad 0 \leq x_j(t) \leq u_j, j = \overline{1, N}, \quad (54)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, т.е. это вектор из N -мерного евклидова пространства R^N , (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = (1, \dots, N)$);

$F(X)$ – вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций. Функция представляет квадратичный полином.

Множество критериев (полиномов) K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации: $K = K_1 \cup K_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «opt», которое включает в себя $\max$ и $\min$;

$F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ – это векторный критерий (51), каждая компонента которого максимизирует, K_1 – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$ – множество критериев максимизации (задача (51), (53)-(54) представляют собой ВЗНП с однородными критериями максимизации);

$F_2(X) = \{\min f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ – множество критериев минимизации, K_2 – число критериев, (задача (52), (53)-(54) это ВЗНП с однородными критериями минимизации):

$$K_1 \cup K_2 = K, K_1 \subset K, K_2 \subset K.$$

(53) – стандартные нелинейные ограничения (в виде полиномов).

(54) – ограничения, накладываемые на критерии.

$S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{\min} \leq X \leq X^{\max}\} \neq \emptyset$ – это допустимое множество точек, задающиеся стандартными ограничениями (53)-(54) и тривиальными ограничениями $0 \leq x_j(t) \leq u_j, j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт. Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$ может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2(X)$ введен в ВЗНП (51)-(54) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев K_1, K_2 с принципиально различными направлениями оптимизации. Векторная задача нелинейного программирования (51)-(54) может рассматриваться как K - мерная задача оптимизации, где размерность критериев $K = K_1 \cup K_2$, с множеством параметров N .

1.5.2. Структура программного обеспечения решения векторной задачи нелинейного программирования

Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования (51)-(54) при равнозначных критериях реализовано на основе алгоритма решения ВЗНП, изложенного в разделе 3 и использования программы FMINCON(...), представленной в системе MATLAB. При использовании программы FMINCON(...) необходимо разработать две подпрограммы – функции: Первая функция включает два блока: первый блок предназначен для оценки в точке X критерия $f_k(X) \forall k \in K$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{df_k(X)}{dx} \forall k \in K$. Вторая



функция включает те же два блока только для ограничений: для оценки в точке X ограничения $g_i(X) \forall i \in M$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{dg_i(X)}{dx} \forall i \in M$. Программа FMINCON(...) используется на первом шаге алгоритма решения ВЗНП раздела 2.2.3 и на втором шаге этого алгоритма.

В дальнейшем Программа FMINCON(...) используется в соответствии с алгоритмом раздела 2.2.3 на 4 и 5 шаге, где решается λ -задача.

В целом при нелинейных ограничениях программное обеспечение решения ВЗНП включает: $K^*2(1 \text{ шаг}) + K^*2(2 \text{ шага}) + 2$ (λ -задача) обращений к функции FMINCON(...).

Так как критерии и ограничения ВЗНП индивидуальны, то для каждой ВЗНП пишется индивидуальное программное обеспечение, но по структуре аналогично представленному программному обеспечению. Для решения ВЗНП (51)-(54) разработанная программа в [33] представляет программу – шаблон для написания и решения других ВЗНП – математических моделей инженерных систем.

1.5.3. Математическая подготовка для решения векторной задачи нелинейного программирования

Пример 1. Дано. Рассматривается векторная задача нелинейного (выпуклого) программирования с четырьмя однородными критериями. В качестве критериев используем окружность, а на переменные наложены линейные ограничения.

$$\text{opt } F(X) = \{\min F_2(X) = \min f_1(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 80)^2 \quad (55)$$

$$\min f_2(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 20)^2, \quad (56)$$

$$\min f_3(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2, \quad (57)$$

$$\min f_4(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 80)^2, \quad (58)$$

$$\text{при ограничениях } 0 \leq x_1 \leq 100, 0 \leq x_2 \leq 100, \quad (59)$$

Требуется. Найти неотрицательное решение x_1, x_2 в системе неравенств (59), при котором функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ принимают минимальное значение.

Software for solving the vector problem of nonlinear programming (VPNP)

To solve the vector problem of nonlinear programming - a model of an engineering system, a program has been developed in the MATLAB system, which implements an algorithm for solving VPNP with equivalent criteria. The following is the result of the VPNP decision obtained by the program.

Recording the program in MATLAB format

```
% Программа "Решение векторной задачи нелинейного программирования":  
function [x,f] = VPNP_2_4Krit_100(x)  
% Автор: Машунин Юрий Константинович (Mashunin Yu. K.)  
  
% Алгоритм и программа предназначена для использования в образовании и научных  
% исследованиях, для коммерческого использования обращаться: Mashunin@mail.ru  
% Algorithm VPNP: 4Kriteriy + L-zadacha  
  
% [X,Fval,EXITFLAG,OUTPUT,LAMBDA,GRAD,HESSIAN]=  
%                                     fmincon(FUN,Xo,A,b,Aeq,beq,  
lb,ub,nlfcn,options,P1,P2,...)  
  
disp('*** Блок Исходных данных. ВЗНП:***')
```



```
disp('opt F(X)={max F1(X)={min f1=(x1-80).^2+(x2-80).^2; ')
disp('                                min f2=(x1-80).^2+(x2-20).^2; ')
disp('                                min f3=(x1-20).^2+(x2-20).^2; ')
disp('                                min f4=(x1-20).^2+(x2-80).^2; ')
disp('                                0<=x1<=100, 0<=x2<=100 ')
lb=[0. 0.];
ub=[100. 100.]; Xo=[0. 0.];
options=optimset('LargeScale','off');
options=optimset(options,'GradObj','on','GradConst','off');
A=[1 0;
   0 1];
b=[100 100];
Aeq=[]; beq=[];
XoK1max=[0. 0.];
disp('*** Шаг 1. Решение по каждому критерию (наилучшее) ***')%
[x1max,f1max]= fmincon('VPNP_2_Krit1max',XoK1max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X1max] = VPNP_2_Krit1min(x1max)
[f2X1max] = VPNP_2_Krit2min(x1max)
[f3X1max] = VPNP_2_Krit3min(x1max)
[f4X1max] = VPNP_2_Krit4min(x1max)
XoK2max=[0. 0.];
[x2max,f2max]= fmincon('VPNP_2_Krit2max',XoK2max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X2max] = VPNP_2_Krit1min(x2max)
[f2X2max] = VPNP_2_Krit2min(x2max)
[f3X2max] = VPNP_2_Krit3min(x2max)
[f4X2max] = VPNP_2_Krit4min(x2max)
XoK3max=[0. 0.];
[x3max,f3max]= fmincon('VPNP_2_Krit3max',XoK3max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X3max] = VPNP_2_Krit1min(x3max)
[f2X3max] = VPNP_2_Krit2min(x3max)
[f3X3max] = VPNP_2_Krit3min(x3max)
[f4X3max] = VPNP_2_Krit4min(x3max)
XoK4max=[0. 0.];
[x4max,f4max]= fmincon('VPNP_2_Krit4max',XoK4max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X4max] = VPNP_2_Krit1min(x4max)
[f2X4max] = VPNP_2_Krit2min(x4max)
[f3X4max] = VPNP_2_Krit3min(x4max)
[f4X4max] = VPNP_2_Krit4min(x4max)
disp('*** Шаг 2. Решение по каждому критерию (наихудшее) ***')%
XoK1min=[0. 0.];
[x1min,f1min]= fmincon('VPNP_2_Krit1min',XoK1min,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
```



```
[f1X1min] = VPNP_2_Krit1min(x1min)
[f2X1min] = VPNP_2_Krit2min(x1min)
[f3X1min] = VPNP_2_Krit3min(x1min)
[f4X1min] = VPNP_2_Krit4min(x1min)
[x2min,f2min] = fmincon('VPNP_2_Krit2min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options)
[f1X2min] = VPNP_2_Krit1min(x2min)
[f2X2min] = VPNP_2_Krit2min(x2min)
[f3X2min] = VPNP_2_Krit3min(x2min)
[f4X2min] = VPNP_2_Krit4min(x2min)
[x3min,f3min] = fmincon('VPNP_2_Krit3min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options)
[f1X3min] = VPNP_2_Krit1min(x3min)
[f2X3min] = VPNP_2_Krit2min(x3min)
[f3X3min] = VPNP_2_Krit3min(x3min)
[f4X3min] = VPNP_2_Krit4min(x3min)
[x4min,f4min] = fmincon('VPNP_2_Krit4min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options)
[f1X4min] = VPNP_2_Krit1min(x4min)
[f2X4min] = VPNP_2_Krit2min(x4min)
[f3X4min] = VPNP_2_Krit3min(x4min)
[f4X4min] = VPNP_2_Krit4min(x4min)
disp('*** Шаг 3. Системный анализ результатов ***')%
disp('Оценка критериев в точках оптимума: X1min,X2min,X3min,X4min')%
F=[f1X1min f2X1min f3X1min f4X1min;
   f1X2min f2X2min f3X2min f4X2min;
   f1X3min f2X3min f3X3min f4X3min;
   f1X4min f2X4min f3X4min f4X4min]
d1=f1X1min-f1X1max
d2=f2X2min-f2X2max
d3=f3X3min-f3X3max
d4=f4X4min-f4X4max
disp('Оценка критериев в относительных единицах: X1min,X2min,X3min,X4min')%
L=[ (f1X1min-f1X1max)/d1    (f2X1min-f2X2max)/d2    (f3X1min-f3X3max)/d3    (f4X1min-f4X4max)/d4;
    (f1X2min-f1X1max)/d1    (f2X2min-f2X2max)/d2    (f3X2min-f3X3max)/d3    (f4X2min-f4X4max)/d4;
    (f1X3min-f1X1max)/d1    (f2X3min-f2X2max)/d2    (f3X3min-f3X3max)/d3    (f4X3min-f4X4max)/d4;
    (f1X4min-f1X1max)/d1    (f2X4min-f2X2max)/d2    (f3X4min-f3X3max)/d3    (f4X4min-f4X4max)/d4]
disp('*** Шаг 4. Построение L-задачи ***')%
Ao=[1 0 0;
    0 1 0];
```



```
bo=[100 100]; Aeq=[]; beq=[];
Xoo=[0 0 0]
lbo=[0. 0. 0.]
ubo=[100. 100. 1]
disp('*** Шаг 5. Решение L-задачи ***')%
[Xo,Lo]=fmincon('VPNP_2_L',Xoo,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'VPNP_2_LConst')%,options)
disp('Оценка критериев в точке оптимума Xo')%
[f1Xo] = VPNP_2_Krit1min(Xo(1:2))
[f2Xo] = VPNP_2_Krit2min(Xo(1:2))
[f3Xo] = VPNP_2_Krit3min(Xo(1:2))
[f4Xo] = VPNP_2_Krit4min(Xo(1:2))
disp('Оценка критериев в точке оптимума Xo в относительных единицах')%
L1Xo=(f1Xo+f1max)/d1
L2Xo=(f2Xo+f2max)/d2
L3Xo=(f3Xo+f3max)/d3
L4Xo=(f4Xo+f4max)/d4
% ****Конец*****
% [Программа "Расчет 1 критер. - max"] файл: VPNP_2_Krit1max
function [f,G] = VPNP_2_Krit1max(x)
f=-(x(1)-80).^2-(x(2)-80).^2; %Расчет функции - критерий 1
G=[-2*(x(1)-80), -2*(x(2)-80)];%Расчет 1 производной критерия 1
% [Программа "Расчет 1 критер. - min"] Файл: VPNP_2_Krit1min
function [f,G] = VPNP_2_Krit1min(x);
f=(x(1)-80).^2+(x(2)-80).^2;
G=[2*(x(1)-80); 2*(x(2)-80)];
% [Программа "Расчет 2 критер. - max"] Файл: VPNP_2_Krit2max
function [f,G] = VPNP_2_Krit2max(x);
f=-(x(1)-80).^2-(x(2)-20).^2;
G=[-2*(x(1)-80); -2*(x(2)-20)];
% [Программа "Расчет критер. 2 - min"] Файл: VPNP_2_Krit2min
function [f,G] =VPNP_2_Krit2min(x);
f=(x(1)-80).^2+(x(2)-20).^2;
G=[2*(x(1)-80); 2*(x(2)-20)];
% [Программа "Расчет 3 критер. - max"] Файл: VPNP_2_Krit3max
function [f,G] = VPNP_2_Krit3max(x);
f=-(x(1)-20).^2-(x(2)-20).^2;
G=[-2*(x(1)-20); -2*(x(2)-20)];
% [Программа "Расчет 3 критер. - min"] Файл: VPNP_2_Krit3min
function [f,G] = VPNP_2_Krit3min(x);
f=(x(1)-20).^2+(x(2)-20).^2;
G=[2*(x(1)-20); 2*(x(2)-20)];
```



```
% [Программа "Расчет 4 критер. - max"] Файл:VPNP_2_Krit4max
function [f,G] = VPNP_2_Krit4max(x);
f=-(x(1)-20).^2-(x(2)-80).^2;
G=[-2*(x(1)-20);    -2*(x(2)-80)];

% [Программа "Расчет 4 критер. - max"] Файл:VPNP_2_Krit4max
function [f,G] = VPNP_2_Krit4max(x);
f=-(x(1)-20).^2-(x(2)-80).^2;
G=[-2*(x(1)-20);    -2*(x(2)-80)];

%[Программа "Расчет критер. L-задачи"] файл: VPNP_2_L
function [f,G] = VPNP_2_L(x)
f=-x(3);
G=[0;    0;    -1];

% [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: VPNP_1_LConst
function [c,ceq,DC,DCEq]= VPNP_2_LConst(x)
d1=12800;d2=12800;d3=12800;d4=12800;
f1X1max=12800;f2X2max=12800;f3X3max=12800;f4X4max=12800;
c(1)=(x(1)-80).^2+(x(2)-80).^2/d1+x(3)-f1X1max/d1;
c(2)=(x(1)-80).^2+(x(2)-20).^2/d2+x(3)-f2X2max/d2;
c(3)=(x(1)-20).^2+(x(2)-20).^2/d3+x(3)-f3X3max/d3;
c(4)=(x(1)-20).^2+(x(2)-80).^2/d4+x(3)-f4X4max/d4;
G1=[2*(x(1)-80)/d1, 2*(x(1)-80)/d2, 2*(x(1)-20)/d3, 2*(x(1)-20)/d4;
    2*(x(2)-80)/d1, 2*(x(2)-20)/d2, 2*(x(2)-20)/d3, 2*(x(2)-80)/d4;
    1.0,            1.0,            1.0,            1.0];
ceq=[]; DCEq=[]; % *****Конец*****
% *****Конец*****
```

Решение векторной задачи нелинейного программирования.

Для решения задачи (55)-(59) по каждому критерию, а в дальнейшем и λ -задачи, используется система MATLAB (функция `fmincon(...)` – решение нелинейной задачи оптимизации) [23]. Решение представлено, как последовательность шагов.

Шаг 1. Решается векторная задача (55)-(59) на $\max$ по каждому критерию отдельно.

Результаты решения ВЗМП (55)-(59) по каждому критерию:

1 критерий $X_1^* = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -12800$;

2 критерий $X_2^* = \{x_1 = 0, x_2 = 100\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -12800$;

3 критерий $X_3^* = \{x_1 = 100, x_2 = 100\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -12800$;

4 критерий $X_4^* = \{x_1 = 100, x_2 = 0\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = -12800$;

Шаг 2. Решается векторная задача (55)-(59) на $\min$ по каждому критерию отдельно.

Результаты решения ВЗМП (55)-(59) по каждому критерию: $X_1^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 80\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 0, \dots, X_4^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 80\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = 0$. Рис. 1.



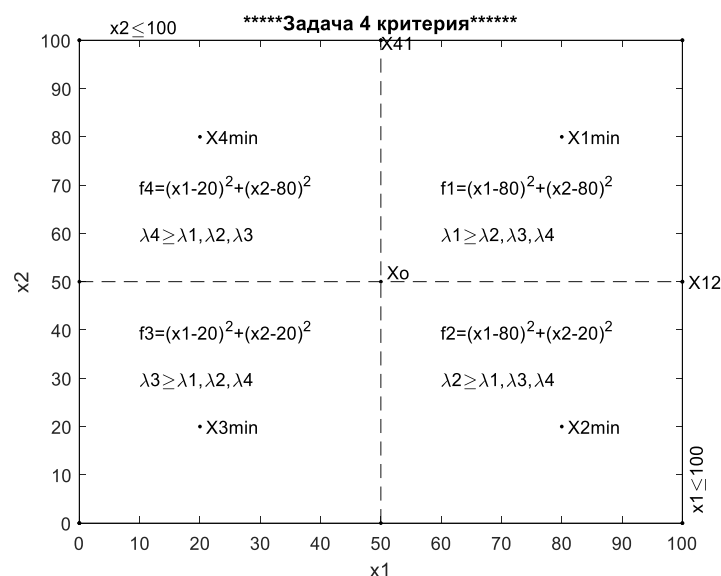


Рисунок 1. Ограничения ВЗМП (55)-(59), точки оптимума $X_1^0 = X1min, X_2^0 = X2min, X_3^0 = X3min, X_4^0 = 4min$ и относительные оценки.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек Парето.

В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$, определяются величины целевых функций $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$:

$$F(X^*) = \{\{f_q(X_k^*), q = \overline{1, K}\}, k = \overline{1, K}\}, \lambda(X^*) = \{\{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}\}, k = \overline{1, K}\},$$

В системе MATLAB в точках оптимума: X1min, X2min, X3min, X4min вычисление этих функций будет следующим:

$$F(X^*) = \begin{bmatrix} f_1(X_1^*) & f_2(X_1^*) & f_3(X_1^*) & f_4(X_1^*) \\ f_1(X_2^*) & f_2(X_2^*) & f_3(X_2^*) & f_4(X_2^*) \\ f_1(X_3^*) & f_2(X_3^*) & f_3(X_3^*) & f_4(X_3^*) \\ f_1(X_4^*) & f_2(X_4^*) & f_3(X_4^*) & f_4(X_4^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3600 & 7200 & 3600 \\ 3600 & 0 & 3600 & 7200 \\ 7200 & 3600 & 0 & 3600 \\ 3600 & 7200 & 3600 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda(X^*) = \begin{bmatrix} \lambda_1(X_1^*) & \lambda_2(X_1^*) & \lambda_3(X_1^*) & \lambda_4(X_1^*) \\ \lambda_1(X_2^*) & \lambda_2(X_2^*) & \lambda_3(X_2^*) & \lambda_4(X_2^*) \\ \lambda_1(X_3^*) & \lambda_2(X_3^*) & \lambda_3(X_3^*) & \lambda_4(X_3^*) \\ \lambda_1(X_4^*) & \lambda_2(X_4^*) & \lambda_3(X_4^*) & \lambda_4(X_4^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.7188 & 0.4375 & 0.7188 \\ 0.7188 & 1.0 & 0.7188 & 0.4375 \\ 0.4375 & 0.7188 & 1.0 & 0.7188 \\ 0.7188 & 0.4375 & 0.7188 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

В точках оптимума $X_k^*, k = \overline{1, K}$ все относительные оценки (нормализованные критерии) равны единице: $\lambda_k(X_k^*) = \frac{f_k(X_k^*) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} = 1, k = \overline{1, K}, K = 4$.

В точках оптимума $X_k^0, k = \overline{1, K}$ все относительные оценки равны нулю:

$$\lambda_k(X_k^0) = \frac{f_k(X_k^0) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} = 0, k = \overline{1, K}, K = 4. \text{ Отсюда } \forall k \in K, \forall X \in S, 0 \leq \lambda_k(X) \leq 1.$$

Шаг 4. Строится λ -задача.

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \lambda, \quad (60)$$

$$\text{При ограничениях: } \lambda - \frac{f_1(X) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} \leq 0, \lambda - \frac{f_2(X) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} \leq 0, \lambda - \frac{f_3(X) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} \leq 0, \lambda - \frac{f_4(X) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} \leq 0,$$



$$0 \leq x_1 \leq 100, 0 \leq x_2 \leq 100.$$

Шаг 5. Решение λ -задачи. Результаты решения λ -задачи:

$$X^o = \{x_1 = 50.0, x_2 = 50.0, x_3 = 0.8594\}.$$

$X^o = \{x_1=50.0, x_2=50.0, x_3=0.8594\}$ – точка оптимума, где

$x_3=\lambda^o$; а x_1, x_2 соответствует x_1, x_2 задачи (41)-(45);

$\lambda^o = 0.8594$ представляет оптимальное значение целевой функции.

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, а также точки оптимума X^o и λ^o , которые получены на пересечении, в трехмерной системе координат x_1, x_2, λ показаны на рис. 2.

На рис. 1, 2 видно, что область (множество точек), ограниченная функцией $f_1 = (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 80)^2$ - характеризуется тем, что $\lambda_1(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{2,4}, X \in S_1$, (на рис. 3 показано, как $\lambda_1 > \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$), т. е. область S_1 приоритетна по первому критерию. В этой области приоритет первого критерия относительно остальных всегда больше или равен единице: $p_k^1(X) = \lambda_1(X)/\lambda_k(X) \geq 1, \forall X \in S_1$.

Аналогично показаны множества точек приоритетных по соответствующему критерию, в совокупности они дают множество точек, оптимальных по Парето, S^o , а оно (для данного примера) равно множеству допустимых точек: $S^o = S_1^o \cup S_2^o \cup S_3^o \cup S_4^o \cup X^o = S$.

1.5.4. Исследование результатов решения векторной задачи нелинейного программирования как математическую модель инженерной системы

Под понятием инженерной системы мы понимаем: технические системы, технологические процессы, структура материала. В качестве математической модели инженерной системы рассматривается *векторная задача нелинейного (выпуклого) программирования* с четырьмя однородными критериями (55)-(59) и соответствующая λ -задача (60). Функции в относительных единицах $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, а также точки оптимума X^o и λ^o , которые получены на пересечении, в трех мерной системе координат x_1, x_2, λ показаны на рис. 2. В ВЗМП (55)-(59) множество точек, лежащих в координатах (параметры) $0 \leq x_1 \leq 100, 0 \leq x_2 \leq 100$, является допустимым множеством параметров инженерной системы. В ВЗМП (55)-(59) на рис. 2 множество точек, лежащих в координатах $X1min = X2min - X3min - X4min$, является множеством Парето. Множество Парето характеризуется тем, что нельзя улучшить один из критериев, не ухудшая другие критерии.

Представим на рис. 2 точки оптимума по каждому критерию: $X_1^* = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, $X_2^* = \{x_1 = 0, x_2 = 100\}$, $X_3^* = \{x_1 = 100, x_2 = 100\}$, $X_4^* = \{x_1 = 100, x_2 = 0\}$.

Решение при равнозначных критериях в относительных единицах представлено λ -задачей.



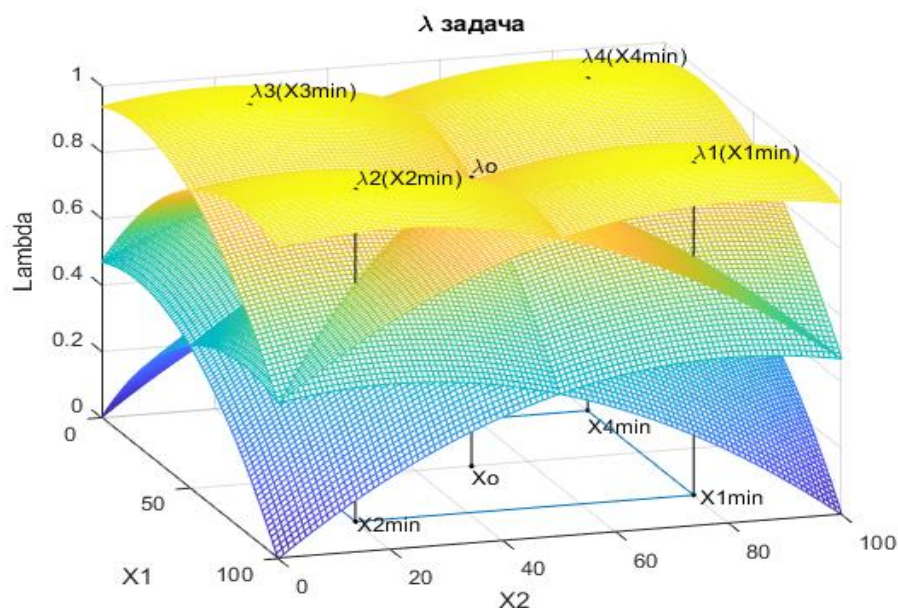


Рисунок 2. Результаты решения ВЗМП (55)-(59),(60):
Функции $\lambda_1(X), \dots, \lambda_4(X)$, точки оптимума X^0, λ^0

В результате решения при равнозначных критериях λ -задачи получили точку оптимума:
 $X^0 = \{x_1 = 50.0, x_2 = 50.0, x_3 = 0.8594\}$, где $x_3 = \lambda^0 = 0.8594$.

$\lambda^0 = 0.8594$ – это гарантированный результат в относительных единицах, который показывает, что улучшение по любому критерию приводит к ухудшению других критериев.

Относительные единицы легко переводятся в физические единицы по каждому критерию (характеристике инженерной системы).

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в точках оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ (на рис. 2: $X1min, X2min, X3min, X4min$) получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*) = \begin{Bmatrix} L(X_1^*) \\ L(X_2^*) \\ L(X_3^*) \\ L(X_4^*) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0 & 0.7188 & 0.4375 & 0.7188 \\ 0.7188 & 1.0 & 0.7188 & 0.4375 \\ 0.4375 & 0.7188 & 1.0 & 0.7188 \\ 0.7188 & 0.4375 & 0.7188 & 1.0 \end{Bmatrix}.$$

Представим из рис. 2 величины относительных оценок в точке оптимума, например X_2^* :
 $L(X_2^*) = \{\lambda_1(X_2^*) = 0.7188, \lambda_2(X_2^*) = 1.0, \lambda_3(X_2^*) = 0.7188, \lambda_4(X_2^*) = 0.4375\}$.

Линейная функция, соединяющая точки $\lambda^0 = 0.8594$ и $\lambda_2(X_2^*) = 1$ в относительных единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в относительных единицах в двухмерном измерении параметров x_1, x_2 . Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функций $f_2(X)$ в относительных единицах из N -мерного (в этом примере 2-мерного) в двухмерную систему координат. Предположим, что для проектировщика функция $f_2(X)$ является наиболее важной -приоритетной. При исследовании приоритетной функцию $f_2(X)$, мы можем задавать различные числовые значения $f_2(X)$ из соотношения: $f_2(X^0) \leq f_2(X) \leq f_2(X_2^*)$ и в итоге можем получать соответствующие параметры.



Таким же образом можно проводить исследование других критериев (функций инженерной системы): $f_1(X), f_3(X), f_4(X)$. Численное решение такого исследования представлено на четырехмерной системе.

1.5.5. Методология выбора оптимального параметров сложных инженерных систем в условиях определенности, неопределенности при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия, используя интеллектуальные знания конструктора системы.

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «Инженерные системы», к которым относятся «технические системы», «технологические процессы», «материалы», [17, 18, 19]. Исследование инженерной системы выполнено, во-первых, в условиях определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках инженерной системы; во-вторых, в условиях неопределенности, когда, используя интеллектуальные знания конструктора, задаются дискретные значения отдельных характеристик системы. Известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование системы. Математический аппарат моделирования инженерной системы базируется на теории и методах векторной оптимизации (многомерная математика), которые представлены во втором разделе. В организационном плане процесс моделирования и симулирования технической системы представлен в виде методологии: «Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности».

1. Виды задач, возникающих в процессе моделирования и принятия оптимального решения выбора параметров сложных инженерных систем

Задачи, которые возникают в процессе принятия оптимального решения выбора оптимальных параметров сложных инженерных системах на базе векторной оптимизации включает последовательно три вида.

1 вид. Решение векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях. Полученный результат является основой для дальнейшего исследования системы. При этом используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях. Если полученный результат удовлетворяет лицу, принимающего решения, (ЛПР - проектировщик), то он берется за основу. Если не удовлетворяет, то переходим ко второму виду (прямая задача) или третьему виду решения векторных задач (Обратная задача).

2 вид. Решение прямой задачи векторной оптимизации, которая состоит в следующем: «Какие будут показатели (характеристики), если изменить параметры сложных технических систем». – Используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях.

3 вид. Решение обратной задач векторной оптимизации, которая состоит в следующем: «Какие будут параметры сложных инженерных систем при заданных числовых значениях отдельных характеристик». Эти характеристик задаются, используя интеллектуальные знания конструктора инженерной системы. Используется метод решения векторной задачи при заданном приоритете критерия.

1.5.6. Методология моделирования и выбора оптимальных параметров сложных инженерных систем в условиях определенности, неопределенности

Методология выбора оптимальных параметров сложных инженерных систем разделена две части.



Первая часть методологии предназначена для «Выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности с равнозначными критериями.

Вторая часть методологии предназначена для «Выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности с приоритетом одного из критериев». Численные значения исследуемого критерия задаются, используя интеллектуальные знания, конструктором инженерной системы. Первая и вторая часть включает два блока разделен на ряд этапов.

Часть 1. Выбор оптимальных параметров сложных инженерных систем в условиях определенности и неопределенности при равнозначных критериях.

Блок 1. *Формирование технического задания, преобразование условий неопределенности (связанных с экспериментальными данными) в условия определенности, построение математической и численной модели инженерной системы (the process of modeling of a engineering system)* включает 4 этапа.

1 этап. Формирование технического задания (исходных данных) для численного моделирования и выбора оптимальных параметров системы. Исходные данные формирует конструктор, который проектирует инженерную систему.

2 этап. Построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности.

3 этап. Преобразование условий неопределенности в условия определенности и построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

4 этап. Построение агрегированной математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

Блок 2. *Принятие оптимального решения (выбора оптимальных параметров) в инженерной системе при равнозначных критериях на базе многомерной математики*

5 этап. Решение векторной задачи математического программирования (ВЗМП) - модели инженерной системы при равнозначных критериях (решение прямой задачи).

6 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях в трехмерной системе координат в относительных единицах.

7 этап. Представление результатов решения Векторной Задачи Математического Программирования при равнозначных критериях и подготовка информации для принятия решений с приоритетом отдельного критерия из всего множества критериев.

Часть 2. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности с приоритетом критерия, числовые значения которого задает конструктор системы.

Блок 3. Анализ, сравнение результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях сложной инженерной системы и подготовка к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию.

8 этап. Анализ и сравнение результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями с четырьмя и двумя переменными. Вывод из анализа: *Информация об Инженерной Системе* в физических единицах для принятия решений с приоритетом



критерия. Подготовка к геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию.

9 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к N -мерному пространству в относительных единицах.

Блок 4. Выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы по приоритетному критерию, числовые значения которого задает конструктор системы, геометрическая интерпретация результатов решения на базе многомерной оптимизации.

Выбор оптимальных параметров сложной инженерной (технической) системы и геометрическая интерпретация результатов решения по приоритетному критерию соответствует количеству критериев $K = 4$: Блок **k1**, Блок **k2**, Блок **k3**, Блок **k4**.

Наименование блока: Блок **k1**, ..., Блок **k4**.

«Выбор оптимальных параметров инженерной системы (техническая система) по (первому, ..., четвертому) приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП».

Каждый блок выбора параметров по соответствующему критерию включает следующие разделы.

1.k1, ..., 1.k4. Решение векторной задачи - модели сложной инженерной системы (технической системы) при заданном приоритете первого критерия, включающее:

Решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при равнозначных критериях (Шаг 1).

Выбор приоритетного критерия $q \in K$ (Шаг 2).

Выбор числовой величины выбранного приоритетного критерия $q \in K$ (Шаги 3, 4).

Решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете $q \in K$ критерия (Шаги 5 – 8).

2.k1, ..., 2.k4. Анализ результатов решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете первого критерия.

3.k1, ..., 3.k4. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию в относительных единицах.

4.k1, ..., 4.k4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП (функций: $f_1(X), \dots, f_4(X)$) с приоритетом первого критерия – модели технической системы при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах.

1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП первого критерия с приоритетом первого критерия – модели инженерной системы при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах. ...

2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП четвертого критерия с приоритетом первого критерия – модели инженерной системы при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах.

2. Моделирование и выбор оптимальных параметров технологической системы в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики и интеллекта конструктора.



Численная реализация выбора оптимальных параметров технологической системы выполнена на базе теории методов многомерной математики и интеллекта конструктора.

2.1. Математическое моделирование многопараметрической и многофункциональной технологической системы для принятия оптимального управленческого решения

2.1.1. Математическая модель технологического процесса в условиях определенности

В качестве объекта исследования инженерных систем мы используем «технологический процесс». Постановка проблемы принятия решений в технологии при производстве изделий выполнена в соответствии с [15].

Рассматривается технологический процесс (например, Гибридная лазерная дуговая сварка (HLAW) (Hybrid Laser Arc Welding (HLAW), [68], в которой сплав ZE41-T5 был выбран как материал, который нужно сварить с сплавом AZ61 как материал заполнителя). Деятельность технологического процесса зависит от определенного множества условий – конструктивных параметров: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}^T$, или $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, (например: мощности лазера, (laser power); скорости перемещения (travel speed); скорости подачи проволоки, (wire feed rate); тока, (current); частоты (frequency)). Обозначим N – множество конструктивных параметров. Каждый параметр технологического процесса лежит в заданных пределах: $x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}$, или $X^{min} \leq X \leq X^{max}$, где $x_j^{min}, x_j^{max}, \forall j \in N$ – нижний и верхний пределы изменения вектора параметров технологического процесса, N – множество параметров.

Результат функционирования определяется набором критериев (технологических характеристик): $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}^T$, которые функционально зависят от конструктивных параметров технологического процесса $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, (например: глубина сварного шва (weld depth); недозагрузка (underfill); процентный дефект (percentage defect); накопленная длина пор (total accumulated pore length)). В совокупности все технологические характеристики представляют вектор-функцию:

$$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_K(X)\}^T \text{ или } F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}^T,$$

где $K, (K)$ – множество (число) технологических характеристик.

Множество технологических характеристик K подразделяется на подмножества K_1, K_2 : $K = K_1 \cup K_2, K_1 \subset K, K_2 \subset K$.

K_1 представляет подмножество технологических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно выше: $f_k(X) \rightarrow \max, k = \overline{1, K_1}$.

K_2 представляет подмножества технологических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно ниже: $f_k(X) \rightarrow \min, k = \overline{1, K_2}$.

Математическая модель должна, во-первых, отражать цели технологического процесса, которые представлены характеристиками $F(X)$, во-вторых, учитывать ограничения: $X^{min} \leq X \leq X^{max}$.

Математическая модель технологического процесса, в целом решающего проблему выбора оптимальных параметров технологического процесса, представить в виде векторной задачи оптимизации.

$$Opt F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (2.1)$$



$$\begin{aligned} \min F_2(X) &= \{\min f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}, \\ \text{при ограничениях: } f_k^{\min} &\leq f_k(X) \leq f_k^{\max}, k = \overline{1, K}, \\ G(X) &\leq 0, x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, – это вектор управляемых переменных (конструктивных параметров) технологического процесса;

$F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого представляет характеристику технологического процесса (2.1), функционально зависящую от вектора переменных X ;

в (2.2) $G(X) = \{g_i(X), i = \overline{1, M}\}^T$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование технологического процесса, M – множество ограничений. Ограничения определяются протекающими в них технологическими, физическими и тому подобными процессами и могут быть представлены функциональными ограничениями, например,

$$f_k^{\min} \leq f_k(X) \leq f_k^{\max}, k = \overline{1, K}.$$

Предполагается, что функции $f_k(X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i(X), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а $S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{\min} \leq X \leq X^{\max}\} \neq \emptyset$.

Соотношения (2.1)-(2.2) образуют математическую модель технологического процесса.

Требуется определить такой вектор параметров $X^0 \in S$, при котором каждая компонента вектор – функции:

$F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ принимает максимально возможное значение, а вектор – функция: $F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}$ принимает минимальное значение.

2.1.2. Математическая модель многопараметрического и многофункционального технологического процесса в условиях неопределенности

В векторной задаче математического программирования (2.1)-(2.2) известна функциональная зависимость каждого критерия (2.1), ограничений (2.2) от параметров, накладываемых на функционирование. Такая математическая модель (2.1)-(2.2) называется моделью в условиях определенности. Если нет достаточной информации о функциональной зависимости каждого критерия (2.1) и ограничений (2.2) от параметров, а известны лишь дискретные (как правило, экспериментальные) данные $I_i(X)$, то такая модель инженерной системы характеризуется как модель в условиях неопределенности.

Представим дискретное множество параметров и характеристик:

$$I_i(X) = \{X_i, f_k(X_i), i = \overline{1, M}\}^T = \begin{bmatrix} x_{i1}, \dots, x_{iN} & f_{i1}(X_i), \dots, f_{iK}(X_i) \\ \vdots & \vdots \\ x_{i1}, \dots, x_{iN} & f_{i1}(X_i), \dots, f_{iK}(X_i) \end{bmatrix} \text{ в условиях неопределенности,}$$

где N множество параметров, M множество данных, или $X_i = \{x_{ij}, j = \overline{1, N}, i = \overline{1, M}\}$

Для получения данных $I_i(X) = \{(y_k(X_i), i = \overline{1, M})\}^T$ проводятся экспериментальные исследования технологической системы по принципу «вход-выход», при этом формируется задача принятия решений в условиях неопределенности и возникает проблема выбора оптимальной оценки на основе полученных данных

2.1.3. Математическая модель многопараметрического и многофункционального технологического процесса в условиях определенности и неопределенности в совокупности



Математическая модель технологического процесса (2.1)-(2.2) выполнена в условиях определенности. В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель технологического процесса так же должна отражать эти условия.

Преобразуем математическую модель (2.1)-(2.2) с учетом условий неопределенности - дискретного множества параметров и характеристик: $I_i(X)$. В итоге получим:

«Модель технологического процесса в условиях определенности и неопределенности»:

$$Opt F(X) = \{max F_1(X) = \{max f_k(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (2.3)$$

$$max I_1(X) \equiv \{max f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\},$$

$$min F_2(X) = \{min f_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}\}, \quad (2.4)$$

$$min I_2(X) \equiv \{min f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}$$

$$\text{при ограничениях } f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (2.5)$$

$$G(X) \leq 0, x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (2.6)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – это вектор управляемых переменных (параметров) технологического процесса; $F(X) = \{F_1(X) F_2(X) I_1(X) I_2(X)\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором характеристик (критериев) технологического процесса (2.3)-(2.4); Критерии $F_1(X) F_2(X)$ функционально зависят от значений вектора переменных X , которые обозначены как K_1^{def} , K_2^{def} (*definiteness*). Сформированные в условиях определенности;

Критерии $I_1(X) I_2(X)$ характеризуют дискретные значения функций, которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных X , обозначены в (2.3) и (2.4) как K_1^{unc} , K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев max и min . Сформированы в условиях неопределенности.

(2.5) и (2.6) стандартные ограничения: функциональные, параметрические и общие.

2.2. Часть 1. Выбор оптимальных параметров технологического процесса в условиях определенности и неопределенности при равнозначных критериях.

Техническое задание, анализ результатов решения и выбора приоритетного критерия, его величины выполняется **конструктором материала**.

Остальные этапы выполняются **математиком - программистом**.

2.2.1. Техническое задание: Выбор оптимальных параметров технологического процесса

Дано. Исследуется технологический процесс, который характеризуется двумя параметрами: $X = \{x_1, x_2\}$. Значения X представляют вектор управляемых переменных.

Заданы параметры технологического процесса $X = \{x_1, x_2\}$, которые изменяются в следующих пределах: $2.0 \leq x_1 \leq 3.5$, $12.0 \leq x_2 \leq 30.0$.

Четыре характеристики (критерии) технологического процесса определяют его функционирование: $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}^T$, зависят от вектора параметров X .

Условия определенности. Известна функциональная зависимость от параметров технологического процесса для четвертой характеристики $f_4(X)$:



$X = \{x_k, k = \overline{1, K}, K = 2\}$:

$$f_4(X) = -0.245 - 0.747x_1 + 0.3831x_1^2 + 0.0442x_2 + 0.0012x_2^2 - 0.0346x_1x_2. \quad (2.7)$$

Условия неопределенности. Известны результаты *экспериментальных данных*: для первой, второй и третьей характеристики технологического процесса: $f_k(X), k = 1, 2, 3$. Числовые значения параметров $X = \{x_1, x_2\}$ и характеристик $f_1(X), f_2(X), f_3(X)$, представлены в таблице 2.

Таблица 2

Экспериментальные параметры ввода и вывода

Laser Power, p (Analog V) Мощности лазера	Travel Speed, v (mm/sec) Скорости перемещения	Wire Feed Rate, r (m/min) Скорости подачи проволоки	Depth, D(mm) Глубина, Д (мм)	Total Accumulated Pore Length, Po (mm/mm) Общая накопленная длина пор
x_1	x_2	$f_1(X) \rightarrow \max$	$f_2(X) \rightarrow \min$	$f_3(X) \rightarrow \max$
2.400	25.201	4.2196	55.3952	-0.0364
2.760	18.720	3.2715	31.2498	0.0286
2.760	19.081	3.2771	32.3886	0.0272
2.760	31.680	4.2614	86.8526	0.0760
2.760	31.921	4.2948	88.1656	0.0787
3.300	14.400	3.0958	21.1331	0.3467
3.300	25.201	3.0102	56.1913	0.2171
3.300	25.801	3.0382	58.7506	0.2138
3.300	26.760	3.0909	62.9794	0.2096
3.300	27.601	3.1442	66.8147	0.2068
3.300	28.801	3.2321	72.5126	0.2041
3.300	30.001	3.3337	78.4682	0.2032
3.300	31.20	3.4496	84.6812	0.2039
3.300	32.40	3.5793	91.1518	0.2063
3.300	36.00	4.0516	112.1086	0.2236
3.840	18.720	3.0984	35.3082	0.6402
3.840	23.520	2.9672	51.6458	0.5450
3.840	31.680	3.2555	88.8758	0.4451
3.840	32.880	3.3521	95.3551	0.4369
4.200	25.201	3.2371	60.4633	0.7810
Min: 2.400	14.400	2.9672	21.1332	-0.0364
Max: 4.200	36.000	4.2948	112.1087	0.7811

В принимаемом управленческом решении величину оценки первой и третьей характеристики желательно, получить как можно выше: $f_1(X) \rightarrow \max, f_3(X) \rightarrow \max$;

Оценки второй и четвертой характеристики как можно ниже: $f_2(X) \rightarrow \min, f_4(X) \rightarrow \min$.

Параметры технологического процесса $X = \{x_1, x_2\}$ изменяются в пределах:

$$2.0 \leq x_1 \leq 3.5, 12.0 \leq x_2 \leq 30.0. \quad (2.8)$$



Требуется. Разработать математическую модель технологического процесса в виде векторной задачи математического программирования. Задачу векторной оптимизации решить с равнозначными критериями. Выбрать из всего множества критериев приоритетный критерий. Установить численное значение приоритетного критерия. Решить задачу векторной оптимизации и принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия.

2.2.2. Построение математической (численной) модели технологического процесса в условиях определенности

Построение модели технологического процесса с функциональной зависимостью определяется тем, что известны характеристики и ограничения от параметров $X = \{x_1, x_2\}$. Известны характеристика (2.7) и ограничения (2.8). Используя данные (2.7), (2.8), построим однокритериальную задачу нелинейного программирования - условия определенности [7,11]:

$$\max f_4(X) = -0.245 - 0.747x_1 + 0.3832x_1^2 + 0.0442x_2 + 0.0012x_2^2 - 0.0346x_1x_2, \quad (2.9)$$

$$2.0 \leq x_1 \leq 3.5, 12.0 \leq x_2 \leq 30.0. \quad (2.10)$$

В дальнейшем информационные данные (2.9) и (2.10) используются при построении агрегированной математической технологического процесса.

2.2.3. Преобразование условий неопределенности (экспериментальных данных) в условия определенности и построение численной модели

Построение модели с условиями неопределенности состоит в использовании качественных и количественных описаний технологического процесса, которые получены как “вход-выход” и представлены в таблице 2.

Исходные данные таблицы 2: $f_1(x_i, i = \overline{1, M}), f_2(x_i, i = \overline{1, M}), f_3(x_i, i = \overline{1, M})$ преобразуются путем использования математических методов (регрессионного анализа) в функциональный вид: $f_1(X), f_2(X), f_3(X)$.

В системе MATLAB исходные данные таблицы 2 сформированы в виде матрицы I :

$$I = |X, F| = \begin{bmatrix} X_1 = \{x_{11}, x_{12}\}, f_1(X_1), f_2(X_1), f_3(X_1) \\ \dots \\ X_M = \{x_{M1}, x_{M2}\}, f_1(X_M), f_2(X_M), f_3(X_M) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

На основе экспериментальных данных $f_k, k = \overline{1, 3}$ (2.11) в системе MATLAB строится функция регрессии по методу наименьших квадратов $\min \sum_{i=1}^M (f_i - \bar{f}_i)^2$. Формируется полином A_k , определяющий взаимосвязь параметров $X_i = \{x_{1i}, x_{2i}\}$ и функции:

$$\bar{f}_{ki} = f(X_{ki}, A_k), X_{ki} = \{x_{ki}, x_{ki}\}, k = \overline{1, 3}. \quad (2.12)$$

Результатом является система коэффициентов: $A_k = \{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{5k}\}, k = \overline{1, 3}$, определяющие коэффициенты функции (полинома):

$$f_k(X, A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_1^2 + a_{3k}x_2 + a_{4k}x_2^2 + a_{5k}x_1x_2, k = \overline{1, 3}. \quad (2.13)$$

Для определения коэффициентов полинома (73) функций, таблицы 2, разработано программное обеспечение полиномиальной аппроксимации в [18] с двумя переменными и пятью факторами. В результате работы программы получены коэффициенты:

$$\begin{array}{llll} A_0 = [11.4751 & 8.8173 & -0.1222 & \% A_{0k} \\ -4.8994 & -7.6807 & -0.3735 & \% A_{1k} \\ 0.8868 & 2.1456 & 0.1916 & \% A_{2k} \\ -0.0030 & 0.1851 & 0.0221 & \% A_{3k} \end{array}$$



$$\begin{array}{cccc} 0.0048 & 0.0894 & 0.0006 & \% A_{4k} \\ -0.0595 & -0.1454 & -0.0173] & \% A_{5k} \end{array} \quad (2.14)$$

С учетом полученных коэффициентов $A_0(1)$ (2.14) экспериментальные данные $\{x_{1i}, x_{2i}, f_{1i}, i = \overline{1, M}\}$ матрицы $I = |X, F|$ (2.14) преобразуются в функцию (2.13) $f_1(X)$.

С учетом полученных коэффициентов $A_0(2)$ (2.14) экспериментальные данные $\{x_{1i}, x_{2i}, f_{2i}, i = \overline{1, M}\}$ матрицы $I = |X, F|$ (2.14) преобразуются в функцию (2.13) $f_2(X)$.

С учетом полученных коэффициентов $A_0(3)$ экспериментальные данные $\{x_{1i}, x_{2i}, f_{3i}, i = \overline{1, M}\}$ матрицы $I = |X, F|$ (2.14) преобразуются в функцию (2.13) $f_3(X)$.

В итоге экспериментальные данные таблицы 1 сформированы с учетом целенаправленности в векторную задачу математического программирования:

$$\max f_1(X) = 11.474 - 4.899x_1 + 0.8868x_1^2 - 0.003x_2 + 0.0048x_2^2 - 0.0595x_1x_2. \quad (2.15)$$

$$\max f_2(X) = 8.817 - 7.681x_1 + 2.145x_1^2 + 0.1851x_2 + 0.0894x_2^2 - 0.1454x_1x_2. \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \max f_3(X) = -0.12251 - 0.3736x_1 + 0.1916x_1^2 + 0.0222x_2 + 0.0006x_2^2 - 0.0173x_1x_2. \\ 2.0 \leq x_1 \leq 3.5, 12.0 \leq x_2 \leq 30.0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.2.4. Математическая числовая модель технологического процесса с агрегированными данными эксперимента в условиях определенности.

Используя функции задачи (2.9)-(2.10), полученные условиях определенности, и функции задачи (2.15)-(2.17), полученные условиях неопределенности – экспериментальных данных, параметрические ограничения (2.17) представим математическую модель технологического процесса. Мы рассматриваем математические функции (2.9), (2.15), (2.16), (2.17) как критерии, которые характеризуют целенаправленность функционирования технологического процесса. Множество критериев $K=4$ включают: подмножество критериев $K_1 = 2$, направленных на максимизацию функций $\{f_1(X), f_3(X)\} \rightarrow \max$; подмножество критериев $K_2 = 2$, направленных на минимизацию: $\{f_2(X), f_4(X)\} \rightarrow \min$, $K = K_1 \cup K_2$.

Критерии $K = K_1 \cup K_2$ дополняются ограничениями и формируется математическую численную модель функционирования технологического процесса, представленной векторной задачей математического программирования:

$$\begin{aligned} Opt F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_1(X) \equiv 11.474 - 4.899x_1 \\ + 0.8867x_1^2 - 0.0031x_2 + 0.0048x_2^2 - 0.0595x_1x_2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \max f_3(X) \equiv -0.1225 - 0.3735x_1 + 0.1916x_1^2 \\ + 0.022x_2 + 0.0006x_2^2 - 0.0173x_1x_2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_2(X) \equiv 8.817 - 7.68x_1 + 2.145x_1^2 + 0.185x_2 + 0.089x_2^2 - 0.145x_1x_2, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \min f_4(X) \equiv -0.2451 - 0.7471x_1 + 0.3832x_1^2 + 0.0442x_2 + 0.0012x_2^2 - 0.0346x_1x_2\}, \quad (2.21) \\ \text{при ограничениях: } 2.01 \leq x_1 \leq 3.5, 12.01 \leq x_2 \leq 30.01, \end{aligned} \quad (2.22)$$

ВЗМП (2.18)-(2.22) представляет математическую модель технологического процесса для принятия оптимального решения в совокупности с условиями определенности и неопределенности.

2.2.5. Принятие оптимального решения в двухпараметрической четырехмерной модели технологического процесса при равнозначных критериях.

Решение векторной задачи математического программирования (2.18)-(2.22) базируется на методах, основанных на аксиоматике и принципе гарантированного результата



при равнозначных критериях, рассмотренных в первом разделе. Используя выше представленное программное обеспечение, результаты решения векторной задачи (2.18)-(2.22) с равнозначными критериями представим как ряд шагов.

Шаг 1. Решается векторная задача математического программирования (2.18)-(2.22) по каждому критерию отдельно. При решении используется функция $fmincon(...)$ системы MATLAB. Обращение к функции $fmincon(...)$ представлено в [15, 18, 19]. Результат расчета по отдельному критерию представляет точку оптимума:

X_k^* и $f_k^* = f_k(X_k^*)$, $k = \overline{1, K}$, $K=4$ – величины критериев в этой точке, т. е. наилучшее решение по каждому критерию:

$$\begin{aligned} X_1^* &= \{x_1 = 2.01, x_2 = 30.01\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -5.8834; \\ X_2^* &= \{x_1 = 3.51, x_2 = 30.01\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -78.9642; \\ X_3^* &= \{x_1 = 3.51, x_2 = 12.01\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -0.5424; \\ X_4^* &= \{x_1 = 2.91, x_2 = 12.01\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = -0.3335. \end{aligned} \quad (2.23)$$

На рисунке 3 представим ограничения (2.22), получившиеся точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ (2.23) в двухмерной системе координат $\{x_1, x_2\}$. Исследуемое множество допустимых точек S не пусто, представляет собой компакт:

$$S = \{X \in \mathbf{R}^N \mid 2.0 \leq x_1 \leq 3.5, 12.0 \leq x_2 \leq 30.0\} \neq \emptyset.$$

Пространство множества точек, лежащих между точками оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ представляет с одной стороны допустимое множество точек S , а с другой стороны множество точек, оптимальных по Парето, S^0 . Таким образом для данной задачи множество допустимых и множество точек, оптимальных по Парето, S^0 , равны между собой: $S = S^0$.

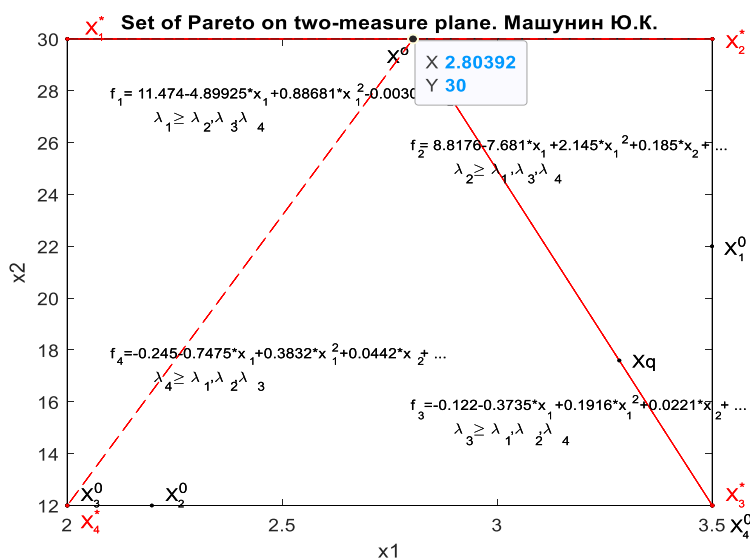


Рисунок 3. Множество Парето, $S^0 \subset S$, точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ и оптимальная точка X^0 в двухмерной системе координат $\{x_1, x_2\}$

Шаг 2. Решается векторная задача математического программирования (53)-(57) для вычисления наихудшей величины каждого критерия: Y_k^0 и $h_k^0 = h_k(Y_k^0)$, $k = \overline{1, K}$, $K=4$, которые представляют антиоптимум решения первого шага. (Верхний индекс ноль). При этом



решается ВЗМП (78)-(83) для каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум, и для критериев $k = \overline{1, K_2}$ на максимум. Как результат решения получим: точку оптимума $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ по соответствующему критерию $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величину k -го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1, K}$:

$$\begin{aligned} X_1^0 &= \{x_1 = 3.50, x_2 = 2.0051\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 2.8664; \\ X_2^0 &= \{x_1 = 2.1953, x_2 = 12.01\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 13.561 \\ X_3^0 &= \{x_1 = 2.01, x_2 = 12.01\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = -0.16671; \\ X_4^0 &= \{x_1 = 3.51, x_2 = 12.01\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = -1.0848. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Шаг 3. Системный анализ (т.е. анализ по каждому критерию) множества точек, оптимальных по Парето.

Определяются в точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ величины целевых функций $F(X^*) = \|f_q(X_k^*)\|_{q=\overline{1, K}}^{k=\overline{1, K}}$, вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве S $d_k = f_k^* - f_k^0, k = \overline{1, 4}$: $D = (d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4)^T$; матрица относительных оценок:

$$\lambda(Y^*) = \|\lambda_q(Y_k^*)\|_{q=\overline{1, K}}^{k=\overline{1, K}}, \text{ где } \lambda_k(X) = (h_k - h_k^0)/d_k. \ d_k = \{3.017, 65.4, 0.709, 1.418\}.$$

$$F(X^*) = \begin{vmatrix} 5.883 - 79.327 - 0.06191 & 0.12381 \\ -3.1730 - 78.964 & 0.3039 & 0.6076 \\ -3.3469 - 17.206 - 0.5423 & 1.0848 \\ -4.4506 - 13.643 & 0.1668 - 0.3335 \end{vmatrix}, \lambda(X^*) = \begin{vmatrix} \mathbf{1.0} & 1.0056 & 0.3234 & 0.6777 \\ 0.1018 & \mathbf{1.0} & 0.6637 & 0.3365 \\ 0.1594 & 0.0556 & \mathbf{1.0} & 0.00 \\ 0.5252 & 0.0014 & 0.00 & \mathbf{1.0} \end{vmatrix}. \quad (2.25)$$

Системный анализ величин по каждому критерию $F(X^*)$ (2.25), а также анализ критериев в относительных оценках $\lambda(X^*)$ показал, что в оптимальных точках $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$, расположенных по диагонали, относительная оценка $\lambda(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$ равна единице. Остальные критерии значительно меньше единицы. А в задаче требуется найти такую точку (параметры технологического процесса), при которых относительные оценки критериев наиболее близки к единице. На решение этой задачи направлено построение и решение λ -задачи, представленной на шаге 4, 5.

Шаг 4. Построение λ -задачи осуществляется в два этапа: на первом этапе строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X), G(X) \leq 0, X \geq 0. \quad (2.26)$$

Максиминная задача (86) на втором этапе преобразуется в стандартную (однокритериальную) задачу математического программирования (λ -задача):

$$\lambda^0 = \max \lambda, \quad (2.27)$$

$$\lambda - (11.474 - 4.899x_1 + 0.8868x_1^2 - 0.003x_2 + 0.0048x_2^2 - 0.0595x_1x_2 - f_1^0)/d_1 \leq 0, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \lambda - (-0.1225 - 0.373x_1 + 0.1916x_1^2 + 0.022x_2 \\ + 0.0006x_2^2 - 0.0173x_1x_2 - f_2^0)/d_2 \leq 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\lambda - (8.8176 - 7.68x_1 + 2.1456x_1^2 + 0.1851x_2 + 0.0894x_2^2 - 0.1454x_1x_2 - f_3^0)/d_3 \leq 0, \quad (2.30)$$

$$\lambda - (-0.245 - 0.747x_1 + 0.3832x_1^2 + 0.044x_2 + 0.0012x_2^2 - 0.0346x_1x_2 - f_4^0)/d_4 \leq 0, \quad (2.31)$$

$$\text{ограничения } 2.01 \leq x_1 \leq 3.5, 12.01 \leq x_2 \leq 30.01, \quad (2.32)$$

где вектор неизвестных имеет размерность $N+1$: $X = \{x_1, \dots, x_2, \lambda\}$, $N=2$.

Шаг 5. Решение λ -задачи (2.27)-(2.32).



При решении λ -задачи (2.27)-(2.32) используется функция $fmincon(\dots)$.

В системе MATLAB обращение к функции $fmincon(\dots)$, [17, 18]:

$[Xo,Lo]=fmincon('Z_TS_2Krit_L',X0,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'Z_TS_LConst',options)$.

Результат решения векторной задачи оптимизации (2.18)-(2.22) при равнозначных критериях, с соответствующей λ -задачей (2.27)-(2.32) получили:

точка оптимума X^o при равнозначных критериях

$$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 2.804, x_2 = 30.0, \lambda^o = 0.35410\}\}, \quad (2.33)$$

которая представляет конструктивные параметры технологического процесса при равнозначных критериях. Оптимальная точка X^o представлена на рисунке 3;

величины критериев $f_k(X^o)$, $k = \overline{1, K}$ в точке оптимума X^o :

$$f_1(X^o) = 3.935, f_2(X^o) = 77.931, f_3(X^o) = 0.0841, f_4(X^o) = 0.1681; \quad (2.34)$$

которые представляют характеристики технологического процесса;

величины относительных оценок $\lambda_k(X^o)$, $k = \overline{1, K}$ в точке оптимума X^o :

$$\lambda_1(X^o)=0.3542, \lambda_2(X^o)=0.9842, \lambda_3(X^o)=0.3542, \lambda_4(X^o)=0.6459); \quad (2.35)$$

максимальный нижний уровень $\lambda^o = 0.3542$ в точке оптимума X^o :

который измерен в относительных единицах, среди всех относительных оценок: $\lambda^o = \min\{\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o)\} = 0.3542$;

$\lambda^o = 0.3542$ также называют гарантированным результатом, измеренный в относительных единицах. Гарантированный результат говорит о следующем: величину относительной оценки $\lambda_k(X^o)$ и соответственно величину характеристики технологического процесса $f_k(X^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

В точке оптимума X^o (2.35), в соответствии с теоремой 1, критерии 1 и 3 противоречивы. Это противоречие определяется тем, что выполняются равенства $k = 1, 3$:

$\lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda^o = 0.3542$, неравенством $k = 2, 4$ $\{\lambda_2(X^o) = 0.9842, \lambda_4(X^o) = 0.6459\} > \lambda^o$.

2.2.6. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – модели технологического процесса в относительных единицах в трехмерной системе координат

На рисунке 3 представлено допустимое множество точек S , которое образовано ограничениями (2.22). На этом рисунке точки оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$, объединенные в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $S^o \subset S$. Координаты точек $\{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$, а также характеристики технологического процесса в относительных единицах $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, представлены на **рис. 4** в трехмерном пространстве x_1, x_2 и λ , где третья ось λ - относительная оценка.

2.3. Часть 2. Выбор оптимальных параметров технологического процесса в условиях неопределенности с приоритетом критерия, числовые значения которого задает конструктор системы.

Лицом, принимающим решения (ЛПР), как правило, является конструктор технологического процесса (процесс интеллектуального принятия решения).

2.3.1. Решение ВЗМП, представляющей математическую модель технологического процесса, с приоритетом критерия (обратная задача).

Шаг 1. Решение векторной задачи (2.18)-(2.22) при равнозначных критериях. Результаты решения векторной задачи при равнозначных критериях представлены на шаге 1,



алгоритм решения задачи представлен на разделе 3. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше.

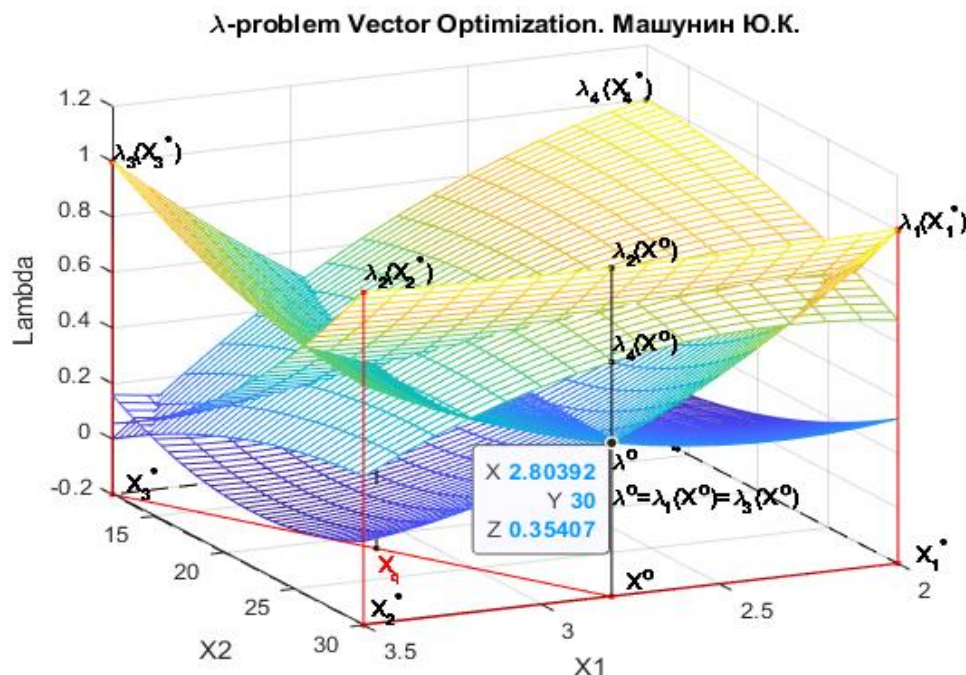


Рисунок 4. Результаты решения λ -задачи $\lambda_1(Y), \lambda_2(Y), \lambda_3(Y), \lambda_4(Y)$ в трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ

Множество точек $S^o \subset S$, оптимальных по Парето, находится между отдельными оптимальными точками $\{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$. Полученная информация $\{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ вместе с точкой оптимума X^o при равнозначных критериях является основой для исследования и принятия решений по структуре множества Парето.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями X^o не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется по приоритету одного из критериев из подмножества точек $S_1^o, S_2^o, S_3^o, S_4^o$, показанных на **рис. 4**.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$ лицом, принимающим решения.

В соответствии с теоремой 1 известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in K$ и $v \in K$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_v(X^o), q \in K, v \in K, X \in S,$$

а для остальных критериев $k \in K$ выполняется неравенства:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in K, q \neq v \neq k.$$

Для подготовки информации для принятия решения на экран выдаются показатели (характеристики) технологического процесса (93), которые получены при решении ВЗМП с равнозначными критериями в точке X^o :

$$F(X^o) = \{f_1(X^o) = 3.9345, f_2(X^o) = 77.9319, f_3(X^o) = 0.0844, f_4(X^o) = 0.1687\};$$



относительные оценки в X^0 :

$$\lambda(X^0) = \{\lambda_1(X^0) = 0.3541, \lambda_2(X^0) = 0.9842, \lambda_3(X^0) = 0.3541, \lambda_4(X^0) = 0.6459\}.$$

Из полученных вычислений $\lambda(X^0)$ видно, что наиболее противоречивыми критериями являются первый и третий:

$$\lambda^0 = \{\lambda_1(X^0), \lambda_3(X^0)\} = 0.3541, \quad (2.36)$$

Выберем из **рис. 4** первый и третий и представим $\{\lambda_1(X^0), \lambda_3(X^0)\}$ в относительных единицах на **рис. 5**.

Как правило, из этой пары: $\lambda^0 = \lambda_1(X^0) = \lambda_3(X^0)$ противоречивых критериев выбирается критерий, который лицо, принимающее решение, хотел бы улучшить. Критерий, который выбрал ЛПР, называется «приоритетным критерием»: $q = 3 \in K$.

Этот критерий исследуется в противоречии с первым критерием $k = 1 \in K$.

Выдается сообщение на дисплей:

q=input('Введите приоритетный критерий (номер) q= ') – Ввели: q=3.

Шаг 3. Вычисляются числовые пределы изменения приоритетного критерия $q=3 \in K$ в физических и относительных единицах.

Для этого определяются численные значения критерия $q=3 \in K$ в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^0 в точку оптимума X_q^* , полученную на первом шаге.

Пределы изменения критерия $q=3$ в натуральных единицах выдаются на экран:

$$f_q(X^0) = -0.084354 \leq f_q(X) \leq -0.54235 = f_q(X_q^*), q = 3 \in K. \quad (2.37)$$

Пределы изменения критерия $q = 3 \in K$ в относительных единицах выдаются на экран:

$$\lambda_q(X^0) = 0.35407 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in K. \quad (2.38)$$

Выражения (97) и (98) $f_q(X)$ и $\lambda_q(X)$ выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. Лицом принимающем решения, осуществляется выбор величины приоритетного критерия $q \in K$. (Decision-making).

На экран выдается сообщение: «Введите величину приоритетного критерия $f_q=$ » - ЛПР вводит, например, $f_q=0.3$.

Шаг 5. Расчет относительной оценки для критерия $f_q = 0.3$. Для заданной величины приоритетного критерия $f_q=0.3$ рассчитывается относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{0.30 - (-0.16670)}{0.5435 - (-0.16670)} = 0.65821. \quad (2.39)$$

Рассчитанная оценка λ_q при переходе от точки оптимума X^0 к X_q^* лежит в пределах:

$$\lambda_q(X^0) = 0.35408 \leq \lambda_q(X) = 0.65821 \leq 1.0 = \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in K.$$

Шаг 6. Расчет коэффициента линейной аппроксимации ρ .

Используя стандартные приемы линейной аппроксимации и, предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (2.37), а также соответственно относительной оценки λ_q , рассчитаем коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^0)$, λ_q , названный как ρ :

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^0)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^0)} = \frac{0.6582 - 0.35407}{1 - 0.35407} = 0.4708.$$



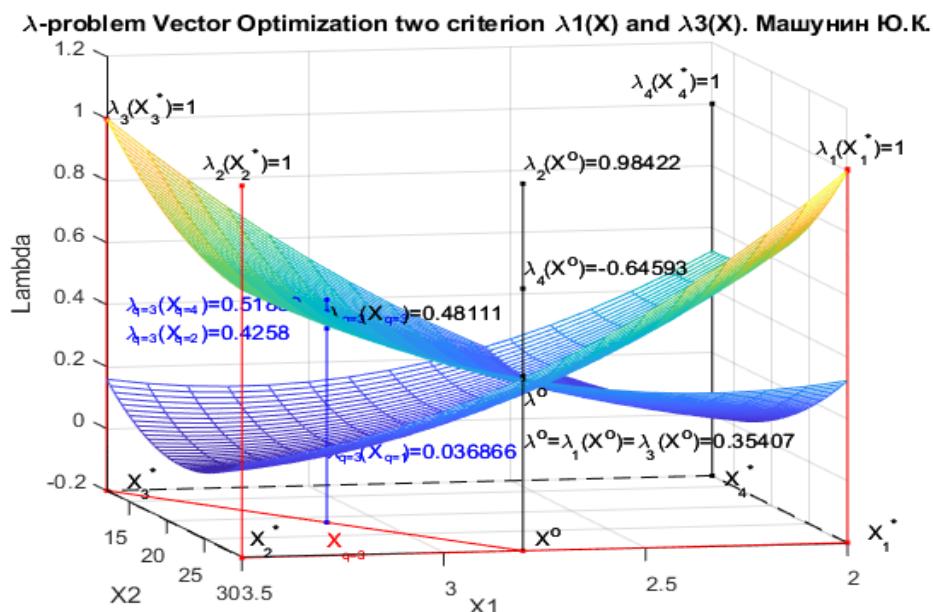


Рисунок 5. Решение λ -задачи (87)-(92): функции $\lambda_1(X)$ и $\lambda_3(X)$ в трехмерной системе координат x_1 x_3 и λ . В точке X^0 $\lambda_1(X^0) = \lambda_2(X^0) = \lambda_3(X^0) = 0.3542$

Шаг 7. Определим координаты приоритета критериев с размерностью $f_q=0.3$, используя коэффициент пропорциональности ρ .

Мы предполагаем, что изменения вектора $X^q = \{x_1 \ x_2\}$, $q = 3$ при переходе от точки оптимума X^0 к X_q^* имеет линейный характер. Определим координаты для точки с размерностью $f_q=0.3$ с относительной оценкой λ_q : $X_q = \{x_1^q = x_1^0 +$

$$\rho(x_q^*(1) - x_1^0), \dots, x_N^q\} \\ = x_N^0 + (x_q^*(N) - x_N^0)\}, \quad (2.40)$$

где $X^0 = \{x_1^0, \dots, x_N^0\}$, $X_q^* = \{x_q^*(1), \dots, x_q^*(N)\}$.

$$X^0 = \{x_1^0 = 2.8039, x_2^0 = 30.01\}, X_q^* = \{x_q^*(1) = 3.5, x_q^*(2) = 12.01\}.$$

В результате решения уравнений (2.40) получили точку с координатами:

$$X_q = \{x_1 = 3.13171, x_2 = 21.5249\}.$$

Шаг 8. Вычисление главных показателей точки X_q

$$F^q = \{f_k(X_q), k = \overline{1, K}\}; \lambda^q = \{\lambda_k(X_q) = \frac{f_k(X_q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}\}; P^q = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(X_q)}{\lambda_k(X_q)}, k = \overline{1, K}\}.$$

Результат решения векторной задачи оптимизации (2.18)-(2.22) при заданной величине третьего приоритетного критерия $f_q = 0.3$ получили:

точка оптимума X_q при заданном $f_q = 0.3$: $X_q = \{x_1 = 3.13171, x_2 = 21.5249\}$,

которая представляет конструктивные параметры технологического процесса при заданной величине третьего приоритетного критерия $f_q = 0.3$;

величины критериев $f_k(X_q)$, $k = \overline{1, K}$ в точке оптимума X_q :

$$F^q = \{f_1(X_q) = 2.978, f_2(X_q) = 41.410, f_3(X_q) = 0.1744, f_4(X_q) = 0.3489\};$$

которые представляют характеристики технологического процесса;

величины относительных оценок $\lambda_k(X_q)$, $k = \overline{1, K}$ в точке оптимума X_q :



$$\lambda_k(X_q) = \{\lambda_1(X_q) = 0.03691, \lambda_2(X_q) = 0.426, \lambda_3(X_q) = 0.481, \lambda_4(X_q) = 0.52\};$$

максимальный нижний уровень $\lambda^0 = 0.3542$ в точке оптимума X^0 :

который измерен в относительных единицах, среди всех относительных оценок:
 $\lambda^0 = \min\{\lambda_1(X^0), \lambda_2(X^0), \lambda_3(X^0), \lambda_4(X^0)\} = 0.3542$;

вектор приоритетов $P^q = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(X_q)}{\lambda_k(X_q)}, k = \overline{1, K}\}$:

$$P^q = \{p_1^3 = 6.27891, p_2^3 = 17.941, p_3^3 = 1.0, p_4^3 = 0.911\}.$$

По аналогии можно вычислить любую оптимальную точку X_t^0 из множества Парето: $X_t^0 \in S^0$.

При моделировании могут быть выполнены некоторое множество расчетов. Могут быть изменены параметрические ограничения (2.32), функции. В итоге может быть получен некоторый набор оптимальных решений (это и есть математическое моделирование). Из этого множества решений выбираем окончательный вариант. В нашем примере в (1) вариант входит в полученный набор оптимальных решений: параметры технологического процесса $X^0 = \{x_1 = 2.804, x_2 = 30.0, \lambda^0 = 0.35410\}$ при равнозначных критериях; параметры технологического процесса при заданном приоритетном критерии $q=3$: $X_q = \{x_1 = 3.13171, x_2 = 21.5249\}$.

Геометрическую интерпретацию симметрии $\lambda_1(X^0) = \lambda_3(X^0)$ решения покажем на рис. 6.

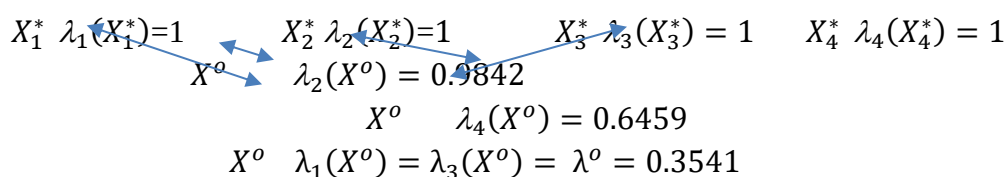


Рисунок 6. Геометрическую интерпретацию симметрии в моделировании технологического процесса с нормализованными критериями: $\lambda_1(X), \dots, \lambda_4(X)$

Анализ результатов. Рассчитанная на шаге 8 размерность критерия $f_q(X_t^0), q \in K$, обычно не равна заданной величине $f_q = 0.3$. Ошибка выбора:

$\Delta f_q = |f_q(X_t^0) - f_q| = |0.1744 - 0.3| = 0.125$, характеризуется ошибкой линейной аппроксимации $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 40.2\%$.

2.3.2. Геометрическая интерпретация в физических единицах результатов решение векторной задачи в трехмерной системе координат.

Мы сформировали параметры технологического процесса x_1, x_2 , которые представили, во-первых, в двумерной x_1, x_2 на рис. 3, и, во-вторых, в трехмерной системе координат x_1, x_2 and λ на рис. 4, 5, 6. Далее представим эти параметры в физических единицах для каждой функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ последовательно на рис. 7, 8, 9 и 10.

$f_1(X)$ - **первая характеристика** технологического процесса в физических единицах показана фиг. 7. Точки оптимума: X_1^* - точка максимума; X^0 - равнозначные критерии;



$X_{q=3}$ – приоритет 3 критерия; X_1^0 – точка минимума – это параметры физических характеристик технологического процесса. Представим взаимосвязь в физических единицах характеристики технологического процесса:

$$f_1^* = f_1(X_1^*) = -5.8834 \leq f_1(X^0) = 3.9345 \leq f_1(X_{q=3}) = 2.9777 \leq f_1^0 = f_1(X_1^0) = 2.8664.$$

$f_2(X)$ – *вторая характеристика* технологического процесса в физически показана на фиг. 8. Точки оптимума: X_2^* – точка максимума; X^0 – равнозначные критерии; $X_{q=3}$ – приоритет 3 критерия; X_2^0 – точка минимума — это параметры физических характеристик технологического процесса.

Представим взаимосвязь в физических единицах характеристики технологического процесса:

$$f_2^* = f_2(X_2^*) = 78.931 \leq f_2(X^0) = 77.409 \leq f_2(X_{q=3}) = 41.409 \leq f_2^0 = f_2(X_2^0) = 13.561.$$

$f_3(X)$ *третья характеристика* технологического процесса в физических единицах показана на фиг. 9. Точки оптимума: X_3^* – точка максимума; X^0 – равнозначные критерии;

$X_{q=3}$ – приоритет 3 критерия; X_3^0 – точка минимума — это параметры физических характеристик технологического процесса.

Представим в физических единицах характеристики технологического процесса:

$$f_3^* = f_3(X_3^*) = 0.5424 \leq f_3(X^0) = 0.0841 \leq f_3(X_{q=3}) = 0.3174 \leq f_3^0 = f_3(X_3^0) = 0.1667.$$

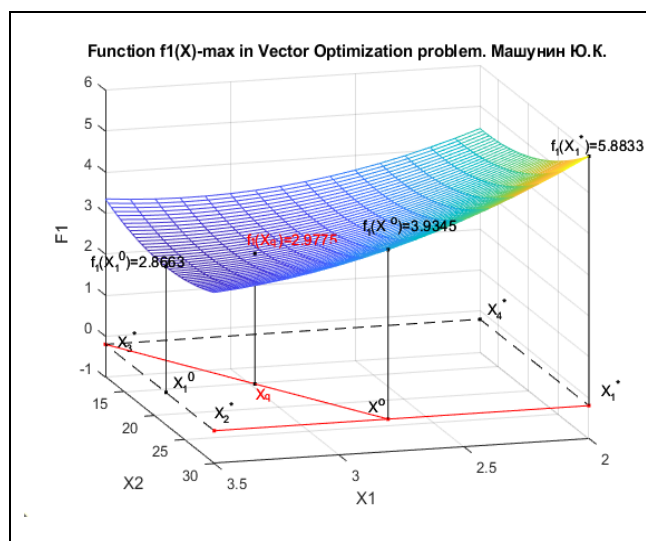


Рисунок 7. Первая характеристика $f_1(X)$ технологического процесса в физических единицах в трехмерной системе координат $\{x_1, x_2 \text{ and } f_1(X)\}$.

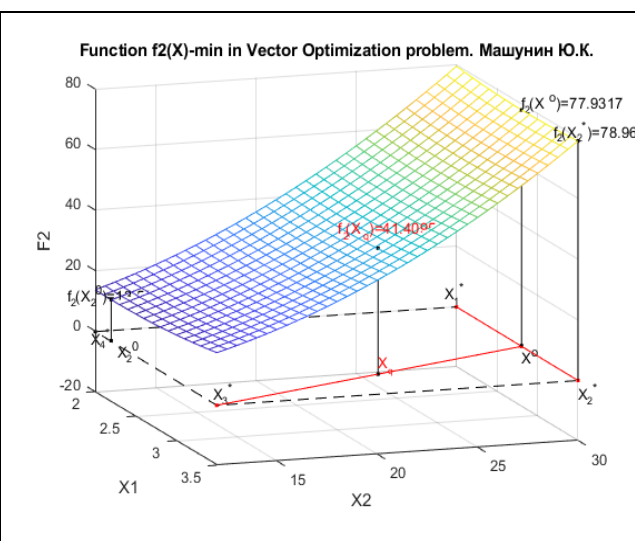
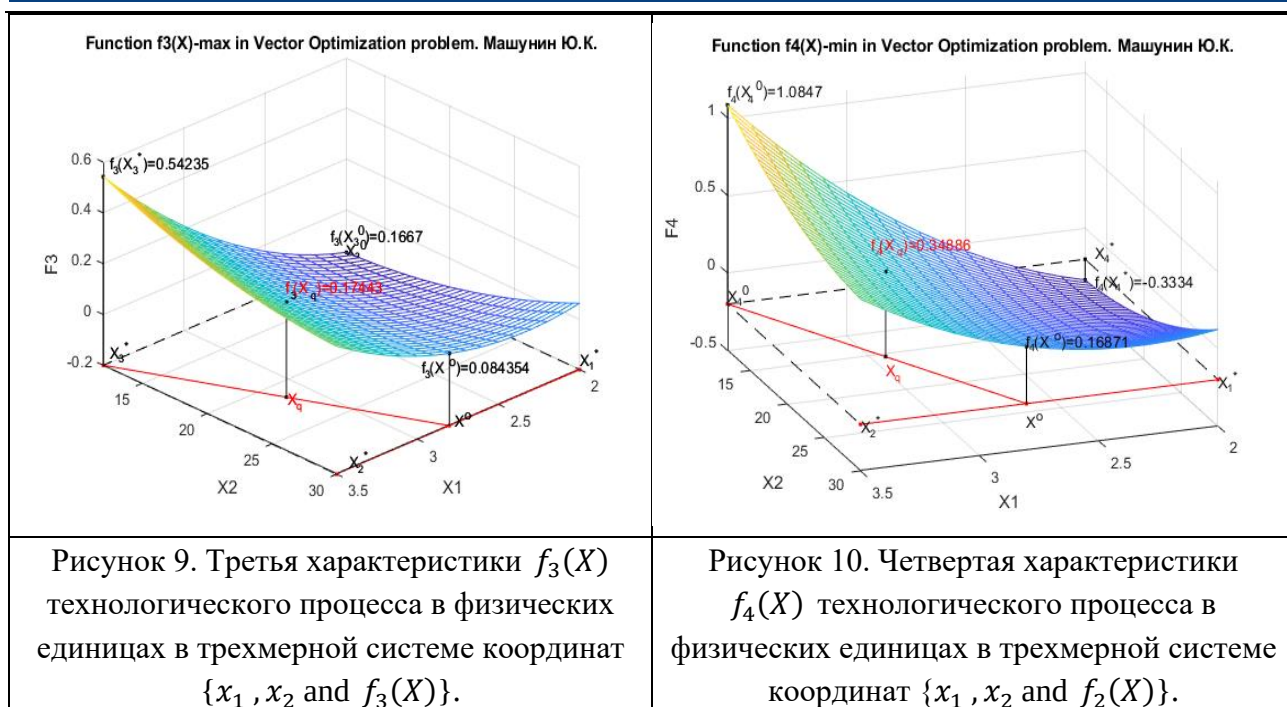


Рисунок 8. Вторая характеристики $f_2(X)$ технологического процесса в физических единицах в трехмерной системе координат $\{x_1, x_2 \text{ and } f_2(X)\}$





$f_4(X)$ *четвертая характеристики* технологического процесса в физических единицах показана на рис. 10. Точки оптимума: X_4^* - точка максимума; X^0 – равнозначные критерии;

$X_{q=3}$ – приоритет 3 критерия; X_4^0 - точка минимума – это параметры физических характеристик технологического процесса.

Представим в физических единицах характеристики технологического процесса:

$$f_4^* = f_4(X_4^*) = 0.3335 \leq f_4(X^0) = 0.1687 \leq f_4(X_{q=3}) = 0.3468 \leq f_4^0 = f_4(X_4^0) = 1.0848.$$

Аналогично рис. 7, ..., 10 *формируется расчет и геометрическая интерпретация* результатов решения ВЗМП с приоритетом второго, третьего и четвертого критерия.

3. Моделирование и выбор оптимальных параметров технической системы в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики и интеллекта конструктора.

3.1. Математическая модель многопараметрической и многофункциональной технической системы для принятия оптимального управленческого решения

3.1.1. Проблемы моделирования при проектировании новых технических систем

При проектировании новых технических систем возникает проблема построения в явном или не явном виде математической модели, оценки на ее основе результатов моделирования и принятия оптимального решения. аналогичные проблемы возникают и на уже созданных технических систем (ТС), которые при эксплуатации должны постоянно модернизироваться и заменяться на более совершенные модели. Проблеме моделирования ТС (в том числе с использованием векторной оптимизации) уделяется большое внимание, во-первых, в отечественной науке, начиная с ведущих научных школ АН СССР по настоящее время [4-23, 38-45], которые внесли большой вклад в применение методов



многокритериальной оптимизации, и, во-вторых, в зарубежной научной деятельности как теоретических [1, 2, 3, 24-33], так и прикладных аспектах [34-38].

При формировании математической модели ТС возможны ситуации, когда известна функциональная зависимость каждой характеристики и ограничений от параметров ТС, такую математическую модель принято называть моделью в условиях полной определенности. Эти математической модели относятся к классу: хорошо структурированные задачи. В тех случаях, когда нет достаточной информации о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров, определяются, как моделирование в условиях неопределенности. Эти математической модели относятся к классу: плохо структурированных задач, [12-18]. В плохо структурированных задачах устранение неопределенности может идти в двух направлениях: первое связано с использованием субъективных оценок и предпочтительности лица, принимающего решения, (ЛПР) при оценке вариантов возможных решений [22]; второе направление устранения неопределенности связано с качественными или количественными описаниями ТС и характеризуется использованием математических методов, регрессионного анализа для преобразования информации – исходных данных, которые могут быть получены, например, по принципу «вход-выход». В рамках второго направления проведено данное исследование. Оценка экспериментальных данных выполняется по некоторому множеству характеристики (критериев) и принятия решений, на их основе, [34]. Принятие решений на основе таких критериев затруднена, что связано с несоизмеримостью критериев. Анализ этих проблем представлен в работах [6, 10, 22]. В итоге решение принимается на интуитивной основе. Поэтому является важным разработка новых методов моделирования технических систем, оценки исходных данных и принятия решений на их основе.

3.1.2. Математическая модель технической системы в условиях определенности

Функционирование любой ТС зависит от некоторого множества N конструктивных параметров (переменных):

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}^T$ или $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, которые могут изменяться в некоторых пределах: $x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}$, где x_j^{min} – нижний, $x_j^{max}, \forall j \in N$ – верхний предел, в рамках которых изменяются параметры технической системы.

Результат функционирования ИС определяется некоторым множеством K технических характеристик (критериев), которые функционально зависят от проектируемых данных (параметров) $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, в целом они представляют вектор функцию:

$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_K(X)\}^T$ или $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}^T$, на которые наложены функциональные ограничения:

$$f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}. \text{ или } G(X) \leq B.$$

Множество критериев (характеристик) технической системы состоит из двух подмножеств K_1 и K_2 : $K = K_1 \cup K_2$ технических характеристик. В подмножестве технических характеристик K_1 их числовые значения желательно получить как можно выше, т.е. максимизировать:

$f_k(X) \rightarrow \max, k = \overline{1, K_1}$, а подмножество технических характеристик K_2 , числовые значения которых желательно получить как можно ниже, т.е. минимизировать:

$$f_k(X) \rightarrow \min, k = \overline{1, K_2}, K_2 \equiv K_1 + 1, K.$$



Математическая модель ИС, во-первых, должна включать характеристики системы $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}^T$ $K = K_1 \cup K_2$ и ограничения на параметры: $X^{min} \leq X \leq X^{max}$.

Математическую модель ТС, решающую в целом проблему выбора оптимальных параметров ТС (оптимального проектного решения), представим в виде Векторной Задачи Математического Программирования (ВЗМП):

$$Opt F(X) = \{max F_1(X) = \{max f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (3.1)$$

$$min F_2(X) = \{min f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (3.2)$$

$$\text{при ограничениях: } G(X) \leq 0, f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (3.3)$$

$$x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (3.4)$$

где X – вектор управляемых переменных (управляемых параметров);

$F(X) = \{f_k, k = \overline{1, K}\}$ – вектор критериев, в котором каждая компонента представляет характеристику технической системы (3.1)-(3.2), функционально зависящую от X ;

В (3.3) $G(X) = g_1(X), g_2(X), \dots, g_M(X)\}^T$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование ТС. Они определяются протекающими в ней технологическими, физическими и тому подобными процессами и могут быть представлены функциональными ограничениями, например, $f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}$.

Предполагается, что функции $f_k(X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i(X), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (3.3)-(3.4) множество допустимых точек не пусто: $S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$ и представляет собой компакт.

Критерии и ограничения (3.1)-(3.4) образуют математическую модель технической системы. Требуется найти такой вектор параметров $X^o \in S$, при котором каждая компонента вектор – функции $F(X): F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ принимает максимальное значение, а вектор функция $F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}$ принимает наименьшую величину.

Для решения такого класса векторных задач математического программирования используются методы, основанные на нормализации критериев и принципе гарантированного результата представленные в четвертой части. Они позволяют решать ВЗМП как при равнозначных критериях, так и при заданном приоритете критерия.

3.1.3. Проблемы построения модели технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности

При построении математической модели ТС (1а)-(4а) возможны два варианта.

Первый вариант, когда известна функциональная зависимость каждого критерия (3.1)-(3.2), ограничений (3.3)-(3.4) от параметров X , накладываемых на функционирование, её принято называть моделью в условиях определенности, которая представлена в (3.1)-(3.4).

Второй вариант, когда нет достаточной информации о функциональной зависимости каждого критерия (3.1)-(3.2) и ограничений (3.3)-(3.4) от параметров X . Известны лишь

дискретные (как правило, экспериментальные) данные: $X_i = \begin{bmatrix} x_{i1}, \dots, x_{iN} \\ \dots \\ x_{i1}, \dots, x_{iN} \end{bmatrix}, i = \overline{1, M}$, где N

множество параметров, M множество данных, или $X_i = \{x_{ij}, j = \overline{1, N}, i = \overline{1, M}\}$.

Представлено также соответствующее дискретное множество характеристик:



$$I_i(X) = \{(y_k(X_i, i = \overline{1, M}))^T, = \begin{vmatrix} y_{i1}(X_i), \dots, y_{iK}(X_i) \\ \dots \\ y_{i1}(X_i), \dots, y_{iK}(X_i) \end{vmatrix}.$$

Такое состояние представляет моделирование технической системы в условиях неопределенности. Для получения данных $I_i(X) = \{(y_k(X_i, i = \overline{1, M}))^T$ проводятся экспериментальные исследования технической системы по принципу «вход-выход», при этом формируется задача принятия решений в условиях неопределенности и возникает проблема выбора оптимальной оценки на основе полученных данных.

3.1.4. Построения математической модели технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности

В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель технической системы так же должна отражать эти условия. Используя обозначения математической модели, преобразуем модель (3.1)-(3.4) с учетом условий неопределенности, в итоге получим:

«Модель технической системы в условиях определенности и неопределенности»:

$$Opt F(X) = \{max F_1(X) = \{max f_k(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (3.5)$$

$$max I_1(X) \equiv \{max y_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}, \quad (3.6)$$

$$min F_2(X) = \{min f_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}\}, \quad (3.7)$$

$$min I_2(X) \equiv \{min y_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (3.8)$$

$$\text{ограничения } f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (3.9)$$

$$x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (3.10)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – это вектор управляемых переменных (параметров) технической системы;

$F(X) = \{F_1(X) F_2(X) I_1(X) I_2(X)\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором критериев (характеристик) ТС (3.5)-(3.8), которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных X , где в (3.5) и (3.7)

K_1^{def} , K_2^{def} (definiteness), а в (3.6) и (3.8) K_1^{unc} , K_2^{unc} (uncertainty) множество критериев max и min сформированные в условиях определенности и неопределенности.

3.1.5. Пример. Моделирование и оптимизация параметров магнитоэлектрических линейных индукторных электродвигателей (ЛД) на постоянном токе

К содержательному классу технических систем, которые могут быть представлены векторной задачей (3.5)-(3.10), можно отнести достаточно большое их количество задач из различных отраслей экономики государства: электротехнической, авиационно-космической, металлургической (выбор оптимальной структуры материала), химической и т.п.

В качестве примера представим работу Левицкого В. Л. «Моделирование и оптимизация параметров магнитоэлектрических линейных индукторных электродвигателей (ЛД) постоянного тока» [7, с.50-120]. Проектировалась конструкция – форсируемый ЛД (ФЛД), модель которого была сведена к векторной задаче математического программирования (3.1)-(3.4). При этом вектор конструктивных параметров $X = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}$ состоял из: x_1 –



воздушного зазора δ , x_2 – зубцового шага, x_3 – числа зубцов, x_4 – высоты концентратора, x_5 – коэффициента полюсного перекрытия. Вектор конструктивных критериев $F(X) = f(X)$, $p(X)$, $\vartheta(X)$, ... включал: $f(X)$ – номинальное тяговое усилие, $p(X)$ – номинальную мощность, $\vartheta(X)$ – номинальный КПД и т.п., всего десять показателей. Для построения зависимостей $F(X)$ от названных конструктивных параметров X был использован центральный ортогональный план второго порядка [7 с.96]. Из другой отрасли представим работу: «... многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения», [23].

Таким образом, экспериментальные данные, как из задачи ФЛД, так и подобных ТС из других отраслей, могут быть представлены в виде теоретической (системной) задачи (3.1)-(3.4). В данной работе техническая система рассматриваются в статике. Но технические системы могут рассматриваться в динамике, используя дифференциально-разностные методы преобразования, проводя исследование за небольшой дискретный промежуток времени $\Delta t \in T$.

3.2. Часть 1. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности с равнозначными критериями.

Первый этап – техническое задание, а также этап анализа результатов решения, выбора приоритетного критерия и его величины выполняется конструктором технической системы сложной структуры. Остальные этапы выполняются математиком - программистом.

3.2.1. Техническое задание для построения математической и численной модели технической системы сложной структуры

Дано. Функционирование технической системы (ТС) определяется четырьмя параметрами $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, которые представляют вектор управляемых переменных. Параметры ТС заданы в следующих пределах:

$$21 \leq x_1 \leq 79; 5 \leq x_2 \leq 59; 2.10 \leq x_3 \leq 9; 2.2 \leq x_4 \leq 7. \quad (3.11)$$

Функционирование ТС определяются четырьмя характеристиками (критериями)

$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}$, величина оценки которых зависит от вектора параметров $X = \{x_j, j = \overline{1, N}, N = 4\}$.

Условия определенности. Они характеризуются тем, что для первой характеристики $h_1(Y)$ известна функциональная зависимость от параметров $X = \{x_j, j = \overline{1, N}, N = 4\}$.

$$\begin{aligned} f_1(X) = & 323.84 - 2.2490x_1 - 3.49x_2 + 10.7267x_3 + 13.124x_4 + 0.0968x_1x_2 - 0.062x_1x_3 \\ & - 0.169x_1x_4 + 0.0743x_2x_3 - 0.1042x_2x_4 - 0.0036x_3x_4 \\ & + 0.0143x_1^2 + 0.0118x_2^2 - 0.2434x_3^2 - 0.5026x_4^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

Условия неопределенности. Они характеризуются тем, что для второй, третьей и четвертой характеристики: $f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ известны результаты экспериментальных данных: величины параметров и соответствующих характеристик. Числовые значения параметров X и характеристик $f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ представлены в таблице 3.

Таблица 3

Числовые значения параметров и характеристик технической системы

x_1	x_2	x_3	x_4	$f_2(X)$		$f_3(X)$	$f_4(X)$	
20	0	2	2	1149.6	1164.0	115.1	24.24	27.60
20	0	2	5	1176.0	1212.0	114.5	28.80	30.00



РАЗДЕЛ: Математические и естественные науки
Направление: Физико-математические науки

20	0	2	8	1260.0	1257.6	114.4	31.20	32.40
20	0	5	2	1256.4	1252.8	118.8	33.60	34.80
20	0	5	5	1251.6	2143.2	113.8	34.80	19.92
20	0	5	8	2154.0	2163.6	113.3	21.60	25.20
20	0	8	2	2176.8	2185.2	110.7	29.76	33.48
20	0	8	5	2198.4	2211.6	109.2	37.20	39.48
20	0	8	8	2232.0	2245.2	108.5	42.00	49.20
20	30	2	2	2954.4	2820.0	128.3	15.60	18.00
20	30	2	5	2772.0	2748.0	127.4	21.60	24.24
20	30	2	8	2832.0	2904.0	126.8	28.80	32.40
20	30	5	2	3022.8	3036.0	126.1	35.16	39.60
20	30	5	5	3056.4	3583.2	124.3	44.88	11.28
20	30	5	8	3601.2	3608.4	124.1	14.40	16.80
20	30	8	2	3616.8	3622.8	123.9	21.12	22.80
20	30	8	5	3637.2	3651.6	121.4	27.60	30.84
20	30	8	8	3672.0	3685.2	121.7	36.00	40.56
20	60	2	2	1195.2	1212.0	150.4	52.80	60.00
20	60	2	5	1236.0	1251.6	144.9	64.80	68.64
20	60	2	8	1272.0	1296.0	140.8	75.60	82.80
20	60	5	2	1318.8	1344.0	138.6	88.08	97.20
20	60	5	5	1388.4	2176.8	140.8	107.64	40.56
20	60	5	8	2196.0	2220.0	143.5	45.60	52.80
20	60	8	2	2245.2	2286.0	146.0	60.00	67.20
20	60	8	5	2294.4	2313.6	144.9	73.20	79.44
20	60	8	8	2340.0	2382.0	143.8	85.20	99.00
50	0	2	2	2988.0	3012.0	181.3	31.92	36.00
50	0	2	5	3036.0	3056.4	180.8	43.20	51.36
50	0	2	8	3108.0	3156.0	179.4	61.20	72.00
50	0	5	2	3244.8	3228.0	179.1	82.80	86.40
50	0	5	5	3193.2	3616.8	178.0	90.36	23.28
50	0	5	8	3639.6	3660.0	177.6	30.00	36.00
50	0	8	2	3685.2	3708.0	176.9	42.72	48.00
50	0	8	5	3732.0	3753.6	175.3	54.00	62.16
50	0	8	8	3672.0	3822.0	174.7	73.20	81.72
50	30	2	2	1218.0	1248.0	123.6	87.00	94.80
50	30	2	5	1272.0	1318.8	118.7	103.20	116.16
50	30	2	8	1344.0	1392.0	115.9	126.00	136.80
50	30	5	2	1422.0	1464.0	115.1	145.44	156.00
50	30	5	5	1524.0		113.2	174.72	
50	30	5	8			111.8		
50	30	8	2			110.7		



50	30	8	5		108.2	
50	30	8	8		106.3	
50	60	2	2		132.8	
50	60	2	5		131.1	
50	60	2	8		129.7	
50	60	5	2		128.3	
50	60	5	5		127.0	
50	60	5	8		125.6	
50	60	8	2		123.9	
50	60	8	5		114.5	
50	60	8	8		119.5	
80	0	2	2		154.8	
80	0	2	5		153.2	
80	0	2	8		151.8	
80	0	5	2		150.4	
80	0	5	5		150.7	
80	0	5	8		151.2	
80	0	8	2		151.5	
80	0	8	5		144.9	
80	0	8	8		140.8	
80	30	2	2		185.7	
80	30	2	5		183.5	
80	30	2	8		182.2	
80	30	5	2		181.3	
80	30	5	5		179.4	
80	30	5	8		178.0	
80	30	8	2		176.9	
80	30	8	5		175.3	
80	30	8	8		172.5	
80	60	2	2		128.3	
80	60	2	5		125.6	
80	60	2	8		124.2	
80	60	5	2		121.7	
80	60	5	5		118.7	
80	60	5	8		115.9	
80	60	8	2		115.1	
80	60	8	5		110.4	
80	60	8	8		108.5	
min $f_i(X)$, $i=1, \dots, 81$				1149.6	92.4	11.3
max $f_i(X)$, $i=1, \dots, 81$				3822.0	161.5	174.7



На числовые значения параметров $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ наложены ограничения:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 102.$$

Величину оценки по первые и третьи характеристики $f_1(X), f_3(X)$ желательно, получить как можно выше: $f_1(X) \rightarrow \max, f_3(X) \rightarrow \max$; второй и четвертой $f_2(X), f_4(X)$ как можно ниже: $f_2(X) \rightarrow \min, f_4(X) \rightarrow \min$. Параметры технической системы:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ изменяются в следующих пределах:

$$x_1 \in [20.0 \ 50.0 \ 80.0], x_2 \in [0.0 \ 30.0 \ 60.0], x_3 \in [2.0 \ 5.0 \ 8.0], x_4 \in [2.2 \ 5.5 \ 8.8]. \quad (3.13)$$

Требуется. 1) Разработать математическую модель технической системы в виде векторной задачи математического программирования. 2) На основе разработанных методов решения ВЗНП построить программное обеспечение в системе MATLAB. Решить векторную задачу с равнозначными критериями: выбрать оптимальную структуру технической системы. 4) Выбрать приоритетный критерий. Решить задачу векторной оптимизации и принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия. 5) Представить геометрическую интерпретацию результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к N-мерному пространству в относительных единицах. 6) Показать геометрическую интерпретацию результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к N-мерному пространству в физических единицах.

Примечание. Автором разработано программное обеспечение в системе MATLAB для решения векторных задач математического программирования. Векторная задача включает четыре переменных (параметров технической системы): $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и четырьмя критериями (характеристиками)

$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}$. Но для каждой новых данных (новая система) программа настраивается индивидуально. В программном обеспечении критерии $F(X) = \{f_1(X), \dots, f_4(X)\}$ с условиями неопределенности (в таблице 1).

1а этап. Математическая модель технической системы в условиях определенности

Построение математической модели для принятия оптимального управленческого решения технической системы показано в разделе 1. В соответствии с (3.5)-(3.10) представим математическую модель технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$Opt F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\} \quad (3.14)$$

$$\max I_1(X) \equiv \{\max f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}} \quad (3.15)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}, \quad (3.16)$$

$$\min I_2(X) \equiv \{\min f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (3.17)$$

$$\text{при ограничениях} \quad f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K},$$

$$x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (3.18)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров технической системы);



$F(X) = \{F_1(X) F_2(X) I_1(X) I_2(X)\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором критериев (характеристик) технической системы, которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных;

$F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}$, $F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}\}$ – это множество функций

$\max$ и $\min$ соответственно;

$I_1(Y) = \{\{f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}$,

$I_2(Y) = \{\{f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}$ – это множество матриц $\max$ и $\min$ соответственно; (*definiteness*), K_1^{unc} , K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев $\max$ и $\min$

сформированные в условиях определенности и неопределенности; в (3.18) $x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}$ представлена вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование технической системы; $x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}$ – параметрические ограничения.

Примем, что функции $f_k(X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i(X), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (3.18) множество допустимых точек S не пусто:

$S = \{X \in R^n | G(Y) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$, и представляет собой компакт.

3.2.2.2 этап. Построение численной модели технической системы в условиях определенности

Условия определенности характеризуются функциональной зависимостью каждой характеристики и ограничений от параметров технической системы. В примере известны характеристика (3.14) и ограничения (3.18). Используя информационные данные (3.11), (3.12) построим однокритериальную задачу нелинейного программирования в условиях определенности:

$$\begin{aligned} \max f_1(X) = & 323.8408 - 2.2495x_1 - 3.4938x_2 + 10.7267x_3 + 13.1235x_4 + 0.0968x_1x_2 \\ & - 0.0620x_1x_3 - 0.1696x_1x_4 + 0.0743x_2x_3 - 0.1042x_2x_4 \\ & - 0.0036x_3x_4 + 0.0143x_1^2 + 0.0118x_2^2 - 0.2434x_3^2 - 0.5026x_4^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

при ограничениях: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 102$,

$$21 \leq x_1 \leq 79; 5 \leq x_2 \leq 59; 2.10 \leq x_3 \leq 9; 2.2 \leq x_4 \leq 7. \quad (3.20)$$

Эти данные в дальнейшем используются при построении математической модели технической системы.

3.2.3.3 этап. Преобразование экспериментальных данных (условия неопределенности) в данные с функциональной зависимостью (условия определенности).

Условия неопределенности характеризуются тем, что исходные данные, характеризующие исследуемого объекта, представлены: а) случайными, б) нечеткими, или, в) не полными данными, т. е. в условиях неопределенности известны лишь конечное множество X измеренных параметров $X = \{x_j, j = \overline{1, N}, N = 4\}$

$X_v = \{x_{iv}, v = \overline{1, V}, i = \overline{1, M}\}$, где $v = \overline{1, V}$ – число параметров, которые исследуются в модели технической системы, $i = \overline{1, M}$ – номер и множество данных;

Множество K характеристик технической системы:

$f_k(X_v = \{x_{iv}, v = \overline{1, V}, i = \overline{1, M}\}, k = \overline{1, K})$.



Поэтому в условиях неопределенности отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров. Информационные данные опций а) и б) преобразуются в числовые данные опции с) и представляются в табличной форме. В работе рассматривается опция с) информация с неполными данными, которые, как правило, *получены в результате эксперимента*.

С учетом измеренных параметров X_v и соответствующего множества K характеристик: $f_k(X_v = \{x_{iv}, v = \overline{1, V}, i = \overline{1, M}\}, k = \overline{1, K})$ представим матрицу результатов экспериментальных данных по исследуемой технической системе:

$$I = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 = x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14} & f_2(X_1), f_3(X_1), f_4(X_1) \\ \dots & \dots \\ X_M = x_{M1}, x_{M2}, x_{M3}, x_{M4} & f_2(X_M), f_3(X_M), f_4(X_M) \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

Представим математическую модель технической системы в условиях неопределенности в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt F(X) = \{\max I_1(Y) \equiv \{\max f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (3.22)$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (3.23)$$

$$\text{at restriction} \quad f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (3.24)$$

$$\sum_{v=1}^V x_v(t) = a, x_v^{min} \leq x_v \leq x_v^{max}, v = \overline{1, V}, \quad (3.25)$$

где $X = \{x_v, v = \overline{1, V}\}$ – вектор управляемых переменных (параметров);

$F(X) = \{I_1(X) I_2(X)\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (выходных характеристик исследуемого объекта). Величина характеристики (функции) зависит от дискретных значений вектора переменных X . $I_1(X) = \overline{1, K_1^{unc}}$, $I_2(X) = \overline{1, K_2^{unc}}$ (*uncertainty*) – множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях неопределенности;

в (3.24) $f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование исследуемого объекта, $x_v^{min} \leq x_v \leq x_v^{max}, v = \overline{1, V}$ – параметрические ограничения исследуемого объекта.

3.2.4. 4 этап. Построение агрегированной математической и численной модели структуры материала в условиях неопределенности.

Формирование в условиях неопределенности состоит в использовании качественных, количественных описаний технической системы, полученных по принципу “вход-выход” в таблице 2. Преобразование исходные данных (информации): $f_2(X_i, i = \overline{1, M})$, $f_3(X_i, i = \overline{1, M})$, $f_4(X_i, i = \overline{1, M})$ в функциональный вид: $f_2(X)$, $f_3(X)$, $f_4(X)$ осуществляется путем использования математических методов регрессионного анализа.

Исходные данные сформированы в таблице 2 в системе MATLAB в виде матрицы:

$$I = |X, F| = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, f_{i2}, f_{i3}, f_{i4}, i = \overline{1, M}\}. \quad (3.26)$$

Для каждого набора экспериментального данных таблицы 2 $f_k, k = 2, 3, 4$ строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\min \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x}_i)^2$ в системе MATLAB.

Формируется полином A_k , определяющий взаимосвязь параметров $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}\}$ и функции $\bar{f}_{ki} = f(X_i, A_k), k = 2, 3, 4$. Результатом является система коэффициентов:

$A_k = \{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{14k}\}$, определяющие коэффициенты квадратичного полинома:



$$f_k(X, A) = A_{0k} + A_{1k}x_1 + A_{2k}x_2 + A_{3k}x_3 + A_{4k}x_4 + A_{5k}x_1x_2 + A_{6k}x_1x_3 + A_{7k}x_1x_4 + A_{8k}x_2x_3 + A_{9k}x_2x_4 + A_{10k}x_3x_4 + A_{11k}x_1^2 + A_{12k}x_2^2 + A_{13k}x_3^2 + A_{14k}x_4^2, k = 2, 3, 4.$$

Программное обеспечение полиномиальной аппроксимации с четырьмя переменными и четырнадцатью факторами разработано. В итоге экспериментальные данные таблицы 2 преобразуются систему коэффициентов трех функции $f_k(X, A)$ в виде таблицы (Программа: Z_Material_MMTT32_os13_4k):

$$\begin{aligned} A_o &= [323.8408 \quad 954.8634 \quad 110.2296 \quad 21.0038] \\ &\quad -2.2495 \quad 28.6718 \quad 0.7918 \quad -0.0097 \\ &\quad -3.4938 \quad 37.0392 \quad 1.7392 \quad -0.8406 \\ &\quad 10.7267 \quad -31.0303 \quad -0.3713 \quad -0.4326 \\ &\quad 13.1239 \quad -54.0031 \quad -2.2001 \quad 1.1723 \\ &\quad 0.0968 \quad -0.9220 \quad -0.0132 \quad 0.0166 \\ &\quad -0.0620 \quad -2.0044 \quad -0.0083 \quad 0.0850 \\ &\quad -0.1696 \quad 0.8966 \quad 0.0193 \quad -0.0001 \\ &\quad 0.0743 \quad -0.1540 \quad -0.0172 \quad 0.0523 \\ &\quad -0.1042 \quad 0.3919 \quad 0.0161 \quad 0.0002 \\ &\quad 0.0036 \quad -0.0134 \quad -0.0006 \quad 0.0006 \\ &\quad 0.0143 \quad 0.0478 \quad -0.0004 \quad -0.0022 \\ &\quad 0.0118 \quad 0.0438 \quad -0.0002 \quad 0.0035 \\ &\quad -0.2434 \quad 3.8489 \quad 0.0335 \quad 0.0060 \\ &\quad -0.5026 \quad 3.1748 \quad 0.1240 \quad -0.0311]; \\ R_j &= [0.6115 \quad 0.7149 \quad 0.6551 \quad 0.9017]; \\ RR_j &= [0.3740 \quad 0.5111 \quad 0.4292 \quad 0.8130]; \end{aligned} \quad (3.27)$$

На основе $A_o(2)$ $A_o(3)$ $A_o(4)$ строятся функции $f_2(X)$, $f_3(X)$ и $f_4(X)$, которые с учетом полученных коэффициентов примут вид:

$$\max f_3(X), \min f_2(X), \min f_4(X), \text{ при ограничениях: (3.20).} \quad (3.28)$$

Минимальные и максимальные значения экспериментальных данных $x_1, \dots, x_4$ представлены в нижней части таблицы 2. Минимальные и максимальные значения функций $f_1(X)$, $f_2(X)$, $f_3(X)$ и $f_4(X)$ незначительно отличаются от экспериментальных данных. Индекс корреляции и коэффициенты детерминации представлены в нижних строках таблицы 2. Результаты регрессионного анализа (3.27), (3.28) в дальнейшем используются при построении математической модели технической системы.

Получившаяся математическая модель в виде ВЗМП (3.28) является численной моделью технической системы в условиях неопределенности (числовые данные модели (3.28) представлены ниже).

3.2.5. Построение агрегированной численной модели технической системы в условиях определенности

Объединяя математические модели технической системы в условиях определённости (3.19)-(3.20) и неопределённости (3.28) представим математическую модель технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде ВЗМП:



$$Opt F(X) = \{\max F_1(Y) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (3.29)$$

$$\max I_1(Y) \equiv \{\max f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}},$$

$$\min F_2(Y) = \{\min f_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}},$$

$$\min I_2(X) \equiv \{\min f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\},$$

$$\text{при ограничениях } f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}, x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}.$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров);

$$F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}\} –$$

множество функций $\max$ и $\min$ соответственно;

$$I_1(Y) = \{\{f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, I_2(X) = \{\{f_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}$$

множество матриц $\max$ и $\min$ соответственно; (*definiteness*), K_1^{unc}, K_2^{unc} (*uncertainty*)

множество критериев $\max$ и $\min$ сформированные в условиях определенности и неопределенности.

Объединяя численные модели технической системы в условиях определённости (3.26) и неопределённости (3.28) представим числовую технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$\begin{aligned} opt F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_1(X) \equiv & 323.8408 - 2.2495x_1 - 3.4938x_2 + 10.7267x_3 + \\ & 13.1235x_4 + 0.0968x_1x_2 - 0.0620x_1x_3 - 0.1696x_1x_4 + 0.0743x_2x_3 - 0.1042x_2x_4 - \\ & 0.0036x_3x_4 + 0.0143x_1^2 + 0.0118x_2^2 - 0.2434x_3^2 - 0.5026x_4^2, \quad (3.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max f_3(X) \equiv & 110.2296 + 0.7918x_1 + 1.7392x_2 - 0.3713x_3 - 2.2001x_4 - 0.0132x_1x_2 \\ & - 0.0083x_1x_3 + 0.0193x_1x_4 - 0.0172x_2x_3 + 0.0161x_2x_4 - 0.0006x_3x_4 \\ & - 0.0004x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0335x_3^2 + 0.1240x_4^2, \quad (3.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min F_2(X) = \{\min f_2(X) \equiv & 954.8634 + 28.6718x_1 + 37.0392x_2 - 31.03x_3 + 54.0031x_4 - \\ & 0.9220x_1x_2 - 2.0044x_1x_3 + 0.8966x_1x_4 - 0.1540x_2x_3 + 0.3919x_2x_4 - 0.0134x_3x_4 + \\ & 0.0478x_1^2 + 0.0438x_2^2 + 3.8489x_3^2 + 3.1748x_4^2, \quad (3.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min f_4(X) \equiv & 21.0038 - 0.0097x_1 - 0.8406x_2 - 0.4326x_3 + 1.1723x_4 + 0.166x_1x_2 + \\ & 0.0850x_1x_3 - 0.0001x_1x_4 + 0.0523x_2x_3 + 0.0002x_2x_4 + 0.0006x_3x_4 - 0.0022x_1^2 + \\ & 0.0035x_2^2 + 0.0060x_3^2 - 0.0311x_4^2\}, \quad (3.33) \end{aligned}$$

$$\text{при ограничениях: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 102, \quad (3.34)$$

$$21 \leq x_1 \leq 79; 5 \leq x_2 \leq 59; 2.10 \leq x_3 \leq 9; 2.2 \leq x_4 \leq 7. \quad (3.35)$$

Векторная задача математического программирования (3.30)-(3.35) представляет численную модель принятия оптимального решения технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

3.2.6. Блок 2. Принятие оптимального решения (выбора оптимальных параметров) технической системы на базе векторной задачи математического программирования.

Для формирования модели технической системы на базе векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями (3.30)-(3.35) представлены



методы, основанные на аксиоматике нормализации критериев и принципе гарантированного результата, вытекающие из аксиомы 1 и принципа оптимальности 1.

Методика решения представлена в виде ряда шагов.

Шаг 1. Решение ВЗМП (3.30)-(3.35) по каждому критерию отдельно. Для решения используется функция $fmincon(...)$ системы MATLAB, обращение к функции $fmincon(...)$ в [18, 19]. Как результат расчета, по каждому критерию получаем точки оптимума: X_k^* и

$f_k^* = f_k(Y_k^*), k = \overline{1, K}, K=4$ – величины критериев – наилучшее решение по каждому критерию:

Критерий 1: $X_1^* = \{x_1 = 47.6032, x_2 = 44.1968, x_3 = 8, x_4 = 2.2\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -392.9$;

Критерий 2: $X_2^* = \{x_1 = 56.6036, x_2 = 35.1964, x_3 = 8, x_4 = 2.2\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = 1337.4$;

Критерий 3: $X_3^* = \{x_1 = 32.9000, x_2 = 59, x_3 = 2.1, x_4 = 7\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -210.5729$;

Критерий 4: $X_4^* = \{x_1 = 37.7000, x_2 = 59, x_3 = 2.1, x_4 = 2.2\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = 32.68$.

Результат решения ВЗМП (3.30)-(3.35), ограничения (3.35) и точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в координатах x_1, x_3 представлены на рис. 11.

Шаг 2. Вычисляем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): X_k^0 и $f_k^0 = f_k(X_k^0), k = \overline{1, K}, K=4$. Для этого решается задача (3.30)-(3.35) для каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум, для каждого критерия $k = \overline{1, K_2}$ на максимум. В результате получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величина k -го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1, K}$, (верхний индекс ноль):

Критерий 1: $X_1^0 = \{x_1 = 32.90, x_2 = 60.0, x_3 = 2.1, x_4 = 7.00\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 302.76$;

Критерий 2: $X_2^0 = \{x_1 = 32.90, x_2 = 60.0, x_3 = 2.1, x_4 = 7.0\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = -2417.52$;

Критерий 3: $X_3^0 = \{x_1 = 78.999, x_2 = 10.4047, x_3 = 8, x_4 = 4.5953\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = 170.52$;

Критерий 4: $X_4^0 = \{x_1 = 63.465, x_2 = 24.5125, x_3 = 8, x_4 = 6.022\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = -75.205$.

Шаг 3. Системный анализ множества точек, оптимальных по Парето, (т.е. анализ по каждому критерию) реализуется. Для этого в точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*) = \|f_q(X_k^*)\|_{q=\overline{1, K}}^{k=\overline{1, K}}$,

$D = (d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4)^T$ – вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве S : $d_k = f_k^* - f_k^0, k = \overline{1, 4}$, и матрица относительных оценок: $\lambda(X^*) =$

$$\|\lambda_q(X_k^*)\|_{q=\overline{1, K}}^{k=\overline{1, K}},$$

где $\lambda_k(X) = \frac{f_k^* - f_k^0}{d_k}$. $d_k = \{92.72, -1114.9, 41.2898, -43.1973\}$.



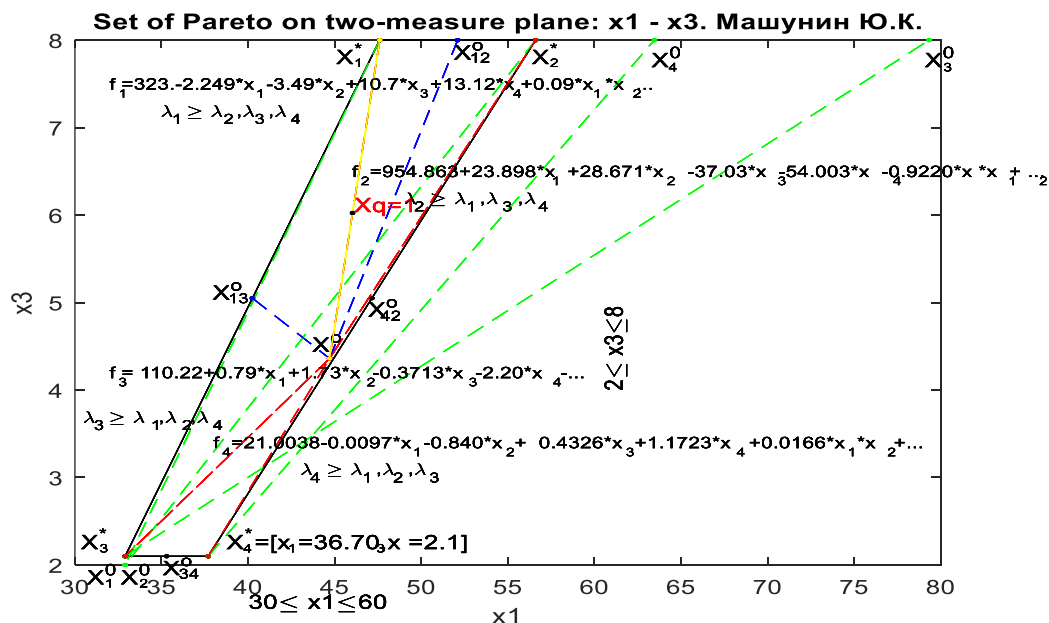


Рисунок 11. Допустимое множество точек S в координатах x_1, x_3 . Множество точек, оптимальных по Парето, $S^o \subset S$, ограничено точками $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$, и локальное S_1^o между $X_1^*, X_{13}^o, X^o, X_{12}^o, X_1^*$ в двухмерной системе координат $\{x_1, x_3\}$.

$$F(X^*) = \begin{bmatrix} 392.9 & 1419.5 & 185.0 & 70.4 \\ 387.2 & 1337.3 & 178.5 & 73.8 \\ 302.8 & 2417.5 & 210.5 & 32.2 \\ 338.2 & 2162.2 & 208.0 & 32.7 \end{bmatrix}, \lambda(X^*) = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.9264 & 0.3618 & 0.1139 \\ 0.9364 & 1.00 & 0.1991 & 0.0326 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.00 & 1.0103 \\ 0.3931 & 0.2364 & 0.9364 & 1.00 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

$$Lmin = \lambda(X^o) = \begin{bmatrix} 0 & -0.0000 & 1.0000 & 1.0103 \\ 0.0000 & 0 & 1.0000 & 1.0103 \\ -0.0276 & 0.3574 & 0 & 0.0826 \\ 0.4660 & 0.7505 & 0.0756 & 0 \end{bmatrix}$$

Системный анализ величин критериев в относительных оценках в ВЗМП (3.30)-(3.35) показывает: в точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии (3.36) $\lambda(X^*) = \|\lambda_q(X_k^*)\|_{q=1, \bar{K}}^{k=1, \bar{K}}$ значительно меньше единицы. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки близки к единице. На решение этой проблемы направлено решение λ -задачи - шаг 4, 5.

Шаг 4. Формирование λ -задачи реализуется в два этапа: на первом этапе строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \max_{Y \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X), G(X) \leq 0, X \geq 0; \quad (3.37)$$

на 2-м этапе максиминная задача (3.37) преобразуется в стандартную задачу математического программирования (λ -задача):

$$\lambda^o = \max \lambda, \quad (3.38)$$

$$\text{с ограничениями} \quad \lambda - \frac{f_1(X) - f_1^o}{f_1^* - f_1^o} \leq 0, \lambda - \frac{f_3(X) - f_3^o}{f_3^* - f_3^o} \leq 0, \lambda - \frac{f_2(X) - f_2^o}{f_2^* - f_2^o} \leq 0, \lambda - \frac{f_4(X) - f_4^o}{f_4^* - f_4^o} \leq 0,$$



$$0 \leq \lambda \leq 1, 20 \leq x_1 \leq 80; 4 \leq x_2 \leq 60; 2.10 \leq x_3 \leq 9; 2.2 \leq x_4 \leq 7. x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 102,$$

Вектор неизвестных имеет размерность $N+1$: $X = \{x_1, \dots, x_N, \lambda\}$ функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ соответствуют (3.38) соответственно. Подставив числовые значения функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$, мы получим λ -задачу следующего вида:

$$\lambda^0 = \max \lambda, \quad (3.39)$$

$$\text{при ограничениях} \quad \lambda - \frac{323.84 - 2.249x_1 - 3.49x_2 - \dots - 0.2434x_3^2 - 0.5026x_4^2 - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} \leq 0,$$

$$\dots \quad \lambda - \frac{21 - 0.0097x_1 - 0.841x_2 - \dots + 0.006x_3^2 - 0.0311x_4^2 - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} \leq 0,$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, 20 \leq x_1 \leq 80; 4 \leq x_2 \leq 60; 2.10 \leq x_3 \leq 9; 2.2 \leq x_4 \leq 7.0. x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 102,$$

Шаг 5. Решение λ -задачи (3.39).

Для этой цели мы используем обращение к функции $fmincon(\dots)$, [16]:

$$[X_0, Lo] = fmincon('Z_TehnSist_4Krit_L', X_0, A_0, b_0, A_{eq}, b_{eq}, l_0, u_0, 'Z_TehnSist_LConst', options).$$

В результате решения векторной задачи (3.30)-(3.35) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ -задачи (3.39) получили:

$$X^0 = \{X^0, \lambda^0\} = \{x_1 = 45.4458, x_2 = 49.99, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6091\}, \quad (3.40)$$

точку оптимума X^0 – конструктивные параметры технической системы, которая представлена на рис. 11;

$f_k(X^0), k = \overline{1, K}$ – величины критериев (характеристик технической системы):

$$\{f_1(X^0) = 369.9, f_2(X^0) = 1759.6, f_3(X^0) = 194.9, f_4(X^0) = 49.3\}; \quad (3.41)$$

$\lambda_k(X^0), k = \overline{1, K}$ – величины относительных оценок

$$\lambda(X^0) = \{\lambda_1(X^0) = 0.7452, \lambda_2(X^0) = 0.6091, \lambda_3(X^0) = 0.6091, \lambda_4(X^0) = 0.6091\}; \quad (3.42)$$

$\lambda^0 = 0.6091$ – это максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок в относительных единицах: $\lambda^0 = \min(\lambda_1(X^0), \lambda_2(X^0), \lambda_3(X^0), \lambda_4(X^0)) = 0.6091$.

$\lambda^0 = 0.6091$ называют также гарантированным результатом в относительных единицах. $\lambda_k(X^0)$ и соответственно характеристики технической системы $f_k(X^0)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

В соответствии с теоремой с 1, в точке X^0 критерии 2, 3 и 4: $\lambda_1(X^0), \lambda_3(X^0), \lambda_4(X^0)$ противоречивы. Это противоречие определяется равенством: $\lambda_2(X^0) = \lambda_3(X^0) = \lambda_4(X^0) = \lambda^0 = 0.6091$, а остальные критерии неравенством $\{\lambda_1(X^0) = 0.7452\} > \lambda^0$.

Теорема 1 служит основой для определения правильности решения векторной задачи. В ВЗМП, как правило, для двух критериев выполняется равенство:

$$\lambda^0 = \lambda_q(X^0) = \lambda_p(X^0), \quad q, p \in K, X \in S,$$

(в нашем примере такие критерии 2, 3, 4), для других критериев определяется как неравенство.

3.2.7. 6 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 4 критериями в двухмерную систему координат (с 2 параметрами) в относительных единицах.

Для геометрической интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 4 критериями в двухмерную систему координат (с 2-мя параметрами) в относительных



единицах введем изменения. В векторной задаче (3.30)-(3.35) параметры x_1 и x_3 рассматриваются как переменные, а параметры x_2 и x_4 рассматриваются как постоянные.

В соответствии с результатом решения ВЗМП (3.30)-(3.35) при равнозначных критериях:

$$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 45.4458, x_2 = 49.99, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6091\}$$

в (3.40), присвоим постоянным параметрам размерность: $x_2 = 49.99, x_4 = 2.2$.

В итоге ВЗМП (3.30)-(3.35) стала двухмерной.

Результаты решения ВЗМП (3.30)-(3.35) с двумя переменными x_1 и x_3 .

В обозначениях результатов решения ввели дополнительную букву «о» $X1o_{max}$.

1. По первому критерию координаты точки на максимум равны:

$$X1o_{max} = \{x_1 = 47.6032 \quad x_2 = 49.9964 \quad x_3 = 8.0000 \quad x_4 = 2.2000\}.$$

Величины четырех критериев в точке $X1o_{max}$: $FX1o_{max} = \{f_1(X1o_{max}) = 407.9$
 $f_2(X1o_{max}) = 1401.5 \quad f_3(X1o_{max}) = 190.5 \quad f_4(X1o_{max}) = 74.4$.

Величины относительны оценок критериев в точке $X1o_{max}$:

$$LX1o_{max} = \{\lambda_1(X1o_{max}) = 1.1831 \quad \lambda_2(X1o_{max}) = 0.9406$$

$$\lambda_3(X1o_{max}) = 0.5046 \quad \lambda_4(X1o_{max}) = 0.0192.$$

Координаты точки по первому критерию на минимум:

$$X1o_{min} = \{33.9000 \quad 49.9964 \quad 2.1000 \quad 2.2000\}.$$

Величины четырех критериев в точке $X1o_{min}$:

$$FX1o_{min} = \{1.0e+03 * 0.3100 \quad 2.1799 \quad 0.1966 \quad 0.0260\}.$$

Величины относительны оценок критериев в точке $Y1o_{min}$:

$$LX1o_{min} = \{0.0798 \quad 0.2219 \quad 0.6505 \quad 1.1551\}.$$

2. По второму критерию координаты точки, функции и относительные оценки на максимум и минимум равны: $X2o_{max} = \{56.6036 \quad 49.9964 \quad 8.0000 \quad 2.2000\}$.

$$FX2o_{max} = \{1.0e+03 * 0.4368 \quad 1.1630 \quad 0.1914 \quad 0.0858\}.$$

$$LX2o_{max} = \{1.4871 \quad 1.1615 \quad 0.5205 \quad -0.2501\}.$$

$$X2o_{min} = \{33.9000 \quad 49.9964 \quad 2.1000 \quad 2.2000\}.$$

$$FX2o_{min} = \{1.0e+03 * 0.3100 \quad 2.1799 \quad 0.1966 \quad 0.0260\}.$$

$$LX2o_{min} = \{0.0806 \quad 0.2200 \quad 0.6505 \quad 1.1562\}.$$

3. По третьему критерию координаты точки, функции и относительные оценки на максимум и минимум: $X3o_{max} = \{33.9000 \quad 49.9964 \quad 2.1000 \quad 2.2000\}$.

$$FX3o_{max} = \{1.0e+03 * 0.3076 \quad 2.2049 \quad 0.1974 \quad 0.0253\}.$$

$$LX3o_{max} = \{0.0806 \quad 0.2200 \quad 0.6505 \quad 1.1562\}.$$

$$X3o_{min} = \{78.9999 \quad 49.9964 \quad 8.0000 \quad 2.2000\}.$$

$$FX3o_{min} = \{518.7746 \quad 602.8613 \quad 192.6992 \quad 112.8235\}.$$

$$LX3o_{min} = \{2.4170 \quad 1.6870 \quad 0.5474 \quad -0.9008\}.$$

4. По четвертому критерию координаты точки, функции и относительные оценки на максимум и минимум равны: $X4o_{max} = \{37.7000 \quad 50.7315 \quad 2.1000 \quad 2.2000\}$.

$$FX4o_{max} = \{1.0e+03 * 0.3250 \quad 2.1021 \quad 0.1972 \quad 0.0301\}.$$

$$LX4o_{max} = \{0.2471 \quad 0.2920 \quad 0.6662 \quad 1.0614\}.$$

$$X4o_{min} = \{63.4651 \quad 49.9964 \quad 8.0000 \quad 2.2000\}.$$

$$FX4o_{min} = \{460.4076 \quad 986.2753 \quad 191.8170 \quad 94.3384\}.$$



$LX4_{\min} = \{1.7488 \quad 1.3251 \quad 0.5316 \quad -0.4499\}$.

Представим в целом результаты решения ВЗМП с двумя переменными параметрами: x_1 и x_3 (двухмерная ВЗМП):

$X_{\text{opt}} = [X_{\text{opt}}(1,:) = \{47.6032 \quad 44.1968 \quad 8.0000 \quad 2.2000\}, \lambda_1(X1_{\text{opt}}) = 1.1666;$

$X_{\text{opt}}(2,:) = \{56.6036 \quad 35.1964 \quad 8.0000 \quad 2.2000\}, \lambda_2(X2_{\text{opt}}) = 1.1615;$

$X_{\text{opt}}(3,:) = \{32.9000 \quad 60.0000 \quad 2.1000 \quad 7.0000\}, \lambda_3(X3_{\text{opt}}) = 0.6505;$

$X_{\text{opt}}(4,:) = \{37.7000 \quad 60.0000 \quad 2.1000 \quad 2.2000\}, \lambda_4(X4_{\text{opt}}) = 1.0614;$

$X_0(1:4) = \{X^0 = \{x_1 = 45.4458, x_2 = 49.99, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6091\}. \quad (3.43)$

Характеристики технической системы в относительных единицах $\lambda_1(X_0), \lambda_2(X_0), \lambda_3(X_0), \lambda_4(X_0)$ показаны на рис. 12 в трехмерном пространстве x_1, x_3 и λ .

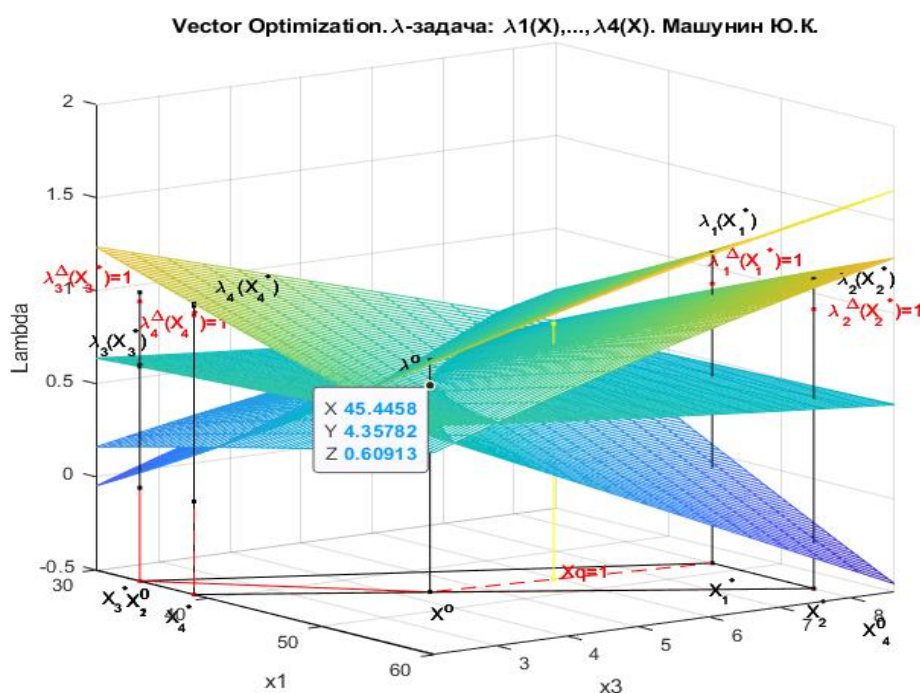


Рисунок 12. Геометрическая интерпретация четырех функций в относительных единицах $\lambda_1(X_0), \lambda_2(X_0), \lambda_3(X_0), \lambda_4(X_0)$ в трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ

В допустимом множестве точек S , образованных ограничениями (3.34)-(3.35), точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$, объединенных в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $S^0 \subset S$, представлены на рис. 11. Координаты этих точек, а также характеристики материала в относительных единицах $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$ показаны на рис. 12 в трех мерном пространстве x_1, x_2 и λ , где третья ось λ - относительная оценка.

3.2.8.7 этап. Результаты решения Векторной Задачи Математического Программирования при равнозначных критериях - подготовка информации для принятия решений с приоритетом критерия.

В результате решения векторной задачи при равнозначных критериях получили.



Результаты решения Векторной Задачи Математического Программирования

(Математическая модель Инженерной Системы - ИС) при равнозначных критериях

1. Критерии (характеристики ИС), параметры в точке оптимума:

Критерий 1: $f_1^* = f_1(X_1^*) = -392.9$; Параметры: $X_1^* = \{x_1 = 47.603, x_2 = 44.19, x_3 = 8., x_4 = 2.2\}$;

Критерий 2: $f_2^* = f_2(X_2^*) = 1337.38$; Параметры: $X_2^* = \{x_1 = 56.6, x_2 = 35.1964, x_3 = 8, x_4 = 2.2\}$;

Критерий 3: $f_3^* = f_3(X_3^*) = -210.5729$; Параметры: $X_3^* = \{x_1 = 32.9000, x_2 = 59, x_3 = 2.1, x_4 = 7\}$;

Критерий 4: $f_4^* = f_4(X_4^*) = 32.68$; Параметры: $X_4^* = \{x_1 = 37.7, x_2 = 60, x_3 = 2.1, x_4 = 2.2\}$; (3.44)

2. Критерии (характеристики ИС), параметры в точке антиоптимума:

Критерий 1: $f_1^0 = f_1(X_1^0) = 302.7645$; Параметры: $X_1^0 = \{x_1 = 33.9, x_2 = 59.0, x_3 = 2.1, x_4 = 7.0\}$;

Критерий 2: $f_2^0 = f_2(X_2^0) = -2417.52$; Параметры: $X_2^0 = \{x_1 = 33.90, x_2 = 59.0, x_3 = 2.1, x_4 = 7.0\}$;

Критерий 3: $f_3^0 = f_3(X_3^0) = 170.53$; Параметры: $X_3^0 = \{x_1 = 78.99, x_2 = 10.4, x_3 = 8, x_4 = 4.59\}$;

Критерий 4: $f_4^0 = f_4(X_4^0) = -75.2$; Параметры: $X_4^0 = \{x_1 = 63.465, x_2 = 24.5, x_3 = 8, x_4 = 6\}$; (3.45)

3. Критерии (характеристики ИС) в относительных единицах в точке X^0 :

$\lambda^0 = 0.6091$ – максимальный нижний уровень в относительных единицах

$\lambda_k(X^0), k = \overline{1, K}$ – величины относительных оценок:

$$\{\lambda_1(X^0) = 0.7452, \lambda_2(X^0) = 0.6091, \lambda_3(X^0) = 0.6091, \lambda_4(X^0) = 0.6091\}; \quad (3.46)$$

$$X^0 = \{X^0, \lambda^0\} = \{Y^0 = \{x_1 = 45.4458, x_2 = 49.996, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6091\}\}. \quad (3.47)$$

4. Критерии (характеристики ИС) в физических единицах:

$f_k(X^0), k = \overline{1, K}$ – величины критериев (характеристик) в физических единицах:

$$\{f_1(X^0) = 369.9, f_2(X^0) = 1759.6, f_3(X^0) = 194.9, f_4(X^0) = 49.3\}; \quad (3.48)$$

5. Информация об ИС в физических единицах принятия решений с приоритетом критерия:

$$1. f_1(X) \rightarrow \max: f_1^* = f_1(X_1^*) = -392.9 \leq f_1(X^0) = 369.9 \leq f_1^0 = f_1(X_1^0) = 302.76;$$

$$2. f_2(X) \rightarrow \min: f_2^* = f_2(X_2^*) = 1337.38 \leq f_2(X^0) = 1758.6 \leq f_2^0 = f_2(X_2^0) = -2417.5;$$

$$3. f_3(X) \rightarrow \max: f_3^* = f_3(X_3^*) = -210.57 \leq f_3(X^0) = 194.9 \leq f_3^0 = f_3(X_3^0) = 170.53;$$

$$4. f_4(X) \rightarrow \min: f_4^* = f_4(X_4^*) = 32.68 \leq f_4(X^0) = 49.3 \leq f_4^0 = f_4(X_4^0) = -75.205.$$

3.2.9. Заключение по результатам решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях.

Мы представили методологию решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях (характеристиках) на примере инженерной системы - техническая система. В процессе решения задачи системе MATLAB представлена геометрическая интерпретация результатов решения в двухмерной системе координат.

Таким образом, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая иллюстрация от N -мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками линейной аппроксимации. Нами подготовлена информация для исследования и выбора оптимального решения при приоритете того или иного критерия (характеристики) инженерной системы. На решение этой проблемы направлена вторая часть работы.



3.3. Часть 2. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности - с приоритетом критерия на базе многомерной математики.

Часть 2 включает два блока: **Блок 3.** Анализ, сравнение результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях сложной инженерной системы (модели технической системы) и подготовка к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию решения векторной задачи (раздел 3.3).

Блок 4. Исследование и выбор оптимальных параметров технической системы по приоритетным критериям k_1, k_2, k_3, k_4 и геометрическая интерпретация результатов решения в относительных и физических единицах на базе многомерной оптимизации (раздел 3.4).

3.3.1. Блок 3. Анализ, сравнение результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях сложной инженерной системы (модели технической системы) и подготовка к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию.

Сравним результаты решения векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями (3.30)-(3.35) с четырьмя переменными x_1, x_2, x_3 и x_4 с результатами решения векторной задачи (3.30)-(3.35) с двумя переменными x_1 и x_3 .

Результаты решения четырехмерной ВЗМП (3.30)-(3.35) с переменными координатами $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ представлены в (3.40), (3.41), (3.42), в относительных единицах показаны на рис. 13 красным цветом.

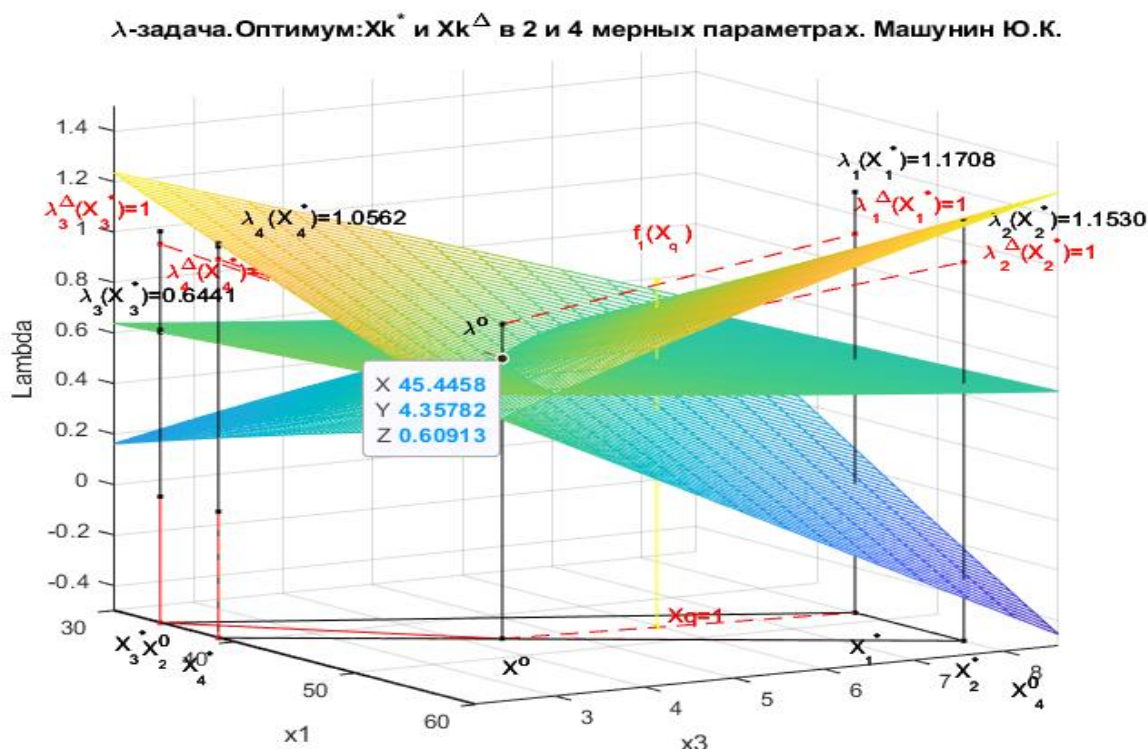


Рисунок 13. Решение λ -задачи в трехмерной системе координат x_1, x_3 и λ

Результаты решения двухмерной ВЗМП (четыре критерия) с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ представлены в (3.43).



Результаты решения и сравнения исследуемых задач представлены в трехмерной системе координат x_1, x_3 и λ на рис. 13.

На рис. 13 представлены точка оптимума в координатах x_1, x_3 :

$X^0 = \{X^0, \lambda^0\} = \{X^0 = \{x_1 = 45.4458, x_2 = 49.9964, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6091\}$
из (3.40); и относительная оценка:

$\{\lambda_1(X^0) = 0.7452, \lambda_2(X^0) = 0.6091, \lambda_3(X^0) = 0.6091, \lambda_4(X^0) = 0.6091\}$ из (3.41) в тех же координатах x_1, x_3 .

Рассмотрим, например, оптимальную точку X_3^* . Функция $\lambda_3(X)$ сформирована из функции $f_3(X)$ с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$, с постоянными координатами $\{x_2 = 49.54, x_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки X^0 (3.40). В точке X_3^* относительная оценка $\lambda_3(X_3^*) = 0.6441$ – показана на рис. 13 черной точкой. Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3(X_3^*)$ полученная из функции $f_3(X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^A(X_3^*) = 1$ – показана на рис. 13 красной точкой.

В итоге: *во-первых*, при равнозначных критериях координаты точек оптимума x_1, x_3 :

$X^0 = \{X^0, \lambda^0\} = \{X^0 = \{x_1 = 45.44, x_3 = 4.3578, \lambda^0 = 0.6091\}$ - *в двухмерной*

$X^0 = \{X^0, \lambda^0\} = \{X^0 = \{x_1 = 45.44, x_2 = 49.54, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6091\}$

в четырехмерной системе совпадают (используя программные возможности системы MATLAB, покажем числовые значения точки оптимума $\{X^0, \lambda^0\}$ на рис. 13);

во-вторых, в точке оптимума X_3^* оптимальные величины критериев $f_k(X_k^*), k = 3$ и относительные оценки $\lambda_k(X_k^*) = 0.6441, k = 3$ и $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = 3$ *не совпадают*.

Разность между относительными оценками $\lambda_3^A(X_3^*) = 1$ и $\lambda_3(X_3^*) = 0.6441$ является ошибкой $\Delta = 0.3559$ перехода от четырехмерной (а в общем случае N -мерной) к двухмерной системе измерений. Аналогично на рис. 13 показаны:

точка X_1^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_1(X_1^*) = 1.1708, \lambda_1^A(X_1^*) = 1$;

точка X_2^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_2(X_2^*) = 1.1530, \lambda_2^A(X_2^*) = 1$;

точка X_3^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_3(X_3^*) = 0.6441, \lambda_3^A(X_3^*) = 1$;

точка X_4^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_4(X_4^*) = 1.0562, \lambda_4^A(X_4^*) = 1$.

Вывод из анализа: Информация об Инженерной Системе в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия. Подготовка к геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию.

По результатам решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях мы сформулировали информацию для улучшения и принятия управленческого решения для любого критерия (характеристики инженерной системы): $f_k(X_k^*) \leq f_k(X^0) \leq f_k(X_k^0), k = \overline{1, K}$.

Информация об Инженерной Системе в физических единицах для принятия решений.

1. $f_1(X) \rightarrow \max$: $f_1^* = f_1(X_1^*) = -392.9 \leq f_1(X^0) = 369.9 \leq f_1^0 = f_1(X_1^0) = 302.7645$;
2. $f_2(X) \rightarrow \min$: $f_2^* = f_2(X_2^*) = 1337.38 \leq f_2(X^0) = 1759.6 \leq f_2^0 = f_2(X_2^0) = -2452.3$;
3. $f_3(X) \rightarrow \max$: $f_3^* = f_3(X_3^*) = -210.57 \leq f_3(X^0) = 194.9 \leq f_3^0 = f_3(X_3^0) = 170.53$;
4. $f_4(X) \rightarrow \min$: $f_4^* = f_4(X_4^*) = 32.68 \leq f_4(X^0) = 49.3 \leq f_4^0 = f_4(X_4^0) = -75.205$.

3.3.2. 9 этап. Подготовка информации к выбору оптимальных параметров по любому приоритетному критерию и геометрической интерпретации результатов решения.



При подготовке информации к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию и геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи используем рис. 13, из которого удалены функции $\{\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)\}$ в относительных единицах, и представим его на рис. 14.

Представим на рис. 14 информационные данные об относительных оценках $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$ и физические данные $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$, полученные при решении векторной задачи при равнозначных критериях.

1. Представим результаты решения $\lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_4(X_4^*)$, которые получены в двухмерной системе координат x_1, x_3 и λ (см. раздел 5.1.7):

точка X_1^* , соответствующая относительная оценка $\lambda_1(X_1^*) = 1.1708$;

точка X_2^* , соответствующая относительная оценка $\lambda_2(X_2^*) = 1.1530$;

точка X_3^* , соответствующая относительная оценка $\lambda_3(X_3^*) = 0.6441$;

точка X_4^* , соответствующая относительная оценка $\lambda_4(X_4^*) = 1.0562$.

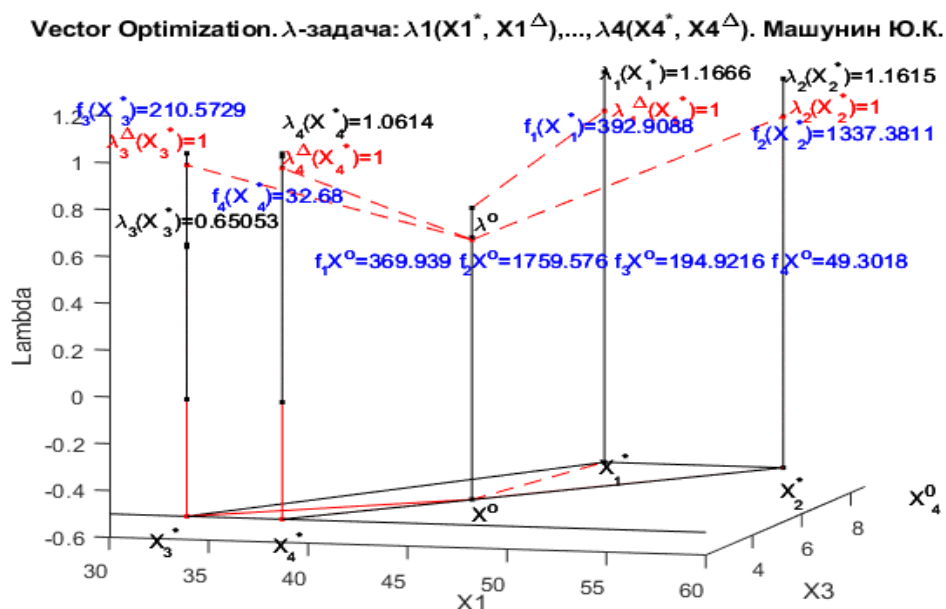


Рисунок 14. λ -задача в системе координат x_1, x_3 и λ .

Геометрическая интерпретация результатов решения четырех критериев в относительных и физических единицах.

1. Результаты решения $\lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_4(X_4^*)$ в двухмерной системе координат x_1, x_3 и λ
2. Теоретические результаты решения $\lambda_1^\Delta(X_1^*) = 1, \dots, \lambda_4^\Delta(X_4^*) = 1$, в двухмерной системе координат x_1, x_3 и λ . (Красный цвет).
3. Результаты решения $f_1(X_1^*), \dots, f_4(X_4^*)$ в физических единицах, соответствующие $\lambda_1^\Delta(X_1^*) = 1, \dots, \lambda_4^\Delta(X_4^*) = 1$ – относительным единицам
4. Результаты решения $f_1(X_1^0), \dots, f_4(X_4^0)$ в физических единицах при равнозначных критериях. (Фиолетовый цвет).



2. Теоретические результаты решения $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}, K = 4$ в двухмерной системе координат x_1, x_3 и λ . (Красный цвет):

точка X_1^* , соответствующая относительная оценка $\lambda_1^\Delta(X_1^*) = 1$;

точка X_2^* , соответствующая относительная оценка $\lambda_2^\Delta(X_2^*) = 1$;

точка X_3^* , соответствующая относительная оценка $\lambda_3^\Delta(X_3^*) = 1$;

точка X_4^* , соответствующая относительная оценка $\lambda_4^\Delta(X_4^*) = 1$.

3. Результаты решения $f_1(X_1^*), \dots, f_4(X_4^*)$ в физических единицах, соответствующие

$\lambda_1^\Delta(X_1^*) = 1, \dots, \lambda_4^\Delta(X_4^*) = 1$ – относительным единицам, которые получены на третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в (3.36) (Фиолетовый цвет):

точка X_1^* , соответствующая физическая величина

$$f_1(X_1^*) = 392.908;$$

точка X_2^* , соответствующая физическая величина

$$f_2(X_2^*) = 1337.38;$$

точка X_3^* , соответствующая физическая величина

$$f_3(X_3^*) = 210.57;$$

точка X_4^* , соответствующая физическая величина $f_4(X_4^*) = 32.68$.

4. Результаты решения всех критериев (характеристик технической системы): $f_1(X_1^0), \dots, f_4(X_4^0)$

в физических единицах в точке оптимума $X_k^0, k = \overline{1, K}$ при равнозначных критериях (Фиолетовый цвет): $f_1 X_1^0 = 369.93, f_2 X_2^0 = 1759.57, f_3 X_3^0 = 194.92, f_4 X_4^0 = 49.3018$.

Проведем анализ полученных результатов.

Линейная функция, соединяющая точки $\lambda^0(X^0) = 0.6091$ и $\lambda_2^\Delta(X_2^*) = 1$ в относительных единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функции $f_2(X)$ в относительных единицах из N -мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат. Как видно из рис. 14 соответствующие физические величины $f_2(X)$ лежат в пределах:

$$f_2(X^0) = 1759.576 \leq f_2(X) \leq f_2(X_2^*) = 1337.38. \quad (3.49)$$

Заметим, что функция $f_2(X)$ минимизируется – в точке оптимума X_2^* величина минимальная. Аналогичные (3.49) соотношения построены на рис. 14 для каждого критерия.

Соотношения (3.49) являются основой для исследования выбранного критерия:

во-первых, для выбора величины критерия в физических единицах;

во-вторых, расчета соответствующей относительной оценки;

в-третьих, расчета соответствующих параметров технической системы;

в-четвертых, принятия окончательного решения.

В работе показан выбор оптимальных параметров технической системы для заданной величины каждого критерия $k = \overline{1, K}, K = 4$.

Задана величина 1 критерия $f_1(X) = 380$, которая лежит в пределах:

$$f_1(X^0) = 369.9 \geq f_1(X) = \mathbf{380} \geq f_1(X_1^*) = -392.9. \text{ (Блок 4.k1)}$$

Задана величина 2 критерия $f_2(X) = 1500$, которая лежит в пределах:

$$f_2(X^0) = -1759.6 \leq f_2(X) = \mathbf{1500} \leq f_2(X_2^*) = -1337.38. \text{ (Блок 4.k2)}$$

Задана величина 3 критерия $f_3(X) = 200$, которая лежит в пределах:



$$f_3(X^0) = 194.9 \leq f_3(X) = 200 \leq f_3(X_1^*) = -210.57. \text{ (Блок 4.k3)}$$

Задана величина 4 критерия $f_4(X_1^0) = 40$, которая лежит в пределах:

$$f_4(X^0) = -49.3 \geq f_4(X) = 40 \geq f_4(X_1^*) = -32.68. \text{ (Блок 4.k4).} \quad (3.50)$$

Реализация выбора оптимальных параметров технической системы для заданной величины каждого критерия $f_k(X)$, $k = \overline{1, K}$, $K = 4$ представлена в блоке 4.

3.3.3. Блок 4. Исследование и выбор оптимальных параметров технической системы по приоритетным критериям $k1, k2, k3, k4$ и геометрическая интерпретация результатов решения в относительных и физических единицах на базе многомерной оптимизации.

Выбор оптимальных параметров сложной инженерной (технической) системы и геометрическая интерпретация результатов решения по приоритетному критерию соответствует количеству критериев $K = 4$: Блок **k1**, Блок **k2**, Блок **k3**, Блок **k4**.

Наименование блока.

Блок **k1**, ..., Блок **k4**. *Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы при заданном приоритете первого критерия в многомерной математике.*

Каждый блок выбора параметров по соответствующему критерию включает следующие разделы.

1.k1, ..., 1.k4. Решение векторной задачи - модели сложной инженерной системы (технической системы) при заданном приоритете первого критерия, включающее:

Решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при равнозначных критериях (Шаг 1).

Выбор приоритетного критерия $q \in K$ (Шаг 2).

Выбор числовой величины выбранного приоритетного критерия $q \in K$ (Шаги 3, 4).

Решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете $q \in K$ критерия (Шаги 5 – 8).

2.k1, ..., 2.k4. Анализ результатов решения векторной задачи - модели инженерной системы при заданном приоритете первого критерия.

3.k1, ..., 3.k4. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию **в относительных единицах**.

4.k1, ..., 4.k4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП (функций: $f_1(X), \dots, f_4(X)$) с приоритетом первого критерия – модели технической системы при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах.

1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП первого критерия с приоритетом первого критерия – модели инженерной системы при проектировании в трехмерной системе координат **в физических единицах**. ...

4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП четвертого критерия с приоритетом первого критерия – модели инженерной системы при проектировании в трехмерной системе координат **в физических единицах**.

3.3.4. Блок k1. Выбор оптимальных параметров инженерной системы (техническая система) по первому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП в относительных единицах.



1.k1. Решение ВЗМП – модели сложной инженерной системы при заданном приоритете первого критерия в многомерной математике.

Как правило, лицом, принимающим решения, является конструктор системы.

Шаг 1. Решается векторная задачи при равнозначных критериях. Решения векторной задачи представлено на стадии 4. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше. Точки, оптимальные по Парето $S^o \subset S$ находится между оптимальными точками $X_1^* X_{13}^o X_3^* X_{34}^o X_4^* X_{42}^o X_2^* X_{21}^o X_1^*$. Проведем анализ множества точек Парето $S^o \subset S$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_{13}^o X_{34}^o X_{42}^o X_{21}^o$ с точкой X^o , которая условно представляет центр множества Парето.

Как результат решения получили четыре подмножеств точек $X \in S_q^o \subset S^o \subset S, q = \overline{1,4}$. Подмножество точек $S_1^o \subset S^o \subset S$ выделенное точками $X_1^* X_{13}^o X^o X_{12}^o X_1^*$, характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, то есть в поле первого критерия S_1^o имеет приоритет над остальными. Аналогично S_2^o, S_3^o, S_4^o подмножества точек, характеризуется тем, что второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, обозначим: $S^o = S_1^o \cup S_2^o \cup S_3^o \cup S_4^o$. Геометрическая интерпретация координат всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1 x_3\}$ на рис. 11. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1 x_3 \lambda\}$ на рис. 12, где третья ось λ - относительная оценка.

Ограничения на рис. 12 снижены до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Полученная информация является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето.

Анализируем, если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $S_1^o, S_2^o, S_3^o, S_4^o$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 12 в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 45.4458, x_2 = 49.9964, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6091\}$.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из теоремы 1 известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in K$ и $p \in K$, для которых выполняется точное равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in K, X \in S,$$

а для остальных выполняется неравенства: $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in K, q \neq p \neq k$.

В модели технической системы (3.30)-(3.35) и соответствующей λ -задачи (3.39) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.6091$, т.е. выполняется числовая симметрия.

Из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.6091$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 1 \in K$.

Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in K$.

Выбор приоритетного критерия:

На дисплей выдается общая информация для принятия решений:

Критерии в точке оптимума X^o :

$$f_k(X^o) = \{f_1(X^o) = 369.9, f_2(X^o) = 1759.6, f_3(X^o) = 194.9, f_4(X^o) = 49.3\};. \quad (3.51)$$



Относительные оценки в X^o :

$$\lambda_k(X^o) = \{\lambda_1(X^o) = 0.7452, \lambda_2(X^o) = 0.6091, \lambda_3(X^o) = 0.6091, \lambda_4(X^o) = 0.6091\}. \quad (3.52)$$

Антиоптимум:

$$f_1^0 = f_1(X_1^0) = 302.7645; f_2^0 = f_2(X_2^0) = -2417.52; f_3^0 = f_3(X_3^0) = 170.53; f_4^0 = f_4(X_4^0) = -75.2.$$

ВЫВОД: Критерии 2, 3, 4 наиболее противоречивы, из них выбираем приоритетный.

В данном разделе *исследуется первый критерий* (функция) $q = 1 \in K$

Выдается сообщение на дисплей:

$q = \text{input('Введите приоритетный критерий (номер) } q = \text{'})$ – Ввели критерий $q=1$.

Шаг 3. Формируются числовые пределы изменения величины приоритета критерия

$q = 1 \in K$. Для приоритетного критерия $q = 1 \in K$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o (3.26) в точку X_q^* , полученную на первом шаге. Данные о критерии $q=1$ выдаются на дисплей:

$$f_q(X^o) = 369.93 \leq f_q(X) \leq 392.9 = f_q(X_q^*), q = 1 \in K. \quad (3.53)$$

Аналогично, в относительных единицах критерий $q=1$ изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.7452 \leq \lambda_q(X) \leq 1.0 = \lambda_q(X_q^*), q = 1 \in K$$

Эти данные анализируются.

Шаг 4. Определяется величина приоритетного критерия $q \in K$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия $f_q =$ » - вводим, например, $f_q=380$.

Шаг 5. Для $f_q=375$ вычисляется относительная оценка.

Для приоритетного критерия $f_q = 380$ вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{380 - 369.93}{392.9 - 369.93} = 0.8568,$$

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.7372 \leq \lambda_q(X) = 0.8568 \leq 1.0 = \lambda_q(X_q^*), q = 1 \in K. \quad (3.54)$$

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (3.29) и соответственно относительной оценки λ_q в (3.30), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, λ_q , который назовем ρ :

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.8568 - 0.6091}{1 - 0.6091} = 0.4380, q = 1 \in K. \quad (3.55)$$

Шаг 7. Определяются координаты приоритета критериев с размерностью f_q .

Предполагаем линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\}$, $q = 1$ определим координаты для точки с размерностью $f_q = 380$ с относительной оценкой (3.42):

$$x_{\lambda=0.74}^{q=3} = \{x_1 = X^o(1) + \rho(X_q^*(1) - X^o(1)), x_2 = X^o(2) + \rho(X_q^*(2) - X^o(2)), \\ x_3 = X^o(3) + \rho(X_q^*(3) - X^o(3)), x_4 = X^o(4) + \rho(X_q^*(4) - X^o(4))\}, \quad (3.56)$$

где $X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 45.4458, x_2 = 49.9964, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6091\}$.

$$X_1^* = \{x_1 = 47.6032, x_2 = 44.1968, x_3 = 8.0, x_4 = 2.2\}.$$



Как результат (3.56) решения мы получим координаты точки:

$$X^q = \{x_1 = 46.3908, x_2 = 47.4561, x_3 = 5.9531, x_4 = 2.2000\}. \quad (3.57)$$

Шаг 8. Формирование главных показателей точки X^q .

В полученной точке X^q , вычислим: все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1, K}\}$:

$$f_k(X^{q=1}) = \{f_1(X^q) = 381.5, f_2(X^q) = 1597.9, f_3(X^q) = 190.4, f_4(X^q) = 58.6\}; \quad (3.58)$$

все относительные оценки критериев: $\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}, \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$:

$$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.8733, \lambda_2(X^q) = 0.7588, \lambda_3(X^q) = 0.4953, \lambda_4(X^q) = 0.3896\}; \quad (3.59)$$

минимальная относительная оценка: $\min \lambda(X^q) = \min_{k \in K} (\lambda_k(X^q)) = 0.3896$.

$$P^q = [p_1^1 = 1.0, p_2^1 = 1.1508, p_3^1 = 1.7632, p_4^1 = 2.2416];$$

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_k(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1, K}\} : \lambda_k(X^q) * P^q = \{p_1^1 * \lambda_1(X^q) = 0.8733, p_2^1 * \lambda_2(X^q) = 0.8733, p_3^1 * \lambda_3(X^q) = 0.8733, p_4^1 * \lambda_4(X^q) = 0.8733\}$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^3 \lambda_1(X^q), p_2^3 \lambda_2(X^q), p_3^3 \lambda_3(X^q), p_4^3 \lambda_4(X^q)) = 0.8733.$$

Аналогично получены другие точки из области Парето $X_t^o = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in S^o$.

2.k1. Анализ результатов решения векторной задачи - модели инженерной системы при заданном приоритете первого критерия.

Рассчитанная в (3.58) величина первого критерия при заданном приоритете $f_q(X_t^o) = 381.5, q = 1 \in K, q \in K$ обычно не равна заданной $f_q = 380$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |381.5 - 380| = 1.5$ определяется ошибкой линейной аппроксимации:

$\Delta f_{q\%} = 0.5\%$. Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |381.5 - 380| = 1.5$, которая измерена в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.05\%$, больше заданной

$\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. **Конец.**

При моделировании могут быть изменены параметрические ограничения (3.11) и функции (3.10), т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений). В примере окончательный вариант включает параметры:

$$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 45.4458, x_2 = 49.9964, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6091\};$$

параметры технической системой при заданном приоритете критерия $q=1$:

$$X^q = \{x_1 = 46.3908, x_2 = 47.4561, x_3 = 5.9531, x_4 = 2.2000\}.$$

3.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по первому приоритетному критерию в относительных единицах.

Для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по первому приоритетному критерию в относительных единицах сформируем рис. 15.k1. Аналогично рис. 14, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума X_k^* $\lambda_k(X_k^*), k = \overline{1, K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$ (красный цвет) и представим их рис. 15.k1. На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными



критериями в точках оптимума X_1^* , X_2^* , X_3^* , X_4^* получены величины всех относительных

$$\text{оценок: } L(X^*) = \begin{pmatrix} L(X_1^*) \\ L(X_2^*) \\ L(X_3^*) \\ L(X_4^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.9264 & 0.3618 & 0.1139 \\ 0.9364 & 1.00 & 0.1991 & 0.0326 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.00 & 1.0103 \\ 0.3931 & 0.2364 & 0.9364 & 1.00 \end{pmatrix}.$$

На рис. 15.k1 $\lambda_1(X_1^*) = 1.0000$ обозначена как $\lambda_2^A(X_2^*)=1$.

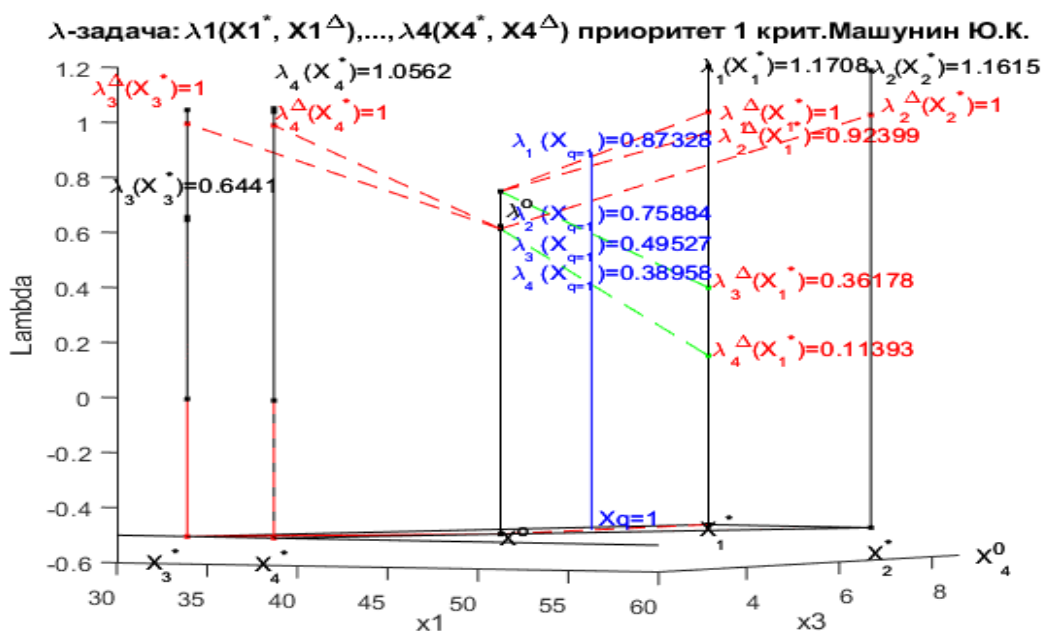


Рисунок 15.k1. λ -задача в системе координат x_1 , x_3 и λ . Результаты решения:
 $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$; относительные оценки с приоритетом первого критерия в точке
оптимума $X_{q=1}$: $\lambda_k(X_{q=1}), k = \overline{1, K}$.

Линейная функция, соединяющая точки $\lambda(X^0) = 0.7372$ и $\lambda_1^A(X_1^*) = 1$ в относительных единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функций $f_1(X)$ в относительных единицах из N -мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат. Аналогично исследуются все функции (критерии). В целом на рис. 15.k1 в точке X_1^* показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций:

- $f_1(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_1^A(X_1^*) = 1.0$;
- $f_2(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_2^A(X_1^*) = 0.92451$;
- $f_3(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_3^A(X_1^*) = 0.35608$;
- $f_4(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_4^A(X_1^*) = 0.11216$.

Относительные оценки с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$

$$\lambda_k(X_{q=1}) = \frac{f_k(X_{q=1}) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K} \quad : \quad \lambda_k(X_{q=1}) = \{\lambda_1(X_{q=1}) = 0.8791, \lambda_2(X_{q=1}) = 0.7654, \lambda_3(X_{q=1}) = 0.4845, \lambda_4(X_{q=1}) = 0.3788\};$$



Математические результаты решения полностью совпадают с геометрическими.

4.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП (функций: $f_1(X), \dots, f_4(X)$) с приоритетом первого критерия – модели технической системы при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах.

Исходной информацией для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи (ВЗМП) с приоритетом первого критерия являются:

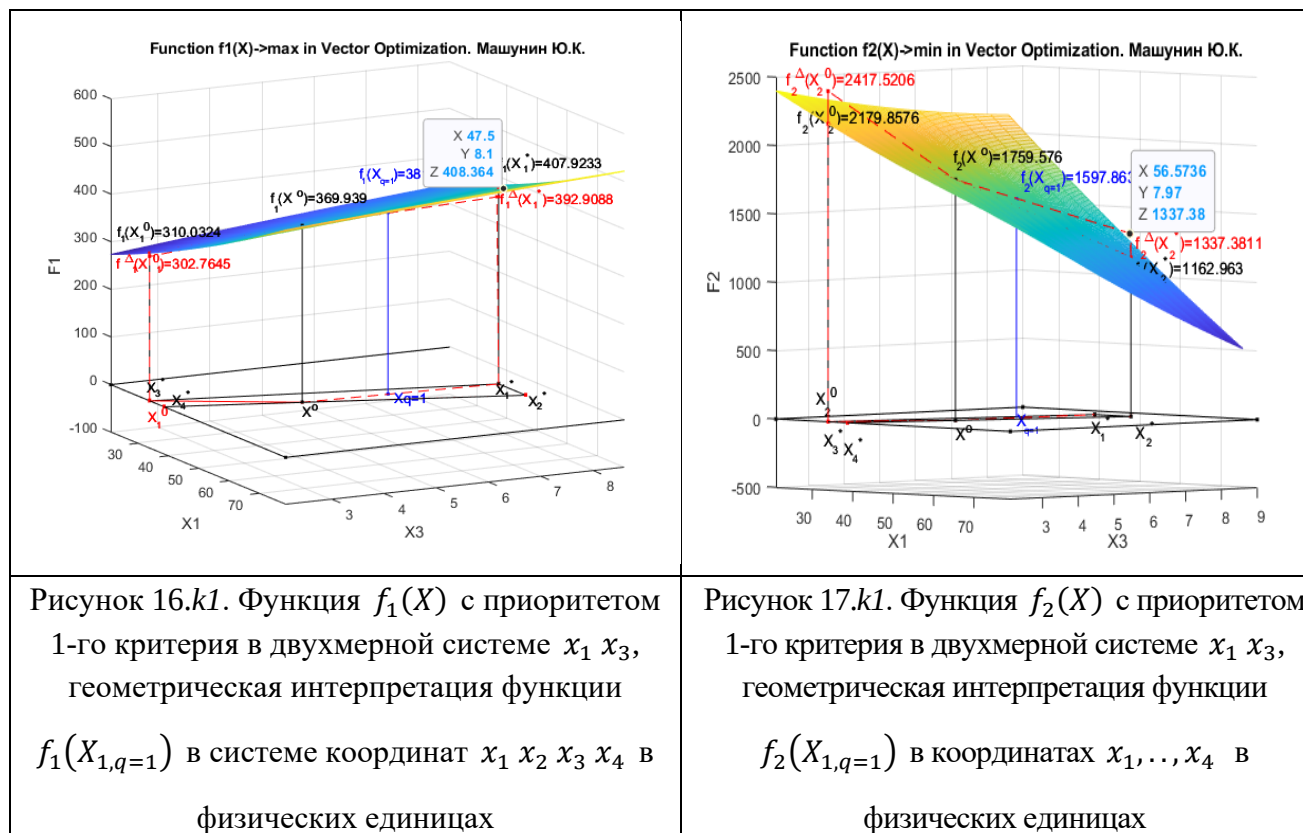
параметры точки оптимума при равнозначных критериях:

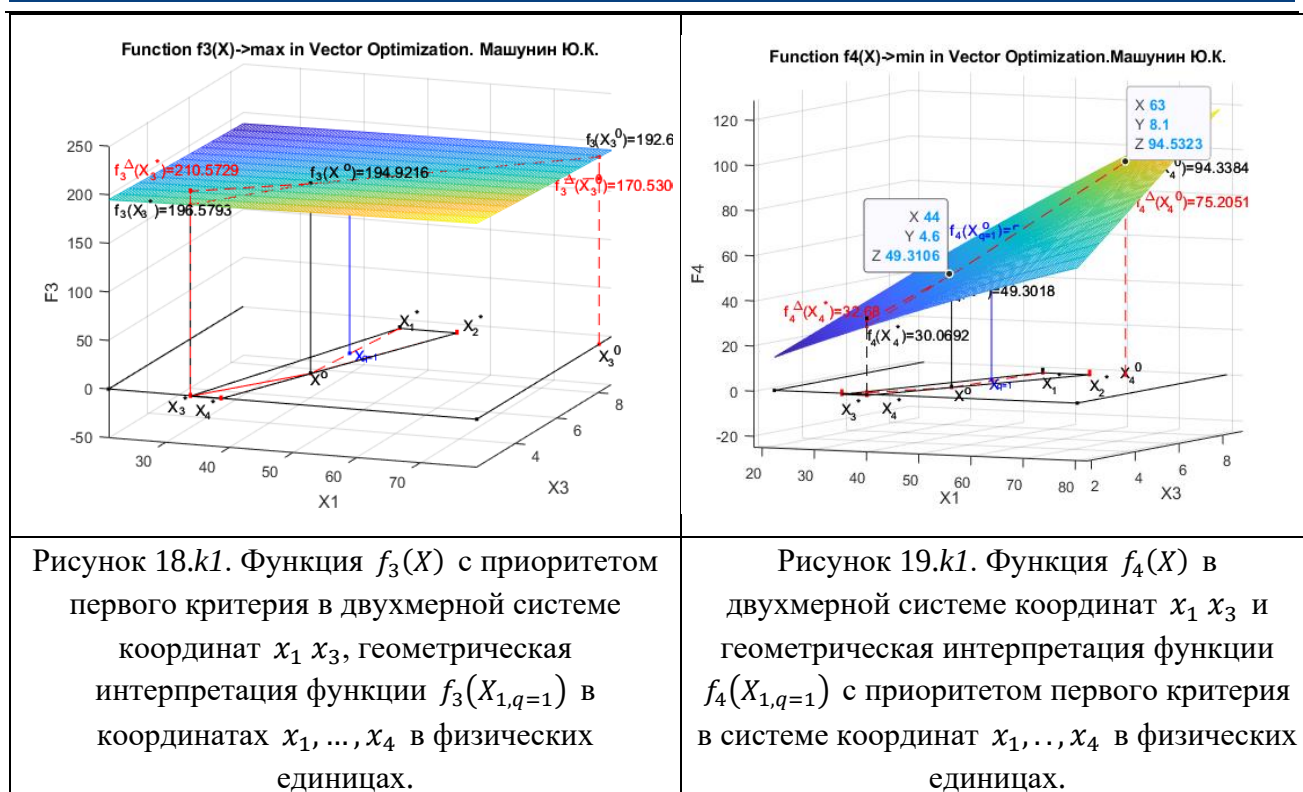
$X^0 = \{X^0, \lambda^0\} = \{x_1 = 45.4458, x_2 = 49.9964, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6091\}$, рассчитанной в двухмерной системе координат x_1, x_3 (см. Рис. 11) и представленной в трехмерной системе координат x_1, x_3 и λ в относительных единицах на рис. 12, 13, 14.

Исследуем и представим параметры последовательно для каждой характеристики структуры материала (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в **физических единицах**.

1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом первого критерия – первой характеристики $f_1(X)$ при проектировании в физических единицах.

На Рис. 16.k1 исследованы: точки оптимума X_1^* , $X_{q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_1(X_1^*)$, $\lambda_1(X_{q=1})$; линейные функции в координатах: λ^0 – $\lambda_1(X_{q=1})$ и λ^0 – $\lambda_1^A(X_1^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.





Первая характеристика технической системы $f_1(X)$:

$$\max f_1(X) \equiv 323.84 - 2.25x_1 - 3.49x_2 + 10.72x_3 + 13.124x_4 + 0.0968x_1x_2 - 0.062x_1x_3 - 0.169x_1x_4 + 0.0743x_2x_3 - 0.1x_2x_4 - 0.0036x_3x_4 + 0.0143x_1^2 + 0.0118x_2^2 - 0.2434x_3^2 - 0.5026x_4^2.$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $f_1(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1 \ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 49.99, x_4 = 2.2\}$ на рис. 16.k1.

При расчете **по четырем переменным** $x_1, \dots, x_4$ координаты точки и функция первого критерия при четырех переменных на **максимум**:

$$X_1^* = \{x_1 = 47.6032, x_2 = 44.1968, x_3 = 8.0, x_4 = 2.2\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -392.9.$$

На рисунке 16.k1 обозначена как $f_1^{\Delta}(X_1^*) = -392.9$;

$X_{1\max} = \{x_1 = 47.6032, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 16.k1 обозначена как X_1^*) при расчете **с двумя переменными** x_1, x_3 и двумя постоянными x_2, x_4 .

В двухмерной системе координат x_1, x_3 величина целевой функции равна $f_1^* = f_1(X_1^*) = 407.92$. (Черный цвет). В системе MATLAB обозначено как $f_1(X_1^*) = 407.92$.

Координаты точки и функция первого критерия на **минимум**:

В точке оптимума в **четырёхмерной** системе координат $X_1^0 = \{x_1 = 33.9, x_2 = 59.0, x_3 = 2.1, x_4 = 7.0\}$ величина целевой функции равна $f_1^0 = f_1(X_1^0) = 302.76$.

В двухмерной системе координат x_1, x_3 величина целевой функции равна $FX_{1\min} = 310.0$. (Черный цвет). Координаты точки $X_{1\min} = \{x_1 = 33.90, x_2 = 49.9964, x_3 = 2.10, x_4 = 2.1\}$, величина целевой функции $FX_{1\min} = 310.0$.

Координаты точки и функция первого критерия **при равнозначных критериях**:



Координаты точки $X^o = \{x_1 = 45.445, x_3 = 4.3578\}$. Величина целевой функции:
 $f_1(X^o) = 369.9$. $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.6091$. Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$: $\lambda_1(X_{q=1}) = \frac{f_1(X_{q=1}) - f_1^o}{f_1^* - f_1^o} = 0.8733$.

В физических единицах величина первого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_1(X_{q=1}) = 381.5$ близка к заданной $f_1(X_{q=1}) = 380$ (Фиолетовый цвет).

Линейная функция, соединяющая точки $f_1(X^o)$ и $f_1^\Delta(X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_1^\Delta(X_1^*) - f_1(X^o) - f_1^\Delta(X_1^o)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – второй характеристики $f_2(X_{2,q=1})$ с приоритетом первого критерия - технической системы при проектировании в физических единицах.

На Рис. 17.k1 исследованы: точки оптимума X_2^* , $X_{2,q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_2(X_2^*)$, $\lambda_2(X_{2,q=1})$, а также функции $\lambda^o \lambda_2(X_{2,q=1}) - \lambda_2^\Delta(X_2^*)$ λ^o в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_2(X_{2,q=1})$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. Вторая характеристика технической системы $f_2(X)$:

$$\min f_2(X) \equiv 795.72 + 23.89x_1 + 30.866x_2 - 25.8586x_3 - 45.0026x_4 - 0.7683x_1x_2 + 0.4703x_1x_3 + 0.7472x_1x_4 - 0.1283x_2x_3 + 0.3266x_2x_4 - 0.0112x_3x_4 + 0.0398x_1^2 + 0.0365x_2^2 + 3.2x_3^2 + 2.6457x_4^2.$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $f_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 49.54, x_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки X^o (3.40) на рис. 17.k1.

Координаты точки и функция второго критерия на **оптимум (минимум)**:

$f_2^* = f_2(X_2^*) = 1337.4$; Параметры: $X_2^* = \{x_1 = 56.60, x_2 = 35.1964, x_3 = 8, x_4 = 2.2\}$ при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_2^\Delta(X_2^*) = 1337.4$.

В системе MATLAB обозначено как $f_2^\Delta(X_2^*) = Z = 1337.38$.

$X_2^* = \{x_1 = 55.6, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 17.k1 обозначена как X_2^*). В двухмерной системе координат x_1, x_3 величина целевой функции равна $f_2^* = f_2(X_2^*) = 1163.0$. (Черный цвет).

Координаты точки **минимума** (Наихудшее решение для критерия на min является максимальным числовым значением) в точке $X_2^o = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_2^o = f_2(X_2^o) = 2179.9$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_2^\Delta(X_2^o) = 2417.5$.

Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции

$f_2(X^o) = 1759.6$. Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ второго критерия: $\lambda_2(X_{q=1}) = \frac{f_2(X_{q=1}) - f_2^o}{f_2^* - f_2^o} = 0.76574$.



В физических единицах величина второго критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_2(X_{2,q=1}) = 1597.9$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_2(X^0)$ и $f_2^\Delta(X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^\Delta(X_2^*) - f_2(X^0) - f_2^\Delta(X_2^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – третьей характеристики $f_3(X_{3,q=1})$ с приоритетом первого критерия - технической системы при проектировании в физических единицах.

На Рис. 18.k1 исследованы: точки оптимума X_3^* , $X_{3,q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_3(X_3^*)$, $\lambda_3(X_{3,q=1})$. Линейные функции $\lambda^0 \lambda_3(X_{3,q=1}) - \lambda_3^\Delta(X_3^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_3(X_{3,q=1})$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. Третья характеристика $f_3(X)$:

$$\max f_3(X) \equiv 110.22 + 0.7918x_1 + 1.73x_2 - 0.3713x_3 - 2.20x_4 - 0.0132x_1x_2 - 0.008x_1x_3 + 0.0193x_1x_4 - 0.0172x_2x_3 + 0.0161x_2x_4 - 0.0006x_3x_4 - 0.0004x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0335x_3^2 + 0.124x_4^2\}.$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $f_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 49.54, x_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки X^0 на рис. 18.k1.

Координаты точки и функция третьего критерия на **максимум**:

$$X_3^* = \{x_1 = 33.90, x_2 = 59.00, x_3 = 2.1, x_4 = 7.0\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -210.57$$

при расчете по четырем переменным. На рис. 18.k1 обозначена как $f_3^\Delta(X_3^*) = -210.57$

$$X_3^* = \{x_1 = 33.9, x_3 = 2.1\} \text{ (на рис. 18.k1 обозначена как } X_3^*).$$

В двухмерной системе координат x_1, x_3 величина целевой функции равна:

$$f_3^* = f_3(X_3^*) = 196.83. \text{ (Черный цвет) Величина целевой функции } f_3^* = 196.83.$$

Координаты точки **минимума** в точке $X_3^0 = \{x_1 = 78.16, x_3 = 8.0\}$

$$\text{величина целевой функции } f_3^0 = f_3(X_3^0) = 192.69.$$

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_3^\Delta(X_3^0) = 170.53$.

Координаты точки и функция третьего критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции:

$$f_3(X^0) = 194.9. \text{ Относительная оценка с приоритетом первого критерия в } X_{3,q=1}$$

третьего критерия: $\lambda_3(X_{3,q=1}) = \frac{f_3(X_{3,q=1}) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} = 0.4868$. Физическая величина $f_3(X_{3,q=1}) = 194.9$.

Линейная функция, соединяющая точки $f_3(X^0)$ и $f_3^\Delta(X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_3^\Delta(X_3^*) - f_3(X^0) - f_3^\Delta(X_3^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_3(X_{3,q=1})$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.



4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – четвертой характеристики $f_4(X_{4,q=1})$ с приоритетом первого критерия технической системы при проектировании в физических единицах.

На Рис. 19.k1 исследованы: точки оптимума X_4^* , $X_{4,q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_4(X_4^*)$, $\lambda_4(X_{4,q=1})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_4(X_{4,q=1}) - \lambda_4^{\Delta}(X_4^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_4(X_{4,q=1})$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. Четвертая характеристика технической системы $f_4(X)$:

$$\max f_4(X) \equiv 21.004 - 0.0097x_1 - 0.841x_2 - 0.4326x_3 + 1.1723x_4 + 0.166x_1x_2 + 0.085x_1x_3 - 0.0001x_1x_4 + 0.0523x_2x_3 + 0.0002x_2x_4 + 0.0006x_3x_4 - 0.0022x_1^2 + 0.0035x_2^2 + 0.006x_3^2 - 0.0311x_4^2\}.$$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_4(X_{4,q=1})$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $x_2 = \{49.54, x_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки X^0 на рис. 19.k1.

Координаты точки и функция четвертого критерия на **максимум**:

$X_4^* = \{x_1 = 38.70, x_2 = 59.00, x_3 = 2.1, x_4 = 2.2\}$, $f_4^* = f_4(X_4^*) = 32.68$ при расчете по четырем переменным. На рис. 19.k1 обозначена как $f_4^{\Delta}(X_4^*) = 32.68$

$X_4^* = \{x_1 = 38.70, x_3 = 2.1\}$. В двухмерной системе координат x_1, x_3 величина целевой функции равна $f_4^* = f_4(X_4^*) = 30.06$. (Черный цвет) Величина целевой функции $f_4^* = 30.06$.

Координаты точки и функция четвертого критерия **минимума**: $X_4^0 = \{x_1 = 63.46, x_3 = 8\}$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_4^0 = f_4^{\Delta}(X_4^*) = -75.205$.

Координаты точки и функция четвертого критерия **при равнозначных критериях**: $X^0 = \{x_1 = 45.4458, x_3 = 4.3578\}$. (рис. 18.k1 обозначена как X^0).

Величина целевой функции $f_4(X^0) = 49.3$.

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ четвертого критерия: $\lambda_4(X_{q=1}) = \frac{f_4(X_{q=1}) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} = 0.38154$. В физических единицах величина четвертого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_4(X_{4,q=1}) = 58.6$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_4(X^0)$ и $f_4^{\Delta}(X_4^*)$, в физических единицах характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_4^{\Delta}(X_4^*) - f_4(X^0) - f_4^{\Delta}(X_4^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

3.3.5. Блок k2. Выбор оптимальных параметров технической системы по второму приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП, в относительных и физических единицах.

В разделе представлено решение векторной задачи - модели сложной *технической системы* при заданном **приоритете второго критерия**. Многомерная математика. Блок k2.



1.k2. В разделе представлены шаг 2, 3, 4 и Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по второму приоритетному критерию в относительных единицах, аналогично схемы блока k1.

Шаг 1. Выполняется аналогично, как для первого критерия

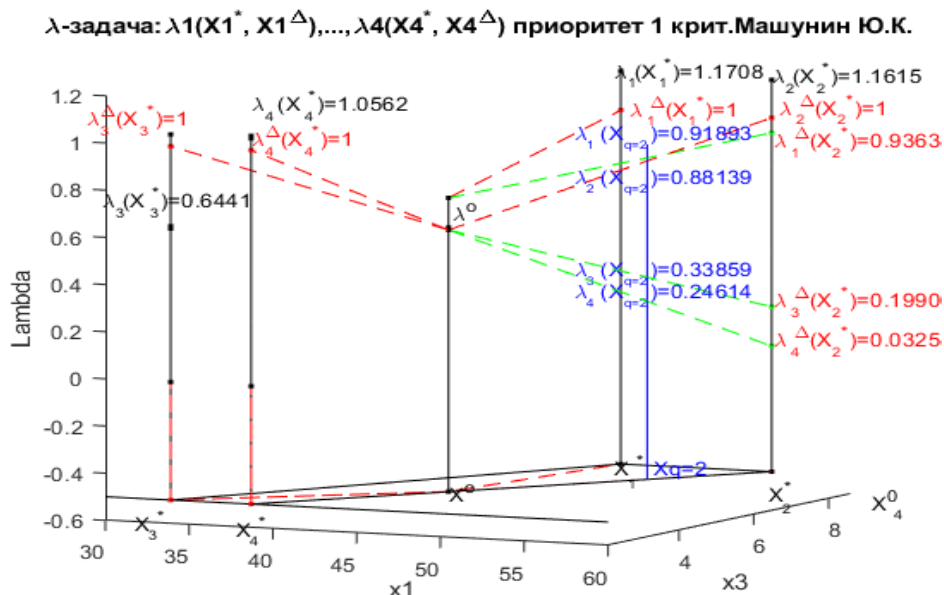


Рисунок 15.k2. λ -задача в системе координат $x_1 x_3 \lambda$. Результаты решения: $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$; относительные оценки четырех критериев с приоритетом второго критерия в точке

$$\text{оптимума } X_{q=2}: \lambda_k(X_{q=2}), k = \overline{1, K}$$

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из пары $\lambda^0 = \lambda_2(X^0) = \lambda_3(X^0) = 0.6091$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Критерий называется «приоритетным критерием», $q = 2 \in K$. Исследуется в связи с критерием $q = 1 \in K$.

Выбор приоритетного критерия: на дисплей выдается общая информация для принятия решений: Критерии в точке оптимума:

$$X^0 = \{x_1 = 45.4458, x_2 = 49.9964, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6091\};$$

$$f_k(X^0) = \{f_1(X^0) = 369.9, f_2(X^0) = 759.6, f_3(X^0) = 194.9, f_4(X^0) = 49.3\}.$$

(3.60)

$$\text{Относительные оценки в } X^0: L_{X^0} = \{0.7452 \quad \lambda_2(X^0) = 0.6091 \quad 0.6091 \quad 0.6091\}. \quad (3.61)$$

Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $K = 4$, показанных на рис. 15.k2. Выдается сообщение на дисплей:

$q = \text{input}(\text{'Введите приоритетный критерий (номер) } q = \text{'})$ – Ввели критерий $q=2$.

Шаг 3. Формируются числовые пределы изменения величины приоритета критерия q :

$$f_q(X^0) = 1759.68 \leq f_q(X) \leq 1337.38 = f_q(X_q^*), q \in K. \quad (3.62)$$



Аналогично, в относительных единицах критерий $q=2$ изменяется в следующих пределах: $\lambda_q(X^0) = 0.6091 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*)$, $q = 2 \in K$. Эти данные анализируются.

Шаг 4. Определяется величина приоритетного критерия $q \in K$. (Decision-making).

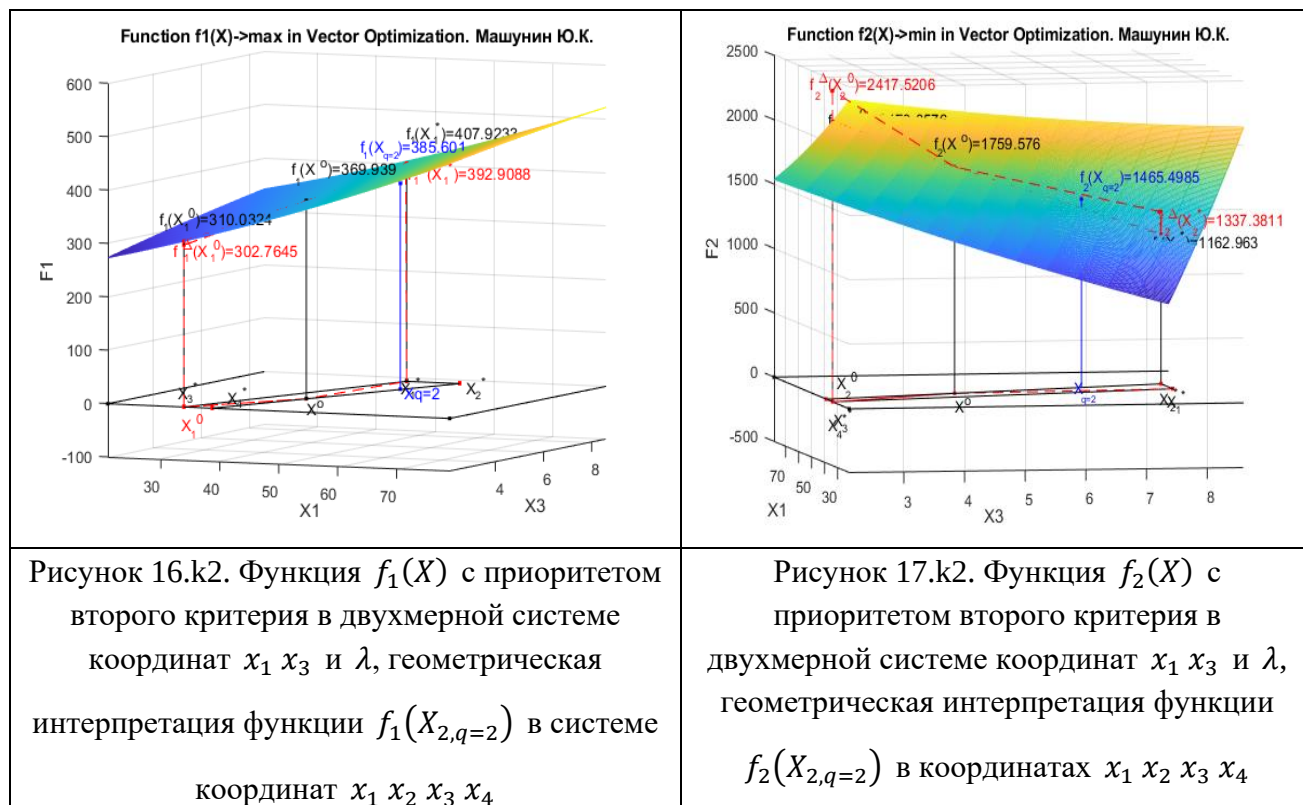
На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия f_q » - вводим, $f_{q=2}=1500$.

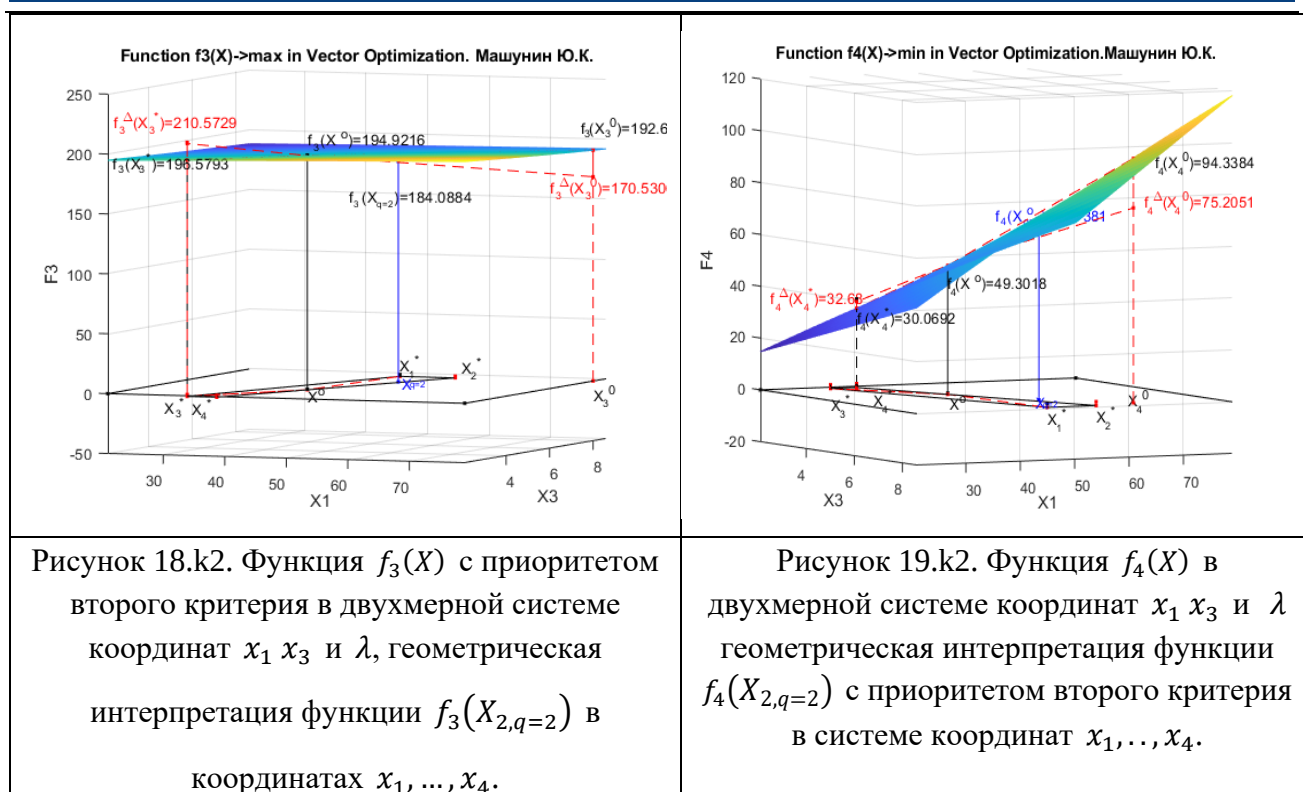
$$f_2(X^0) = -1759.6 \leq f_2(X) = 1500 \leq f_2(X_2^*) = -1337.38$$

Далее выполняются по аналогии с первым критерием: **Шаг 5**, ..., **Шаг 8**.

Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по второму приоритетному критерию в относительных единицах. Аналогично рис. 15.k1, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума X_k^* $\lambda_k(X_k^*)$, $k = \overline{1, K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^A(X_k^*) = 1$, $k = \overline{1, K}$ (красный цвет). Представим их рис. 15.k2.

Аналогично рисункам 16.k1, ..., 19.k1 формируется геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом второго критерия – модели технической системы при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах: **рис. 16.k2**, ..., **19.k2**.





Конец блока 2.

3.3.6. Блок k3. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (технической системы) - функций: $f_1(X), \dots, f_4(X)$ с приоритетом третьего критерия, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП в относительных единицах.

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы при заданном **приоритете третьего критерия** на базе многомерной математики.

Блок k3 выполнен точно по той же схеме, что и блок k1. В разделе представлен шаг 2, 3, 4 и Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по третьему приоритетному критерию в относительных единицах.

Шаг 1. Выполняется аналогично, как для первого критерия.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из пары $\lambda^0 = \lambda_2(X^0) = \lambda_3(X^0) = 0.6091$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in K$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1$.

Выбор приоритетного критерия. На дисплей выдается общая информация для принятия решений. Критерии в точке оптимума X^0 :

$$X^0 = \{x_1 = 45.4458, x_2 = 49.9964, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6091\};$$

$$f_k(X^0) = \{f_1(X^0) = 369.9, f_2(X^0) = 1759.6, f_3(X^0) = 194.9, f_4(X^0) = 49.3\}. \quad (3.63)$$

Относительные оценки в X^0 :



$$LX_0 = \{0.7452 \quad 0.6091 \quad \lambda_2(X^0) = 0.6091 \quad 0.6091\}. \quad (3.64)$$

Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $K = 4$, показанных на рис. 15.k3. Выдается сообщение на дисплей:

$q = \text{input}(\text{'Введите приоритетный критерий (номер) } q = \text{'}) - \text{Ввели критерий } q=3.$

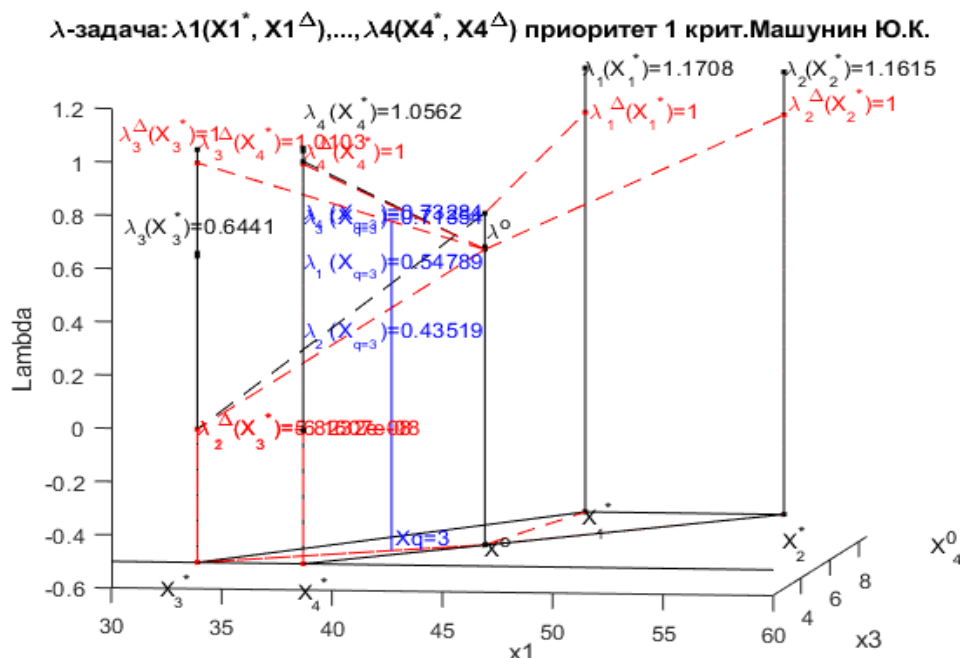


Рисунок 15. k3. λ -задача в системе координат $x_1 \ x_3 \ \lambda$. Результаты решения: $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 3, k = \overline{1, K}$; относительные оценки четырех критериев с приоритетом третьего критерия в точке

$$\text{оптимума } X_{q=3}: \lambda_k(X_{q=3}), k = \overline{1, K}.$$

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 3 \in K$. Для приоритетного критерия $q = 3 \in K$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^0 в точку X_q^* , полученную на первом шаге. Данные о критерии $q=3$ выдаются на экран:

$$f_q(X^0) = 194.2 \leq f_q(X) \leq 210.57 = f_q(X_q^*), q \in K. \quad (3.65)$$

В относительных единицах критерий $q=3$ изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^0) = 0.6091 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in K.$$

Эти данные анализируются.

Шаг 4. Определяется величина приоритетного критерия $q=3 \in K$. (Decision-making). На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия $f_q =$ » - вводим, $f_{q=3} = 200$. Задается числовая величина 3 критерия $f_3(X) = 200$, которая лежит) в пределах:

$$f_3(X^0) = 194.9 \leq f_3(X) = 200 \leq f_3(X_1^*) = -210.57. (\text{Блок 4.k3}). \quad (3.66)$$

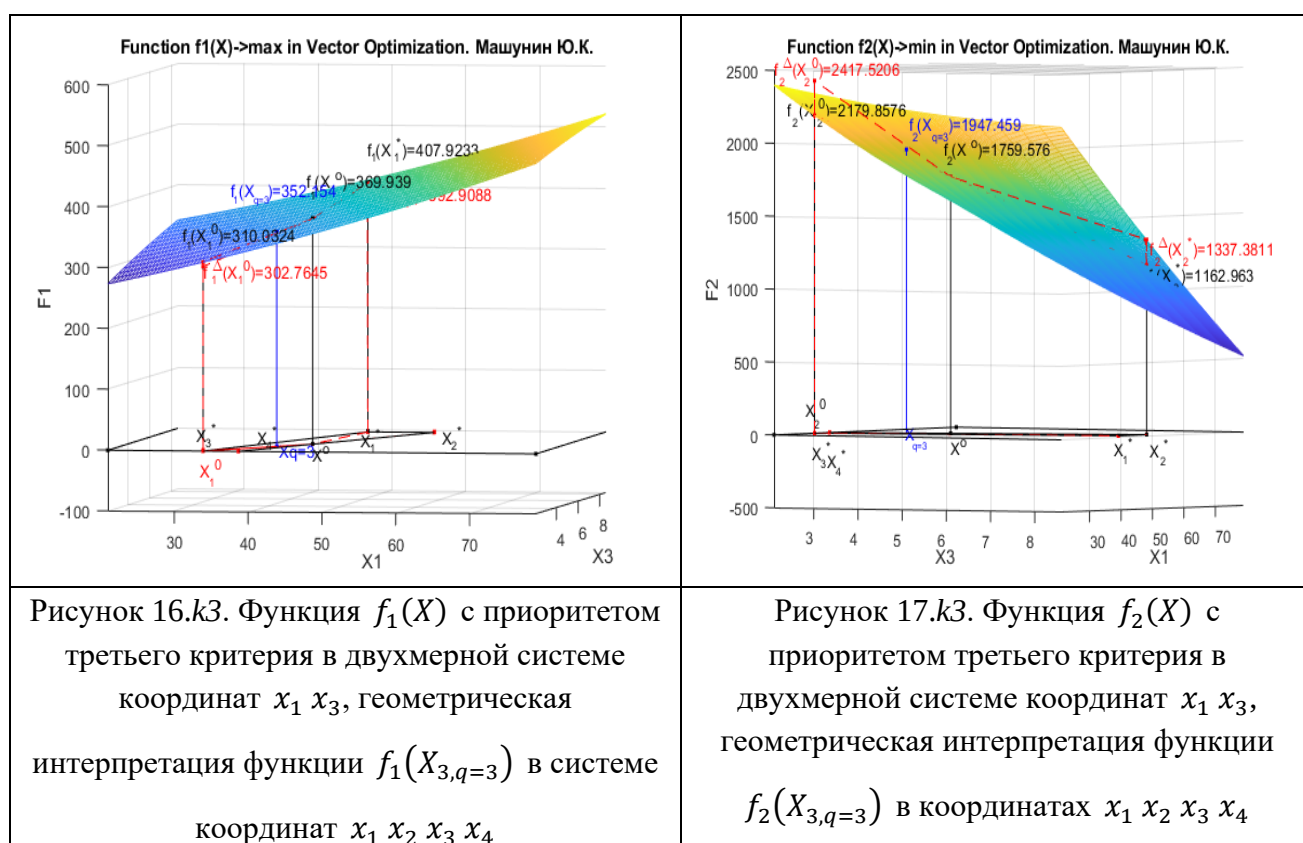


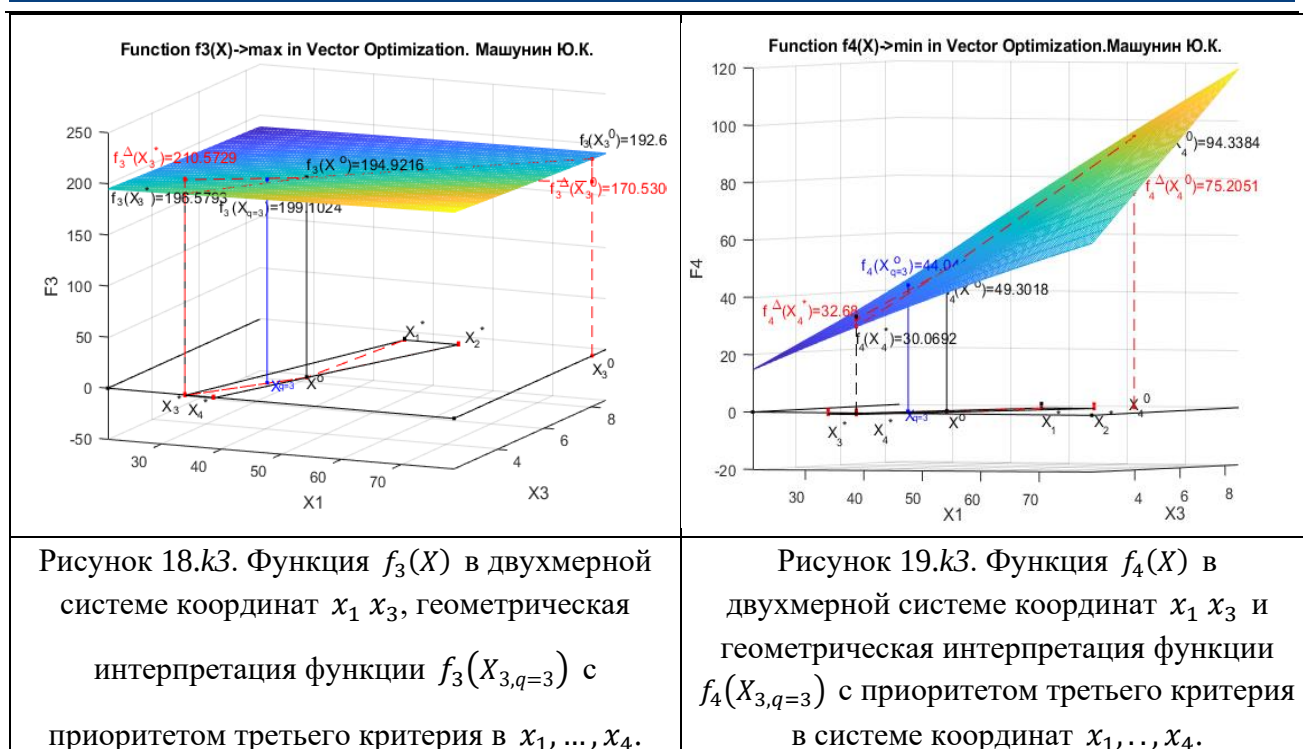
Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров при заданной числовой величине второго приоритетного критерия $f_{q=3}=200$ в **относительных единицах** представлена на рис. 15.k3.

Представлены относительные оценки четырех критериев в точке оптимума X_k^* : $\lambda_k(X_k^*)$, $k = \overline{1, K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1$, $k = \overline{1, K}$ (красный цвет). Результаты решения: относительные оценки четырех критериев с приоритетом третьего критерия в точке оптимума $X_{q=3}$ - $\lambda_k(X_{q=3})$, $k = \overline{1, K}$: $\lambda_1(X_{q=3}) = 0.7398, \dots, \lambda_4(X_{q=2}) = 0.4351$. (Фиолетовый цвет).

Аналогично рис. 16.k1, ..., 19.k1 формируется геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом третьего критерия $f_{q=3}=200$ – модели технической системы при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах:

рис. 16.k3, ..., 19.k3. Конец блока 3.





3.3.7. Блок k4. Выбор оптимальных параметров инженерной системы (техническая система) по четвертому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы (технической системы) при заданном **приоритете четвертого критерия** на базе многомерной математики. Блок k4 выполнен точно по той же схеме, что и Блок k1 В разделе представлен шаг 2, 3, 4 и геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по четвертому приоритетному критерию в относительных единицах.

Шаг 1. Выполняется аналогично, как для первого критерия.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$. Из пары $\lambda^0 = \lambda_2(X^0) = \lambda_3(X^0) = \lambda_4(X^0) = 0.6091$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 4 \in K$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1$.

Выбор приоритетного критерия. На дисплей выдается общая информация для принятия решений. Критерии в точке оптимума X^0 ;

$$X^0 = \{x_1 = 45.4458, x_2 = 49.9964, x_3 = 4.3578, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6091\};$$

$$f_k(X^0) = \{f_1(X^0) = 369.9, f_2(X^0) = 1759.6, f_3(X^0) = 194.9, f_4(X^0) = 49.3\}. \quad (3.67)$$

Относительные оценки в X^0 :

$$LX_0 = \{0.7452 \quad 0.6091 \quad 0.6091 \quad \lambda_4(X^0) = 0.6091\}. \quad (3.68)$$



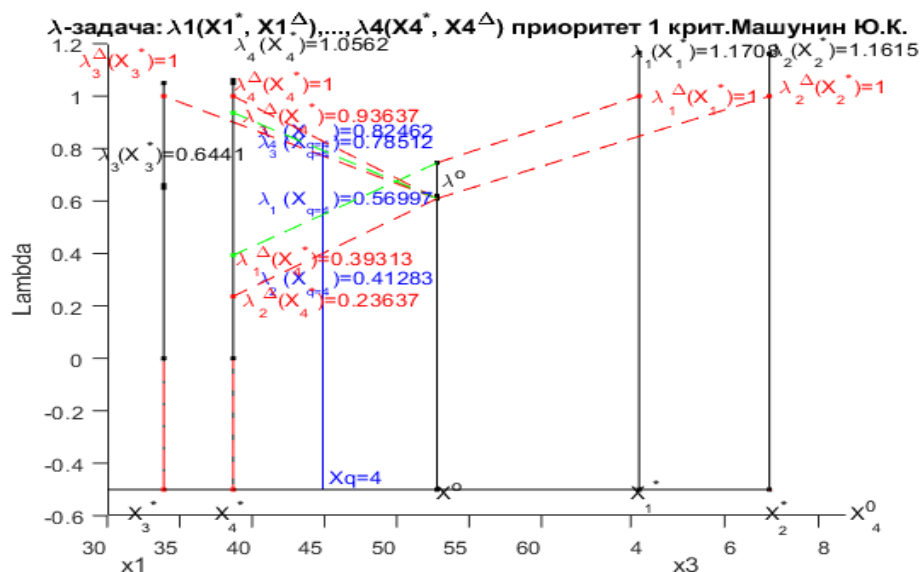


Рисунок 15.k4. λ -задача в системе координат $x_1 \ x_3 \ \lambda$. Результаты решения: $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$; относительные оценки четырех критериев с приоритетом четвертого критерия в точке оптимума $X_{q=4}$: $\lambda_k(X_{q=4}), k = \overline{1, K}$

Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $K = 4$, показанных на рис. 16.k4. Выдается сообщение на дисплей:

`q=input('Введите приоритетный критерий (номер) q= ') – Ввели критерий q=4.`

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 4 \in K$. Для приоритетного критерия $q = 4 \in K$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^0 в точку X_q^* , полученную на первом шаге. Данные о критерии $q=4$ выдаются на экран:

$$f_{q=4}(X^0) = 47.5045 \leq f_{q=4}(X) \leq 32.68 = f_q(X_q^*), q \in K. \quad (3.69)$$

В относительных единицах критерий $q=3$ изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^0) = 0.6091 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 4 \in K. \quad (3.70)$$

Шаг 4. Определяется величина приоритетного критерия $q=4 \in K$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия $f_q=$ » - вводим, например, $f_{q=4}=40$, которая лежит) в пределах:

$$f_4(X^0) = -49.3 \geq f_4(X) = 40 \geq f_4(X_1^*) = -32.68. \text{ (Блок 4.k4).}$$

Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи - функции $f_1(X), \dots, f_4(X)$ выбора оптимальных параметров по четвертому приоритетному критерию в относительных единицах.

Аналогично рис. 15.k1, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума X_k^* $\lambda_k(X_k^*), k = \overline{1, K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$ (красный цвет) и представим их рис. 15.k4.



Аналогично рис. 13.k1,... , 16.k1 формируется геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом четвертого критерия

– модели технической системы при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах. **Рис. 16.k4,..., 19.k4.**

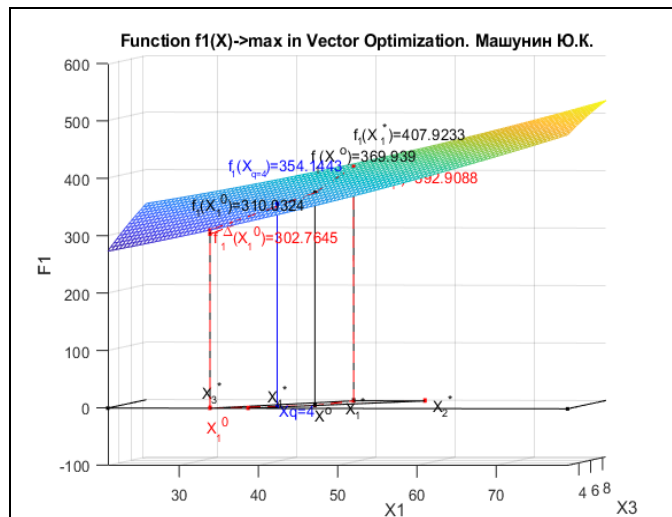


Рисунок 16.k4. Функция $f_1(X)$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат $x_1 x_3$, геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{4,q=4})$ в системе координат $x_1 x_2 x_3 x_4$

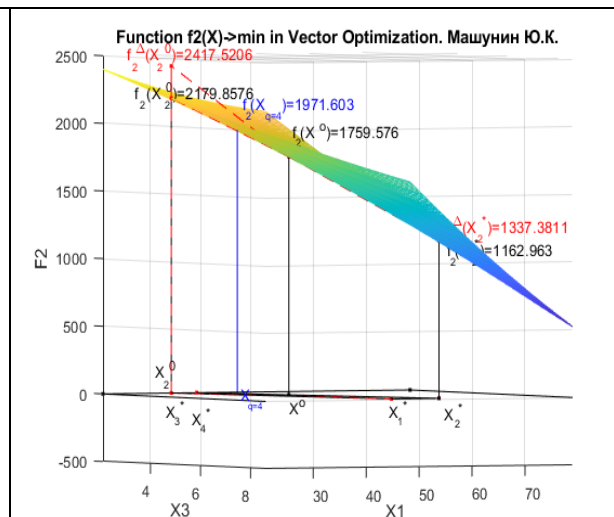


Рисунок 17.k4. Функция $f_2(X)$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат $x_1 x_3$, геометрическая интерпретация функции $f_2(X_{4,q=4})$ в координатах $x_1 x_2 x_3 x_4$

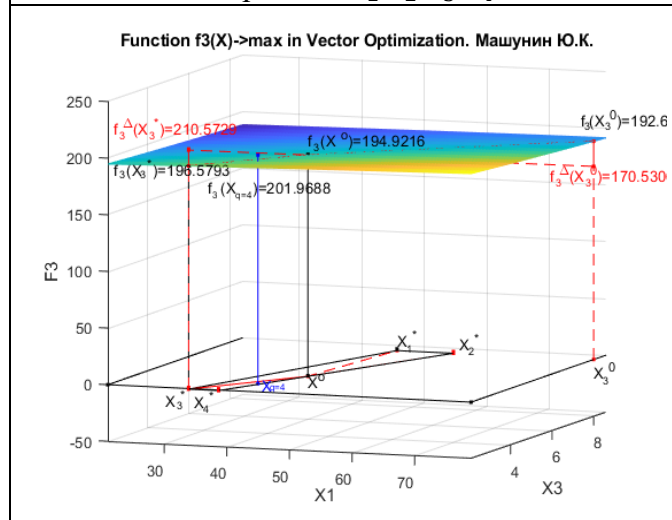


Рисунок 18. k4. Функция $f_3(X)$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат $x_1 x_3$, геометрическая интерпретация функции $f_3(X_{4,q=4})$ в координатах $x_1, \dots, x_4$.

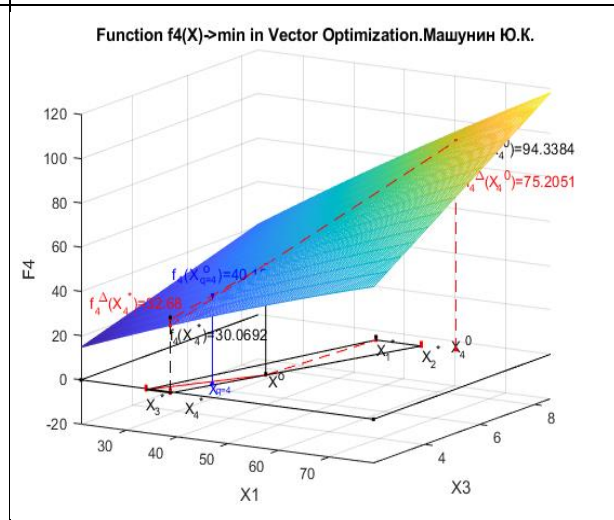


Рисунок 19.k4. Функция $f_4(X)$ в двухмерной системе координат $x_1 x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_4(X_{4,q=4})$ с приоритетом четвертого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.



Конец блока 4.

4. Сравнение прикладных методов многомерной математики с методами искусственного интеллекта.

Оценим прикладные методы многомерной математики – {аксиоматика Машунин Ю.К., принципы оптимальности и методы решения векторных задач математического программирования}, и сравним их с методами искусственного интеллекта.

Используя теорию векторной оптимизации, для инженерной системы (в частности, технологической системы, технической системы) мы получили.

1. Оптимальное решение при равнозначных критериях, которое включает:

Точки оптимума – параметры инженерной системы — $X^o = (x_j^o, j = \overline{1, N})$;

Характеристики (критерии) при равнозначных критериях – $F(X^o) = \{f_k(X^o), k = \overline{1, K}\}$;

Относительные оценки при равнозначных критериях – $\lambda(X^o) = \{\lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}\}$, которые лежат в пределах $\{0 \leq \lambda_k(X^o) \leq 1 (100\%), k = \overline{1, K}\}$, и легко переводится в натуральные (физические) данные.

Может ли эти результаты получить искусственные интеллектуальные системы (ИИС), функционирующий, как правило, по принципу перебора. Ответим: «Нет». Искусственный интеллект может получить только приблизительный результат, который задал человек, но чем этот результат лучше других результатов также должен оценить человек на основе интуиции. При поиске приемлемого решения ИИС должна решить проблемы: сравнения критериев, измеренных в различных единицах, и направления оптимизации (max, min).

2. Оптимальное решение при заданной числовой величине (приоритете) любого критерия (характеристики). Числовая величина критерия формируется на интеллекте конструктора системы. Решение при заданной величине приоритетного критерия (характеристики) включает:

Точки оптимума – параметры инженерной системы – при заданном приоритете **любого** критерия (характеристики): $X^q = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \forall q = \{1, 2, 3, 4\}$.

Формирование главных показателей (характеристик) при заданном приоритете **любого** критерия в точке оптимума X^q : $f_k(X^q) = \{f_1(X^q), f_2(X^q), f_3(X^q), f_4(X^q)\}, \forall k = \overline{1, K}$.

Формирование относительных оценок при заданном приоритете **любого** критерия в точке оптимума X^q : $\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}, \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$:

$$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q), \lambda_2(X^q), \lambda_3(X^q), \lambda_4(X^q), \forall k = \overline{1, K}\}.$$

Может ли эти результаты получить ИИС, функционирующий, как правило, по принципу перебора. Ответим: «Нет». Искусственный интеллект может получить только приблизительный результат, который задал человек, но чем этот результат лучше других результатов также должен оценить человек на основе интуиции.

Таким образом, разработанная теория многомерной математики может являться математическим аппаратом вычислительного процесса искусственного интеллекта.



5. Заключение

Проблема разработки математических методов многомерной математики и принятия оптимального решения на их основе в сложной инженерной системе по некоторому набору функциональных характеристик и экспериментальных данных является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования инженерно-технических систем.

В работе представлена теория, методы многомерной математики в системе принятия оптимальных решений в задачах, возникающих при исследовании, проектировании и выборе параметров в многопараметрических и многофункциональных инженерных системах, к которым относятся технические системы, технологические процессы, материалы. На базе многомерной математики в работе разработана и представлена методология автоматизации проектирования путем: построения математической модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности. Представлено построение математической и численной модели выбора оптимальных параметров сложной инженерной системы на примере технологической и технической системы с четырьмя параметрами и четырьмя характеристиками. Моделирование и выбор оптимальных параметров инженерных систем реализованы в две стадии. *Первая стадия* работы направлена на решение выбора оптимальных параметров инженерной системы в условиях определенности и неопределенности при равнозначных критериях. *Вторая стадия* работы направлена на решение выбора оптимальных параметров инженерной системы в условиях неопределенности, при этом использованы интеллектуальные знания конструктора системы.

Решена задача и показана геометрическая интерпретация результатов решения N -мерной инженерной системы параметров в двухмерную систему параметров.

Список литературы:

1. Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.
 2. Математическая энциклопедия. Редакционная коллегия: И.М. Виноградов и другие. - М.: «Советская энциклопедия», 1977. – 1152 с.
 3. Carlin S. Mathematical methods in a game theory, programming and economy. - М.: World, 1964, p. 837.
 4. Zak Yu. A. Multistage decision-making processes in the problem of vector optimization // A.iT. 1976. No. 6, pp. 41-45.
 5. Mikhailevich V. S., Volkovich V. L. Computational methods of research and design of complex systems. М.: Science, 1979, p. 319.
 6. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. М.: Наука, 1986. 141.
 7. Машунин Ю. К. , Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем: монография. - Владивосток: ДВГАЭУ, 1996. 131 с.
 8. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93.
- Yu. K. Mashunin, "Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector_optimization methods," Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus)



9. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.
Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Descision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)
10. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономических системах. – М.: Логос. 2013. 448 с. (Новая университетская библиотека)
11. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(9): September, 2014. P. 84-96 .
12. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(10): October, 2014. P. 224-240.
13. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.
14. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.
15. Yu. K. Mashunin, "Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data." *American Journal of Modeling and Optimization*, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.
16. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.
17. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation Technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.
18. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg, Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)
19. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg, Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)
20. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. <https://rdcu.be/bhZ8i> (Scopus)
21. Mashunin Yu.K. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization," Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. <https://doi.org/10.3390/asi2040032>
22. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7



23. Торгашов А.Ю., Кривошеев В.П., Машунин Ю.К., Холланд Ч.Д. Расчет и многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения // Изв. ВУЗов. Нефть и газ, 2001, №3, с. 82-86.
24. Кетков Ю. Л., Кетков А.Ю., Шульц М. М. МАТЛАБ 6.x.: программирование численных методов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. - 672 с.
25. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Шахнова. - М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
26. Jahn Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 2010. 460 p.
27. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. London. New York. 2010. 550 p.
28. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg . 2009. 197 p.
29. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.
30. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development and evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.
31. Walras L. 1874. Elements of Pure Economics, or the theory of social wealth, Lausanne.
32. Samuelson P. 1964. Economics. Part 1. -M: Progress.
33. Marshall A. 1993. Principles of economic science. Tom 2. -M: Progress, 145 p.
34. Coase, Ronald. The Institutional Structure of Production // The American Economic Review, vol.82, n°4, pp. 713-719, 1992. (Nobel Prize lecture) Gilbert, J., 1976. Economic theory and goals of the society. - M: Progress. - 230 p.
35. Saimone, G., 1995. Theory of decision making in economic theory and the behavioral Sciences. // In the book: The theory of the firm. St. Petersburg.
36. Seo, K.K., 2000. Managerial Economics: Text, Problems, and Short cases. Per. from English. - M: INFA-M. - 671 p.
37. Khan K. 2004. Controlling. - M: INFA-M. - 671 p.
38. Fayol A. (1992). General and industrial management. - M: Controlling.
39. Mashunin Yu. K., 2010. Theory and modeling of the market on the basis of vector optimization. - M: University book. - 352 p.
40. Mashunin, Yu. K., Mashunin, K., Yu. Numerical realization of innovative development of the industrial enterprise//Global challenges in economy and development of the industry (INDUSTRY-2016): proceedings of scientific – practical Konf. with foreign participation on March 21-23 2016/under the editorship of the Dr. of economic Sciences, prof. A. V. Babkin. – SPb.: Publishing house Politekhn. University, 2016. 455-484. (rus.).
41. Mashunin, Yu. K., 2016. Modeling and software implementation of innovative development of the industrial enterprise. St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, no. 3(245), pp. 78-92. (rus)



42. Mashunin, Yu. K., Mashunin, K., Yu., 2017. Analysis of the organization of control, optimization and practice of innovative development of the industrial cluster, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 10(4), 187-197. DOI: 10.18721/JE. 10418
43. Mashunin, Yu. K., 2017. Management of the region economy. M: RuSCience. - 344. (rus) ISBN 978-5-4365-1984-5
44. Mashunin Yu. K., K. Yu. Mashunin, Strategic and Innovative Development of the Cluster based on the digital economy, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 11 (4) (2018) 85—99. DOI: 10.18721/JE.11406
45. Mashunin Yu. K., 2019. Theory of management and the practice of making managerial decisions: textbook. - Moscow: RuSCience. – 494 p. (rus) ISBN 978-5-4365-3088-8
46. Машунин Ю.К. Выбор оптимальных параметров сложных технических систем на базе многомерной математики // Математические методы в технологиях и технике. 2024. №12-2. С. 46-58.
47. Yu. K. Mashunin, “Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data”. American Journal of Modeling and Optimization, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.
48. Машунин Ю.К. Оптимальный выбор параметров материала сложной структуры по множеству критериев // Математические методы в технологиях и технике. 2023. № 9. С. 25-35. DOI 10.52348/2712-8873_MMTT_2023_9_25
49. Mashunin Yu.K. Modeling, simulation, making optimal decision in engineering and production systems based on vector optimization: monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow : RuScience, 2024. – 368 с. ISBN 978-5-466-08001-8.

