DOI 10.37539/2949-1991.2023.10.10.019

**Малёв Николай Анатольевич,**
к.т.н., доцент кафедры «Приборостроение и мехатроника»
ФГБОУ ВО «КГЭУ», г. Казань

**Борисова Арина Дмитриевна,**
магистрант кафедры «Приборостроение и мехатроника»
ФГБОУ ВО «КГЭУ», г. Казань

# СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ПО ЧЕБЫШЁВУ ЦИФРОВОГО КИХ-ФИЛЬТРА НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА ПАРКСА-МАККЛЕЛЛАНА

**Аннотация:** В работе рассматривается теоретическая постановка метода синтеза оптимальных по Чебышёву цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой на основе алгоритма Паркса-Макклеллана. Показана процедура вычисления коэффициентов фильтра, минимизирующих максимум ошибки аппроксимации. Приведен пример синтеза полосового фильтра в соответствии с заданной спецификацией.

**Ключевые слова:** алгоритм, цифровой фильтр, КИХ-фильтр, аппроксимация, синтез.

При синтезе корректирующих фильтров в системах цифровой обработки сигналов зачастую возникают ошибки аппроксимации, когда разница между идеальной и реальной частотными характеристиками фильтра распределена неравномерно по различным полосам частот и пульсации амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) фильтра возрастают на границах соответствующих полос [1]. Одним из способов устранения данного недостатка является применение метода синтеза оптимальных по Чебышёву цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтров), позволяющего минимизировать максимальную ошибку аппроксимации [2]. Подобные фильтры носят название фильтров с равномерными пульсациями, обеспечивая равномерное распределение пульсаций АЧХ (ошибки аппроксимации) по полосам частот.

В работе рассматривается алгоритм Паркса-Макклеллана, использующий полиномиальную интерполяцию при нахождении оптимального решения задачи синтеза цифрового КИХ-фильтра с равномерными пульсациями [3, 4].

Рассмотрим КИХ-фильтр чётного порядка $N$ с симметричной импульсной характеристикой $h(n)$ и центром симметрии импульсной характеристики в точке $\alpha = N/2$. Частотная характеристика такого фильтра

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\frac{N\omega}{2}} \sum_{k=0}^{N/2} a(k)\cos(k\omega),$$

где $$a(k) = 2h\left(\frac{N}{2} - k\right),\ k = 1, 2, \ldots, \frac{N}{2},\ a(0) = h\left(\frac{N}{2}\right).$$

Амплитудная характеристика данного фильтра

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^{N/2} a(k)\cos(k\omega) = Q(\omega)P(\omega), \tag{1}$$

причем $Q(\omega) = 1$.

Кроме амплитудной характеристики реального фильтра $A(\omega)$ введем амплитудную характеристику идеального фильтра $A_И(\omega)$ и весовую функцию $w(\omega)$, отвечающую за относительное значение ошибки аппроксимации синтезируемого фильтра. Амплитудная характеристика идеального фильтра равна единице в полосе пропускания и нулю в полосе задержки. Функция веса описывается соотношением

$$w(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\delta_з}{\delta_П}, \text{ для полосы пропускания,}\\ 1, \text{ для полосы задержки,}\end{cases} \tag{2}$$

где $\delta_П$ – отклонение АЧХ от единицы в полосе пропускания; $\delta_з$ – отклонение АЧХ от нуля в полосе задержки.

Взвешенная ошибка аппроксимации с учётом выражения (1)

$$\mathrm{E}(\omega)=w(\omega)\left[A_И(\omega)-A(\omega)\right]=w(\omega)\left[A_И(\omega)-P(\omega)\right].$$

Таким образом, процедура синтеза цифрового фильтра состоит в определении коэффициентов $a(k)$, минимизирующих максимум ошибки аппроксимации:

$$\min_{\alpha(k)}\left[\max_{\omega\in S}\left|\mathrm{E}(\omega)\right|\right]=\min_{\alpha(k)}\left\{\max_{\omega\in S}\left|w(\omega)\left[A_И(\omega)-\sum_{k=0}^{L=N/2}a(k)\cos(k\omega)\right]\right|\right\}. \tag{3}$$

Здесь *S* – совокупность интервалов аппроксимации

Для заданного типа фильтра с полосой пропускания $0\le\omega\le\omega_П$ и полосой задержки $\omega_з\le\omega\le\pi$ амплитудная характеристика

$$A(\omega)=\sum_{k=0}^{L}\alpha(k)\cos(k\omega)=\sum_{k=0}^{L}\alpha(k)\left[\sum_{n=0}^{k}\beta_{nk}\left(\cos(k\omega)\right)^n\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{L}\tilde{\alpha}(k)\left(\cos(\omega)\right)^k$$

имеет не более *L* – 1 локальных экстремумов на интервале $0\le\omega\le\pi$, причем частоты $\omega=0$ и $\omega=\pi$ являются экстремумами как амплитудной характеристики, так и ошибки аппроксимации $\mathrm{E}(\omega)$. Кроме того, граничные частоты $\omega_з$ и $\omega_П$ также являются экстремумами функции $\mathrm{E}(\omega)$. Таким образом, должно существовать *L* + 3 экстремальных частот функции ошибки аппроксимации для получения оптимального по Чебышёву цифрового фильтра. Для подобных фильтров Паркс и Макклеллан ввели наименование фильтра с дополнительной пульсацией.

Следует отметить, что, согласно теореме чередований [3, 4], единственная и наилучшая аппроксимация для идеальной амплитудной характеристики фильтра $A_И(\omega)$ имеет *L* + 2 экстремальных частот на совокупности интервалов аппроксимаций. Для множества экстремальных частот $\omega_i$ (минимально *L* + 2) справедливо выражение

$$w(\omega_i)\left[A_И(\omega_i)-P(\omega_i)\right]=(-1)^i\delta,\ i=0,1,\ldots,L+1, \tag{4}$$

где $\delta$ – максимальное значение ошибки аппроксимации. При выполнении условия (1) $\delta = \delta_3$.

Перепишем множество уравнений (4) как

$$P(\omega_i) + \frac{(-1)^i \delta}{w(\omega_i)} = \sum_{k=0}^{L} \alpha(k)\cos(k\omega) + \frac{(-1)^i \delta}{w(\omega_i)} = A_{и}(\omega_i),\ i = 0,1,\ldots,L+1.$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов фильтра $a(k)$ и максимального значения ошибки аппроксимации $\delta$ последнее выражение удобно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_0) & \cdots & \cos(L\omega_0) & \frac{1}{w(\omega_0)} \\ 1 & \cos(\omega_1) & \cdots & \cos(L\omega_1) & \frac{1}{w(\omega_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega_{L+1}) & \cdots & \cos(L\omega_{L+1}) & \frac{1}{w(\omega_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(L) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{и}(\omega_0) \\ A_{и}(\omega_1) \\ \vdots \\ A_{и}(\omega_{L+1}) \end{bmatrix}.$$

Рассматриваемый алгоритм Паркса-Макклеллана представляет собой итерационную процедуру, этапы которой состоят в следующем.

1. Приближенная оценка $L$ + 2 экстремальных частот на совокупности интервалов аппроксимаций.
2. Вычисление максимального значения ошибки аппроксимации $\delta$ по формуле

$$\delta = \frac{\sum\limits_{k=0}^{L+1} \gamma(k) A_{и}(\omega_k)}{\sum\limits_{k=0}^{L+1} \frac{(-1)^k \gamma(k)}{w(\omega_k)}},\ \gamma(k) = \prod_{n=0,\ n\neq k}^{L+1} \frac{1}{\cos(\omega_k) - \cos(\omega_n)}.$$

3. Вычисление взвешенной ошибки аппроксимации по формуле $\mathrm{E}(\omega) = w(\omega)\left[A_{и}(\omega) - P(\omega)\right]$ с применением интерполяции Лагранжа для функции

$$P(\omega) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{L} P(\omega_i)\left[\beta(i)/(x - x_i)\right]}{\sum\limits_{i=0}^{L} \left[\beta(i)/(x - x_i)\right]},$$

где $P(\omega_i) = A_{и}(\omega_i) - \frac{(-1)^i \delta}{w(\omega_i)},\ i = 0,1,\ldots,L+1;\qquad x = \cos(\omega),\ x_i = \cos(\omega_i);$

$$\gamma(k) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{L} \frac{1}{x_k - x_i}.$$

4. Вычисления продолжаются до тех пор, пока не будет выполняться условие $\left|E(\omega)\right| \le \delta$ для всех точек на сетке частот. Выполнение же данного условия свидетельствует о нахождении частотной характеристики $H\left(e^{j\omega}\right)$ оптимального по Чебышёву цифрового фильтра.

Следует отметить, что процедура синтеза цифровых КИХ-фильтров с помощью приведенного выше алгоритма может быть автоматизирована путем использования программной среды *MatLab*. Для этого следует использовать одну из следующих функций: *remez*, *firpm* или *firpmord*.

Функция *remez* позволяет получить структуру оптимального по Чебышёву КИХ-фильтра, однако применяется в устаревших версиях программной среды *MatLab* и в будущем может быть удалена.

Функция *firpm* реализует алгоритм Паркса-Макклеллана для синтеза цифровых КИХ-фильтров (FIR в английской транскрипции), обеспечивая его оптимальную структуру.

Программный код

```
b = firpm(n,f,a)
```

возвращает вектор-строку *b*, содержащий *n*+1 коэффициентов КИХ-фильтра *n*-го порядка. Частотные и амплитудные характеристики полученного фильтра совпадают с заданными векторами *f* и *a*. Здесь *f* – вектор попарно расположенных границ частотного диапазона в порядке возрастания от 0 до 1, причем 1 соответствует частоте Найквиста (половине частоты дискретизации); *a* – вещественный вектор того же размера, что и *f*, задающий желаемую амплитуду частотной характеристики результирующего фильтра *b*.

С помощью алгоритма Паркса-Макклеллана синтезируем полосовой КИХ-фильтр 23-го порядка. Зададим нормированные частоты полосы задержки 0,3π и 0,7π рад/сэмпл и нормированные частоты полосы пропускания 0,4π и 0,6π рад/сэмпл и получим графики идеальной и реальной амплитудных характеристик.

```
f = [0 0.2 0.3 0.4 0.6 0.7 0.8 1];
a = [0 0 0 1 1 0 0 0];
b = firpm(23,f,a);
[h,w] = freqz(b,1,512);
plot(f,a,w/pi,abs(h))
legend('Ideal','firpm Design')
xlabel 'Radian Frequency (\omega/\pi)', ylabel 'Magnitude'
```

Соответствующие характеристики показаны на рисунке 1.

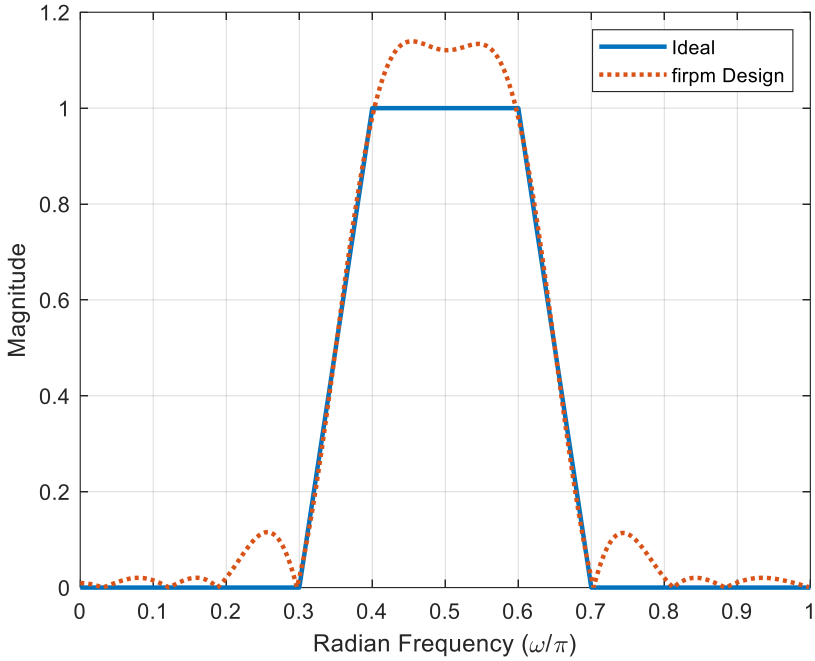


Рисунок 1 - Амплитудные характеристики полосовых фильтров: ideal – идеального; firpm Design – синтезированного с применением алгоритма Паркса-Макклеллана

Функция *firpmord* также реализует алгоритм Паркса-Макклеллана для синтеза цифровых КИХ-фильтров, оптимальных по Чебышёву, обеспечивая выполнение условия (3) при наилучшем порядке фильтра *N*.

Таким образом, рассмотренный в работе алгоритм синтеза цифровых КИХ-фильтров представляет собой сравнительно простую процедуру определения искомых коэффициентов $a(k)$. В большинстве случаев алгоритм Паркса-Макклеллана дает приемлемые амплитудные характеристики цифрового фильтра при разумном порядке фильтра *N*, для чего целесообразно использовать функцию *firpmord*. Следует отметить, что окончательным этапом синтеза цифрового фильтра является его программная реализация и проверка функционирования в реальной системе цифровой обработки сигналов.

*Список литературы:*

1. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов. Практиче-ский подход. / М., "Вильямс", 2004, 992 с.
2. Rabiner Lawrence R., James H. McClellan and Thomas W. Parks. "FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation." Proceedings of the IEEE®. Vol. 63, Number 4, 1975, pp. 595–610.
3. Малочкин Я. А. Особенности синтеза КИХ-фильтра методом наилучшей равномерной аппроксимации Чебышёва // Тинчуринские чтения: Материалы XIV международной молодежной научной конференции. Том 3. – Казань: КГЭУ, 2019. – С. 140-143.
4. Малёв Н. А., Малочкин Я. А. Синтез дискретного КИХ-фильтра методом Паркса-Макклеллана программными средствами MATLAB fdatool // Приборостроение и автоматизированный электропривод в топливно-энергетическом комплексе и жилищно-коммунальном хозяйстве: Материалы IV Национальной научно-практической конференции. Том 1. – Казань: КГЭУ, 2018. – С. 172-177.