DOI 10.37539/2949-1991.2023.4.4.038

Нужнов Юрий Васильевич,
Доктор физико-математических наук
Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, г. Алматы

К ТЕОРИИ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. ЗАКОН КОЛМОГОРОВА “ДВУХ ТРЕТЕЙ” В СВЕТЕ ЗАМЕЧАНИЯ ЛАНДАУ

Аннотация: Представлен математический аппарат теории автономного статистического моделирования мелкомасштабной структуры развитых турбулентных течений, неоднородность которой обусловлена эффектами внутренней перемежаемости. Результаты верификации теории, выполненной в свете «казанского» замечания Ландау на примере закона Колмогорова «двух третей», показали ее хорошее соответствие известным опытным данным.

Ключевые слова: теория, мелкомасштабная турбулентность, закон Колмогорова, перемежаемость.

Введение

Как известно, теория мелкомасштабной турбулентности А.Н. Колмогорова [1, 2] содержит проблемы, связанные с ее *физической основой*, а именно – с принятием постулата о локальной изотропии мелкомасштабных флуктуаций скорости. Результатом такого постулата стали неувязки с экспериментальными данными, согласно которым мелкомасштабная структура развитых турбулентных течений в общем не является локально однородной, [3, 4]. Главным образом такие неувязки относятся к коэффициентам пропорциональности структурных функций, теоретические значения которых считаются универсальными, тогда как на практике наблюдается их значительный «разброс». Причиной указанных неувязок является то, что феноменология мелкомасштабной локально однородной, изотропной и статистически стационарной турбулентности Колмогорова (короче – локально изотропной [5]) не была увязана с эффектами перемежаемости, [6, 7, 8].

Впервые на значимость таких эффектов указал Л.Д. Ландау, которое известно теперь как «казанское замечание Ландау» [7, 9]. Суть этого замечания в настоящее время сводится к тому, что в результате перемежаемости различных диссипативных полей внутри турбулентной жидкости (это явление было обнаружено Бэтчелором и Таунсендом [10] и названо «внутренней» перемежаемостью) мелкомасштабная структура развитых турбулентных течений «становится» локально неоднородной, а коэффициенты структурных функций Колмогорова, – не универсальными. В то же время многочисленные опытные данные свидетельствуют о хорошем соответствии закона Колмогорова двух третей с универсальным постоянным значением «коэффициента Колмогорова». Однако такое «универсальное постоянное» значение коэффициента Колмогорова противоречит замечанию Ландау. Наша задача – вскрыть такое противоречие на примере закона Колмогорова двух третей.

В работе [11] наряду с понятием «турбулентной жидкости» было введено понятие «диссипативной жидкости». Отличительной особенностью этой жидкости является то, что в соответствии с данными [10] внутри этой жидкости реализуется феноменология мелкомасштабной турбулентности Колмогорова. Такой подход позволил учесть не только явление «внешней» перемежаемости крупномасштабных (энергосодержащих) флуктуаций турбулентной жидкости, но и явление «внутренней» перемежаемости мелкомасштабных (диссипативных) флуктуаций диссипативной жидкости. В результате была получена функциональная зависимость коэффициентов структурных функций от величины коэффициента перемежаемости диссипативной жидкости.

Цель данной статьи – представить результаты верификации теории *ASMTurbS* (как математического аппарата автономного статистического моделирования неоднородной мелкомасштабной структуры развитых турбулентных течений) в свете «казанского» замечания Ландау на примере закона Колмогорова двух третей.

Математический аппарат теории

Согласно замечанию Ландау, в развитом турбулентном потоке мгновенная величина ${v_r}^n \sim \varepsilon^{n/3} r^{n/3}$ и, поэтому, ее статистическое среднее $\langle {v_r}^n \rangle \sim \langle \varepsilon^{n/3} \rangle r^{n/3}$, [6]. При этом продольные структурные функции *n-ого* порядка

$$S^{(n)}(r) = \langle {v_r}^n \rangle \sim \langle \varepsilon^{n/3} \rangle r^{n/3} \tag{1}$$

Отсюда следует, что $\langle \varepsilon^{n/3} \rangle = \langle (\langle \varepsilon \rangle + \varepsilon')^{n/3} \rangle$, т.е. в отличие от *K41* [1] влияние флуктуаций диссипации на структурные функции высокого порядка должно учитываться. Однако при вычислении $\langle \varepsilon^{n/3} \rangle$ в (1) возникает проблема, – процесс вязкой диссипации происходит в «узких» областях, их объём при $Re \to \infty$ стремится к нулю [6] и, следовательно, предельные значения $\langle \varepsilon^{n/3} \rangle$ нельзя найти (вычислить или измерить для $n \neq 3$); в то же время статистическое среднее $\langle \varepsilon \rangle$ не зависит от Re [6, 7] и, поэтому, значения $\langle \varepsilon \rangle^{n/3}$ могут быть найдены. Для решения этой проблемы Колмогоров предложил уточненный вариант теории *K41* [1], известный теперь как теория *K62* [2], основанный на преобразовании

$$\langle {\varepsilon_l}^{n/3} \rangle \to \langle \varepsilon \rangle^{n/3} F(L/l) \tag{2}$$

где $\varepsilon_l = \varepsilon_l(\boldsymbol{x}, t)$ – величина диссипации, полученная в результате «частичного» усреднения Обухова по малому сферическому объему с радиусом l, [12]. Согласно понятию диссипативной жидкости [11], введенному в теорию автономного статистического моделирования мелкомасштабной структуры (далее для краткости – теория *ASMTubS*), а также принятым в [11] гипотезам, условные структурные функции *n-ого* порядка в диссипативной жидкости

$$S_d^{(n)}(r) = \langle {v_r}^n \rangle_d \sim \langle {\varepsilon_l}^{n/3} \rangle_d r^{n/3} \tag{3}$$

где преобразование $\langle {\varepsilon_l}^{n/3} \rangle_d \propto \langle \varepsilon_l \rangle_d^{n/3} \cong \langle \varepsilon \rangle_d^{n/3}$ может быть выполнено по аналогии с логнормальной моделью замыкания *K62*, а именно с помощью функции плотности распределения вероятностей $P_d(\varepsilon_l) = P_d(\varepsilon_l\colon\ (\boldsymbol{x}, t) \in G_d)$.

Условные продольные структурные функции *n-ого* порядка (3) при этом приобретают следующий вид:

$$S_d^{(n)}(r) = C_d^{(n)} {\langle \varepsilon \rangle_d}^{n/3} r^{n/3} \left(\frac{l}{L_d} \right)^{-\langle \mu \rangle_d n(n-3)/18} \tag{4}$$

где $\langle \mu \rangle_d$ и $C_d^{(n)}$ – универсальные постоянные статистического характера. В то же время полные структурные функции согласно [11] записываются как

$$S^{(n)}(\boldsymbol{x}, r) = C_d^{(n)} \gamma_d {\langle \varepsilon \rangle_d}^{n/3} r^{n/3} \left(\frac{l}{L_d} \right)^{-\langle \mu \rangle_d n(n-3)/18} \tag{5}$$

с коэффициентом перемежаемости диссипативной жидкости $\gamma_d = \gamma_d(\boldsymbol{x})$. Таким образом, согласно (5) полная структурная функция второго порядка

$$S^{(2)}(\boldsymbol{x}, r) = C_d^{(2)} \gamma_d {\langle \varepsilon \rangle_d}^{2/3} r^{n/3} \left(\frac{l}{L_d} \right)^{\langle \mu \rangle_d/9} \tag{6}$$

и представляет собой закон Колмогорова «двух третей» с универсальным коэффициентом $C_d^{(2)} = 2.3$, [11] и «коэффициентом Колмогорова» $C_k = C_d^{(2)} \gamma_d$. Аналогом закона двух третей (6) является закон «пяти третей» Обухова [12]

$$E_1(\boldsymbol{x}, k) = C_{kdE} \gamma_d {\langle \varepsilon \rangle_d}^{2/3} k^{-5/3} \, (k_l L_d)^{-\langle \mu \rangle_d/9} \tag{7}$$

где $C_{kdE} \equiv C_d^{(2)}/4.02$ и волновыми числами $k \sim 1/r$ и $k_l \sim 1/l$.

Тестирование закона Колмогорова двух третей

Тестирование закона Колмогорова двух третей (6) в виде эквивалентного волнового спектра энергии мелкомасштабных флуктуаций скорости $E_1(\boldsymbol{x}, k)$ (7) было выполнено на экспериментальных данных [6] для мелкомасштабной структуры развитого турбулентного течения в слое смешения спутных потоков. Соответствующие расчеты были выполнены по формуле *ASMTurbS*

$$E^0 = C_{kE} k_*^{-5/3} \qquad (8)$$

где $C_{kE} = C_{kdE}\gamma_d$, $k_* = kL$, $E^0 = E_1(\boldsymbol{x},k)/E_1(0)$ и $E_1(\boldsymbol{x},0) = \gamma_d^{2/3}\langle\varepsilon\rangle_d^{2/3}$, [11].

Результаты расчетов E^0 (8) при различных значениях коэффициента внешней перемежаемости γ были выполнены с учетом взаимосвязи $\gamma_d = \gamma\gamma_{td}$ и с привлечением расчетных данных [11] представлены на Рисунке.

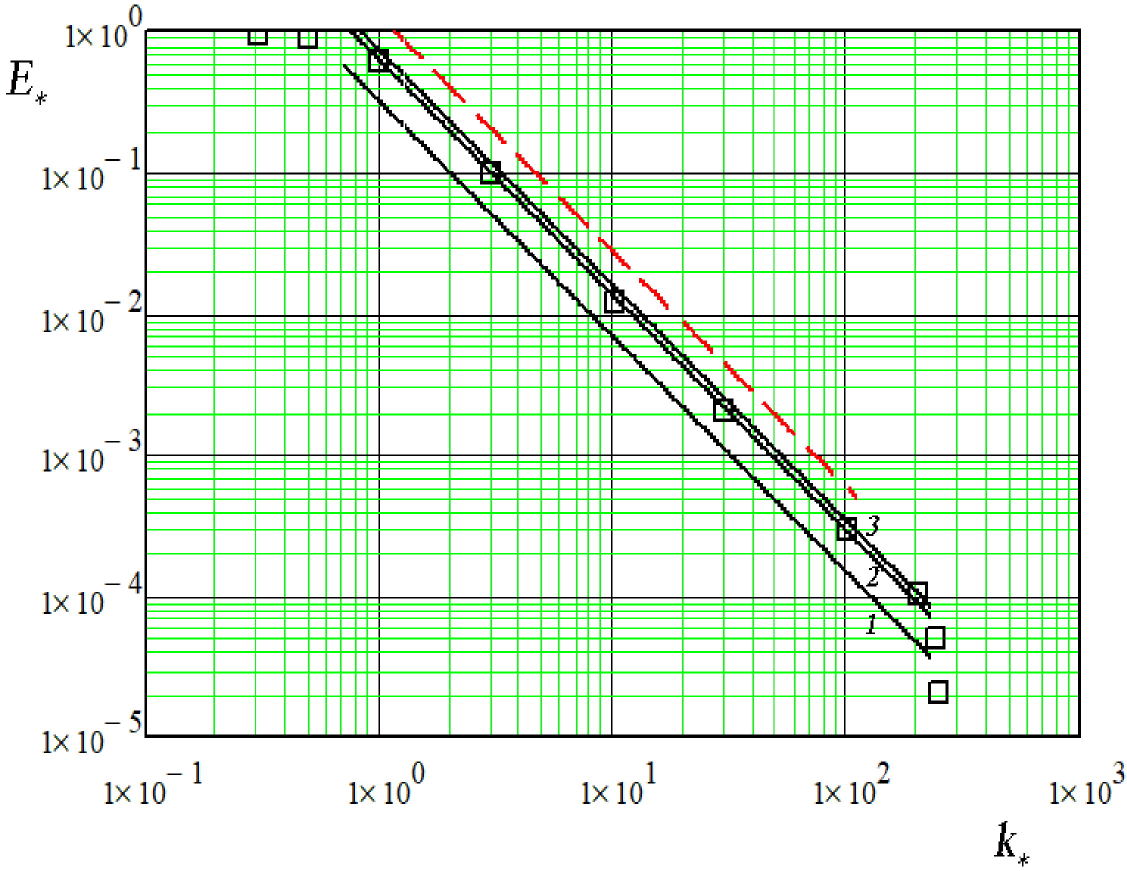

Рисунок. Влияние эффектов перемежаемости на волновой спектр энергии продольных флуктуаций скорости. Сплошные линии – расчёт при различных значениях коэффициента перемежаемости: $\gamma = 0.11 \cdot (1); \gamma = 0.52\ (2); \gamma = 1\ (3)$, которым соответствовали значения коэффициента перемежаемости диссипативной жидкости $\gamma_d = 0.03; 0.34; 1$. Значки и пунктирная линия – опытные данные и расчет [6], выполненные при $\gamma = 0.52$.

Заключение

Представленный математический аппарат теории *ASMTurbS* (как теории автономного статистического моделирования неоднородной мелкомасштабной структуры развитых турбулентных течений) позволил выполнить верификацию этой теории в свете «казанского» замечания Ландау на примере закона Колмогорова двух третей. В результате выяснилось, что с увеличением коэффициента перемежаемости уровень локальной неоднородности мелкомасштабной структуры турбулентного течения падает, тогда как такая структура в случае $\gamma \geq 0.5$ практически является локально однородной, а коэффициент Колмогорова можно считать универсальной постоянной. При этом согласно замечанию Ландау коэффициент Колмогорова не является постоянным, поскольку в обобщенной области развитого турбулентного течения его величина зависит от величины коэффициента внутренней перемежаемости. В то же время в диссипативной жидкости, где мелкомасштабная структура локально изотропна, величина коэффициента Колмогорова универсальна и постоянна.

Список литературы:

1 Kolmogorov, A.N. 1941. Local turbulence structure in incompressible viscous fluid at very high Reynolds numbers, Dokl. Akad Nauk SSSR 30, pp. 299-303.

2 Kolmogorov, A.N. 1962. A refinement of previous hypotheses concerning the local structures of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds numbers, J. Fluid Mech. 13, pp. 82-85.

3 Browne L., Antonia R., Shah D. 1987. Turbulent energy dissipation in a wake// J.Fluid Mech. Vol.179. pp.307-326.

4 Sreenivasan K.R., Antonia R.A. 1997. The Phenomenology of Small-Scale Turbulence. Annu. Rev. Fluid Mech. 29.P.435-472

5 Monin, A.S. and Yaglom, A.M. 1975. Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, Volume 2, Cambridge, MA: MIT Press.

6 Kuznetsov, V. R. and Sabel'nikov, V. A. 1990. Turbulence and Combustion. New York: Hemisphere (Kuznetsov, V. R., Sabelnikov, V. A. 1986. Turbulence and combustion. Moskow. Nauka Press, in Russian).

7 Frisch U. Turbulence. 1995. The Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge University Press.

8 Pope, S.B. 2000. Turbulent Flows. Cambridge University Press.

9 Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. 1987. Fluid Mechanics, 2nd edition. Pergamon Press, Oxford.

10 Batchelor G.K., Townsend A.A. 1949. The nature of turbulent motion at large wave numbers. Proc. R. Soc. Lond. V. 199, No 1057. P. 238-255.

11 Nuzhnov Yu. 2013. Some results of statistical modeling of the small-scale turbulence structure revealed with consideration of intermittency// IMECE. - California, San Diego. – Vol.7A: Fluids Engineering Systems and Technologies. - 7 p.

12 Obukhov A.M. 1962. Some specific features of atmospheric turbulence. J. Fluid Mech. Vol. 13. Pt. 1.- pp. 77-81.