



Нужнов Юрий Васильевич,
Доктор физико-математических наук,
Казахский Национальный Университет
им. аль-Фараби, г. Алматы

ВЕРИФИКАЦИЯ ТЕОРИИ $ASMTurbS$ НА ОСНОВЕ МОДИФИКАЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА $K62$

Аннотация: Представлены результаты верификации теории автономного статистического моделирования мелкомасштабной турбулентности $ASMTurbS$, полученные на основе модификации «экспоненциального» коэффициента $K62$. Установлено соответствие модифицированных коэффициентов с известными экспериментальными данными и сделан вывод о вполне удовлетворительных результатах выполненной верификации.

Ключевые слова: мелкомасштабная турбулентность, верификация теории, внутренняя перемежаемость, коэффициенты Колмогорова.

Введение

В теории мелкомасштабной турбулентности Колмогорова $K62$ [1] существенную роль играет так называемый «экспоненциальный коэффициент» (exponent μ [2]), который входит в «третью гипотезу замыкания» $K62$ и считается универсальным. Однако многочисленные экспериментальные измерения этого коэффициента показали значительный «разброс» его величины [3]. Неопределенность создавшейся ситуации сохраняется до сих пор, хотя ее разрешение имеет не только теоретическое, но и практическое значение (например, для разработки более эффективного подсеточного моделирования мелкомасштабной турбулентности в методе LES). К тому же *экспоненциальный* коэффициент в теории $K62$ служит основой для верификации теории $ASMTurbS$,



поскольку его модифицированные значения в турбулентной и диссипативной жидкостях турбулентного течения пригодны для тестирования на известных экспериментальных данных.

В недавно опубликованных работах [4-6] были представлены новые результаты развития теории *ASMTurbS*, т.е. теории автономного статистического моделирования мелкомасштабной структуры развитых турбулентных течений, особенностью которой является неоднородность из-за гидродинамической перемежаемости диссипативных полей. Как и любая другая теория статистического характера, теория *ASMTurbS* требует своей верификации.

Первые результаты верификации теории *ASMTurbS* были получены в [5, 6] путем тестирования модифицированных коэффициентов Колмогорова в законах «двух третей» и «четырёх пятых». Однако такая верификация оказывается «косвенной», поскольку использованные для тестирования экспериментальные данные [2, 3] были получены в предположении локальной изотропности турбулентной (а не диссипативной, как этого требует теория *ASMTurbS*) жидкости, см. [7]. Более того, в выражениях указанных коэффициентов содержались экспоненциальные коэффициенты Колмогорова и Колмогорова-Ландау, принцип статистического моделирования которых был уточнен в связи с получением новых результатов в теории *ASMTurbS*. Одним из таких уточнений был вывод о том, что в диссипативной жидкости турбулентного течения экспоненциальный коэффициент μ представляет собой условное среднее, т.е. величина $\mu = \langle \mu \rangle_d$ и является универсальной постоянной, тогда как во всей обобщенной области турбулентного течения коэффициент μ представляет собой полное среднее, т.е. величина $\mu = \langle \mu \rangle$ и является функциональной зависимостью от величины коэффициента перемежаемости диссипативной жидкости (напомним, что согласно [6] $\langle \mu \rangle_d$ – это экспоненциальный коэффициент Колмогорова, $\langle \mu \rangle$ – это экспоненциальный коэффициент Колмогорова-Ландау).



Цель статьи – выполнить верификацию теории *ASMTurbS* на примере экспоненциальных коэффициентов Колмогорова и Колмогорова-Ландау.

Для достижения поставленной цели прежде всего надо определить величину экспоненциального коэффициента Колмогорова в диссипативной жидкости турбулентного течения, поскольку именно этот коэффициент входит в логнормальную модель замыкания теории *ASMTurbS*.

Логнормальная модель замыкания ASMTurbS

Согласно гипотезе *ASMTurbS 1* [6, 7], мелкомасштабная структура диссипативной жидкости развитого турбулентного течения соответствует локально изотропной мелкомасштабной структуре K62. Это означает, что в каждой заданной точке пространственно-временных областей с локально изотропной турбулентностью множество значений «мгновенной» частично усредненной диссипации ε_l распределено по логарифмически нормальному закону. Отсюда следует, – условная функция плотности распределения вероятностей $P_d(\varepsilon_l)$ имеет вид логнормальной модели замыкания K62, т.е.

$$P_d(\varepsilon_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{*d} \varepsilon_l} \exp\left(-\frac{(\ln \varepsilon_l / \langle \varepsilon \rangle_d + \sigma_{*d}^2/2)^2}{2\sigma_{*d}^2}\right)$$

с условием нормировки $\int_0^\infty P_d(\varepsilon_l) d\varepsilon_l = 1$ и с дисперсией случайной логарифмической величины $\ln \varepsilon_l$ в виде $\sigma_{*d}^2 = \langle (\ln \varepsilon_l - \langle \ln \varepsilon_l \rangle_d)^2 \rangle_d$; причем в силу гипотезы *ASMTurbS 1* и согласно «третьей» гипотезе Колмогорова

$$\sigma_{*d}^2 = \text{Ln} \left(\frac{L_d}{l} \right)^{\langle \mu \rangle_d} + A_d$$

с параметрами $\langle \mu \rangle_d = \text{const}$, $A_d = \text{const}$ и с интегральным масштабом течения диссипативной жидкости L_d .

Тестирование экспоненциального коэффициента Колмогорова

Для определения величины экспоненциального коэффициента Колмогорова $\langle \mu \rangle_d$ воспользуемся выражением продольных структурных функций n -ого порядка в диссипативной жидкости, записанном в виде



$$S_d^{(n)}(r) = \langle v^n \rangle_d = C_{kd}^{(n)} \langle \varepsilon \rangle_d^{n/3} r^{n/3} \left(\frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_d(n) - n/3}$$

где L_d – интегральный масштаб течения диссипативной жидкости, $C_{kd}^{(n)}$ – постоянные коэффициенты Колмогорова, тогда как «скейлинговый» показатель

$$\zeta_d(n) = n/3 - \langle \mu \rangle_d n(n-3)/18 \quad (1)$$

На Рис.1 представлены расчёты $\zeta_n = \zeta_d(n)$, выполненные по формуле (1) при различных значениях экспоненциального коэффициента Колмогорова $\langle \mu \rangle_d$.

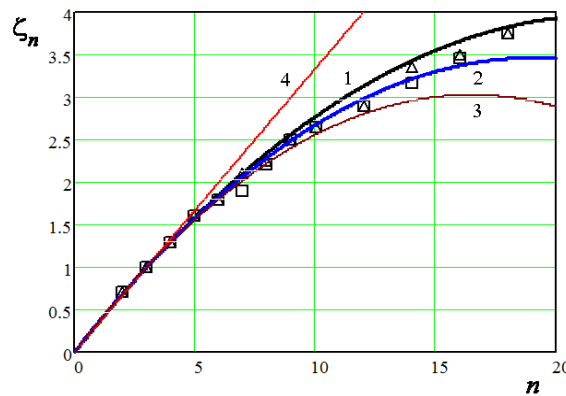


Рис.1. Зависимость скейлингового показателя $\zeta_n = \zeta_d(n)$ продольных структурных функций в диссипативной жидкости турбулентного течения. Здесь сплошные линии – расчёты при $\langle \mu \rangle_d = 0.145$ (1), $\langle \mu \rangle_d = 0.17$ (2), $\langle \mu \rangle_d = 0.2$ (3), $\langle \mu \rangle_d = 0$ (4) (соответствует теории К-41); значки Δ и \square – опытные данные [8, 9] (соответствуют $Re_\lambda = 500 - 800$).

Видно, что рассчитанная при $\langle \mu \rangle_d = 0.145$ полуэмпирическая (ввиду привлечения опытных данных) кривая 1 совпадает с опытными данными вплоть до $n = 20$.

Тестирование экспоненциального коэффициента Колмогорова-Ландау

Одним из результатов принятой в теории *ASMTurbS гипотезы 2* [6, 7] является то, что экспоненциальный коэффициент μ (в теории К62 $\mu = 9k$ [1]) в обобщенной области течения представляет собой полное статистическое среднее $\langle \mu \rangle$, а именно



$$\langle \mu \rangle = \gamma \langle \mu \rangle_t + (1 - \gamma) \langle \mu \rangle_n \quad (2)$$

тогда как в турбулентной жидкости турбулентного течения его условное среднее $\langle \mu \rangle_t$ согласно [6, 7] записывается в виде

$$\langle \mu \rangle_t = \gamma_{td} \langle \mu \rangle_{td} + (1 - \gamma_{td}) \langle \mu \rangle_{tnd} \quad (3)$$

где γ_{td} – коэффициент внутренней перемежаемости, связанный соотношением $\gamma_d = \gamma \gamma_{td}$.

Расчет коэффициента $\langle \mu \rangle_t$ в зависимости от значений коэффициента внешней перемежаемости γ представлен на Рис.2. Здесь расчетная кривая 1 и опытные данные соответствуют условному статистическому среднему (3), т.е. $\mu = \langle \mu \rangle_t$; расчетная кривая 2 соответствует полному статистическому среднему (2), т.е. $\mu = \langle \mu \rangle$, опытные данные отсутствуют. Значки определенного вида относятся к различным типам турбулентного течения.

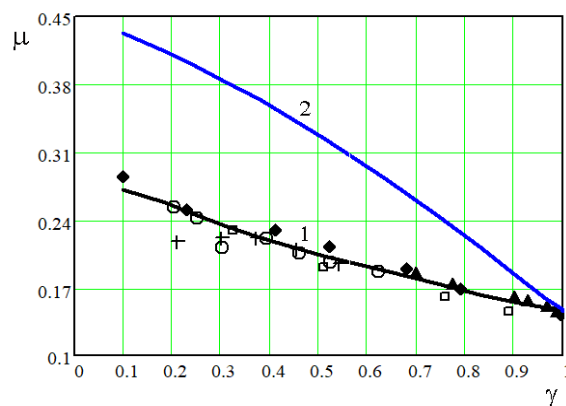


Рис.2. Функциональная зависимость экспоненциального коэффициента Колмогорова-Ландау от величины коэффициента внешней перемежаемости.

Сплошные линии расчет $\langle \mu \rangle_t$ (1) и $\langle \mu \rangle$ (2); значки – опытные данные коэффициента $\langle \mu \rangle_t$ [2, 3].

Заключение

Отличительной особенностью разрабатываемой здесь теории *ASMTurbS* является учет эффектов внутренней перемежаемости. Представленные при этом результаты верификации этой теории показали ее удовлетворительное соответствие известным опытным данным. В то же время значительная часть



такой верификации была выполнена через тестирование модифицированных коэффициентов Колмогорова-Ландау и, поэтому, является «косвенной». Ясно, что для «прямого» тестирования статистических характеристик теории *ASMTurbS* требуются специальные экспериментальные исследования с идентификацией диссипативной жидкости турбулентного течения.

Другой особенностью теории *ASMTurbS* является использование размера частичного усреднения диссипации, – в данной теории этот размер выбирается фиксированным и имеет аналогию с характерным размером измерительного устройства или размером ячеек расчетной сетки численного моделирования.

Список литературы

1. Kolmogorov, A.N. 1962. A refinement of previous hypotheses concerning the local structures of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 13, pp. 82-85.

2. Kuznetsov, V. R., Praskovsky, A. A. and Sabelnikov, V. A. 1992. Fine-scale turbulence structure of intermittent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 243, pp. 273-295.

3. Kuznetsov, V. R. and Sabel'nikov, V. A. 1990. *Turbulence and Combustion*. New York: Hemisphere.

4. Нужнов, Ю.В. Перспективы дальнейшего развития теории мелкомасштабной турбулентности Колмогорова //Фундаментальные и прикладные аспекты развития современной науки: Сборник научных статей по материалам XII Международной научно практической конференции, Уфа, 12 мая 2023 года. В 4 частях, Часть 1. – Уфа: "Научно-издательский центр "Вестник науки", 2023. – С. 32-39. – EDN FZXAWZ. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7987895>.

5. Нужнов, Ю.В. К теории мелкомасштабной турбулентности. Закон Колмогорова “двух третей” в свете замечания Ландау //Флагман науки: научный журнал. Май 2023.- СПб., Изд.ГНИИ "Нацразвитие"-2023. №4 (4). -6с. DOI 10.37539/2949-1991.2023.4.4.038.



6. Нужнов, Ю.В. Модификация коэффициентов Колмогорова в теории мелкомасштабной турбулентности. Международная научно-практическая конференция «Фундаментальные и прикладные аспекты развития современной науки». Уфа, 2023-К-384-1-05_23. -6с. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7987895>
УДК 53.532.5.01.

7. Nuzhnov, Yu. 2013. Some results of statistical modeling of the small-scale turbulence structure revealed with consideration of intermittency// IMECE. - California, San Diego. – Vol. 7A: Fluids Engineering Systems and Technologies. - 7p.

8. Anselmet F., Gagne Y., Hopfinger E.J., Antonia R.A. 1984. High-order velocity structure function in turbulent shear flows. J. Fluid Mech. 140, pp. 63-89.

9. Herweijer, J.A. and van de Water, W. 1995. Universal shape of scaling functions in turbulence, Phys. Rev. Lett. 74, pp. 4651-4654.

© Ю.В. Нужнов, 2023